Roma Fotot. Danesi

Enrico Betti

OPERE MATEMATICHE

DI

ENRICO BETTI

PUBBLICATE

PER CURA DELLA R. ACCADEMIA DE' LINCEI

TOMO PRIMO

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA

E DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

MILANO

—

1903

PREFAZIONE

ALLE

OPERE MATEMATICHE DI ENRICO BETTI

Nella seduta del 4 dicembre 1892 la R. Accademia de' Lincei esprimeva il voto che ad onorare in modo degno la memoria di ENRICO BETTI, mancato ai vivi pochi mesi innanzi, si promuovesse una nuova e compiuta edizione delle sue opere matematiche.

In adempimento del voto dell'Accademia esce ora alla luce un primo Volume che comprende i lavori pubblicati dal BETTI negli undici anni dal 1850 al 1860: tra essi figurano le classiche ricerche intorno alla teoria delle equazioni algebriche e la monografia sulle funzioni ellittiche, che vanno tra le produzioni più profonde di quella mente eletta. I lavori si seguono nell'ordine cronologico della loro prima pubblicazione e sono riprodotti secondo il testo quale fu licenziato dall'autore, salve le correzioni di evidenti errori materiali o l'impiego, quando fu il caso, di simboli più conformi all'uso tipografico odierno, e salva ancora una eccezione per pochi luoghi, dove si rilevarono delle sviste di tale importanza da rendere incerti o sospetti alcuni de' risultati conseguiti. Si è procurato per altro che il testo di questi luoghi, debitamente rettificato, si discostasse il meno possibile dal testo primitivo e corrispondesse colla maggiore esattezza al pensiero dell'autore. Naturalmente di ognuno di questi cambiamenti venne fatto cauto il lettore con richiami ed opportune dichiarazioni a pie' di pagina.

Nell' assumere per incarico dell'Accademia la cura della nuova edizione delle opere del BETTI non abbiamo consultato le nostre forze, ma unicamente l'affetto e l'ammirazione grandi che avemmo per lui vivo, lieti dell'occasione che ci si presentava di cooperare secondo il poter nostro alle onoranze verso un uomo tanto benemerito della scienza e dell' insegnamento. Nell' opera nostra, che, per quanto modesta, non è stata scevra di difficoltà, avemmo aiutatori zelanti ed efficaci i professori BIANCHI, TONELLI e VOLTERRA, amici e colleghi carissimi, ai quali con animo riconoscente presentiamo, anche in nome dell'Accademia, vivi ringraziamenti.

VALENTINO CERRUTI
Segretario della Classe di scienze fisiche,
matematiche e naturali.

ELENCO DEI LAVORI SCIENTIFICI

DI

ENRICO BETTI

I. — Annali di scienze matematiche e fisiche compilati da B. Tortolini.
(Roma, 1850-57).

1. Sopra la determinazione analitica dell'efflusso de' liquidi per una piccolissima apertura, t. I, an. 1850, pp. 425-443.
2. Sopra la risolubilità delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo, t. II, an. 1851, pp. 5-19.
3. Un teorema sulle risolventi dell'equazioni risolubili per radicali, id. id., id. id., pp. 102-103.
4. Estratto di una lettera al prof. B. Tortolini, id. id., id. id., pp. 246-247.
5. Sulla risoluzione dell'equazioni algebriche, t. III, an. 1852, pp. 49-115.
6. Sopra l'abbassamento dell'equazioni modulari delle funzioni ellittiche, t. IV, an. 1853, pp. 81-100.
7. Un teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche, t. V, an. 1854, pp. 10-17.
8. Sopra la teorica delle sostituzioni, t. VI, an. 1855, pp. 5-34.
9. Sopra la più generale funzione algebrica che può soddisfare un'equazione, il grado della quale è potenza d'un numero primo, id. id., id. id., pp. 260-272.
10. Sopra le forme omogenee a due indeterminate, t. VII, an. 1856, pp. 60-63.
11. Sopra le serie doppie ricorrenti, t. VIII, an. 1857, pp. 48-61.

II. — Annali di matematica pura ed applicata.
(Serie I. — Roma, 1858-66).

12. Sopra l'equazioni algebriche con più incognite, t. I, an. 1858, pp. 1-8.
13. Sopra i covarianti delle forme binarie, id. id., id. id., pp. 129-134.
14. Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche, id. id., id. id., pp. 193-204.
15. Sopra le funzioni simmetriche delle radici di un'equazione (Rivista bibliografica della Memoria di A. Cayley dal titolo: « A Memoir on the symmetric fonctions of the roots of an equation ». Phil. Trans., vol. 147, pp. 489-496), id. id., id. id., pp. 323-326.
16. Sopra i combinanti, id. id., id. id., pp. 344-348.
17. Fondamenti di una teorica generale delle funzioni di una variabile complessa (Traduzione della dissertazione inaugurale di B. Riemann), t. II, an. 1859, pp. 288-304, 337-356.

18. La teorica delle funzioni ellittiche, t. III, an. 1860, pp. 65-159, 298-310; t. IV, an. 1861, pp. 26-45, 57-70, 297-336.
19. Sopra la propagazione delle onde piane di un gaz (Rivista bibliografica della Memoria di B. Riemann dal titolo: « Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite ». Abh. der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, t. VIII, an. 1860), t. III, an. 1860, pp. 232-241.
20. Sopra la teorica generale delle superficie curve, id. id., id. id., pp. 336-339.

III. — Annali di matematica pura ed applicata.
(Serie II. — Milano, 1867-1897).

21. Sopra le funzioni sferiche, t. I, an. 1867, pp. 81-87.
22. Sopra la determinazione delle temperature di una lastra terminata, id. id., an. 1868, pp. 373-380.
23. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, t. IV, an. 1871, pp. 140-158.
24. Sopra l'equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici, t. VI, an. 1874, pp. 101-111.
25. Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme e ortogonali, t. VIII, an. 1877, pp. 138-145.
26. Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti che si attraggono e si respingono tra loro, id. id., id. id., pp. 302-311.
27. Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale a una massa fluida eterogenea, t. X, an. 1881, pp. 173-187.

IV. — Annali delle Università toscane.
(Pisa, 1846....).

28. Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa, t. VII (Scienze cosmologiche), an. 1862, pp. 101-130.
29. Sopra la teoria della capillarità, t. IX, an. 1866, pp. 5-24.
30. Sopra la determinazione delle temperature variabili d'un cilindro, t. X, an. 1868, pp. 143-158.

V. — Nuovo Cimento.
(Pisa, 1855....).

31. Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton e sua applicazione alla elettricità statica, ser. I, t. XVIII, an. 1863, pp. 385-402; t. XIX, id. id., pp. 59-75, 77-95, 149-175, 357-377; t. XX, an. 1864, pp. 19-39, 121-141.
32. Teoria della capillarità, id. id., t. XXV, an. 1867, pp. 81-105, 225-237.
33. Sopra la elettrodinamica, id. id., t. XXVII, an. 1868, pp. 402-407.
34. Sopra la determinazione delle temperature variabili di una lastra terminata, quando la conducibilità non è la stessa in tutte le direzioni, id. id., t. XXVIII, id. id., pp. 115-124.
35. Sopra la distribuzione delle correnti elettriche in una lastra rettangolare, ser. II, t. III, an. 1870, pp. 91-98.
36. Teoria dell'elasticità, id. id., t. VII-VIII, an. 1872, pp. 5-21, 69-97, 158-180, 357-367; t. IX, an. 1873, pp. 34-43; t. X, id. id., pp. 58-84.
37. Un teorema sulle funzioni potenziali, id. id., t. XII, an. 1874, pp. 75-79.
38. Sopra il potenziale di un sistema di conduttori isolati carichi di elettricità e di coibenti elettrizzati comunque, ser. III, t. II, an. 1877, pp. 249-252.

39. Sopra la teoria dei condensatori, id. id., t. V, an. 1879, pp. 119-133.
40. Sopra l'equilibrio di una massa di gas perfetto isolata nello spazio, id. id., t. VII, an. 1880, pp. 26-35.
41. Sopra il moto di un ellissoide fluido eterogeneo, id. id., t. IX, an. 1881, pp. 218-220.
42. Sopra il moto de' fluidi elastici, id. id., t. XIV, an. 1883, pp. 43-51.

VI. — Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane.

(Napoli, 1863...).

43. Ottaviano Fabrizio Mossotti — Necrologia, t. I, an. 1863, p. 92.
44. Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa definita da un'equazione di terzo grado, t. III, an. 1865, pp. 143-145.

VII. — Memorie della Società italiana delle Scienze (detta de' XL).

45. Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi omogenei, ser. III, t. I, parte II, pp. 165-190. Firenze, 1868.

VIII. — Atti della Reale Accademia de' Lincei (in Roma).

46. Sopra la funzione potenziale di un'ellisse omogenea, ser. II, vol. II, an. 1874-75, pp. 262-263.
47. Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti, ser. III, Transunti, t. I, an. 1876-77, pp. 129-130.
48. Sopra una estensione de' principî generali della dinamica, id. id., id. t. II, an. 1877-78, pp. 32-34.
49. Sopra il moto di un ellissoide fluido eterogeneo, id. id., id. t. V, an. 1880-81, pp. 201-202.
50. Sopra la entropia di un sistema newtoniano in moto stabile, ser. IV, Rendiconti t. IV. 2° sem., an. 1888, pp. 113-115.
51. Sopra la entropia di un sistema newtoniano in moto stabile (Nota 2ª), id. id., id. id., id. id., pp. 195-198.
52. Sopra un teorema di meccanica, id. id., id. t. VII, 1° sem., an. 1891, pp. 159-160.

IX. — Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino.

53. Teorema di elettricità statica, t. I, an. 1865-66, pp. 24-25.

X. — Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

54. Sopra una estensione della terza legge di Keplero, t. II, an. 1888, pp. 145-147.

XI. — Collectanea mathematica inedita in memoriam Dominici Chelini.

55. Sopra la propagazione del calore, pp. 232-240. Milano, 1881.

XII. — Journal für die reine und angewandte Mathematik.

56. Sur les fonctions symétriques des racines des équations, t. LIV, pp. 98-100. Berlin, 1857.

XIII. — Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.

57. Extrait from Letter of sig. E. Betti to M. Sylvester, t. I, pp. 91-92. London, 1857.

XIV. — Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris.

58. Sur la résolution par radicaux des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier, t. XLVIII, an. 1859, pp. 182-186.
59. Estratto di una lettera al sig. C. Hermite (1), t. XLIX, an. 1859, pp. 113-115.
60. Sur les substitutions de six lettres, t. LXIII, an. 1866, p. 878.

XV. — Proceedings of the London Mathematical Society.

61. On the Motion of an Elastic Solid strained by extraneous Forces, t. XX, an. 1889 pp. 246-248.

XVI. — Opere pubblicate separatamente.

62. Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'Elettrostatica e al Magnetismo. Pisa, Tip. T. Nistri e C., 1879, in 8°, pp. VIII, 359 (2).
63. Trattato di Algebra elementare di Giuseppe Bertrand. Prima traduzione italiana con Note ed Aggiunte. Firenze, F. Le Monnier (3).
64. Gli Elementi d'Euclide con Note, Aggiunte ed Esercizi ad uso de' Ginnasi e de' Licei (in comune col prof. F. Brioschi). Firenze, Successori Le Monnier (4).

(1) La lettera è incorporata nella Memoria del sig. C. Hermite dal titolo: « Sur la théorie des équations modulaires ».

(2) Di quest'opera venne pubblicata in Stuttgart nel 1885 una traduzione tedesca dal sig. W. F. Meyer col titolo: « Lehrbuch der Potentialtheorie und ihrer Anwendungen auf Elektrostatik und Magnetismus ».

(3) Questa traduzione, comparsa per la prima volta nel 1856, fu ristampata parecchie volte in seguito.

(4) Anche di quest'opera, della quale una prima edizione venne pubblicata nel 1867, si ebbero parecchie ristampe.

INDICE DEL TOMO I.

PAGINE

Prefazione III

Elenco dei lavori scientifici di Enrico Betti V

I. Sopra la determinazione analitica dell'efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura 3
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. I (1850), pp. 425-443.

II. Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo 17
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. II (1851), pp. 5-19.

III. Un teorema sulle risolventi delle equazioni risolubili per radicali. 28
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. II (1851), pp. 102-103.

IV. Estratto di una lettera al prof. B. Tortolini 30
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. II (1851), pp. 246-247.

V. Sulla risoluzione delle equazioni algebriche 31
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. III (1852), pp. 49-115.

VI. Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche 81
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. IV (1853), pp. 81-100.

VII. Un teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche. 96
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. V (1854), pp. 10-17.

VIII. Sopra la teorica delle sostituzioni 102
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. VI (1855), pp. 5-34.

IX. Estratto di una lettera al prof. J. J. Sylvester 124
Quarterly Journ. of pure and applied Mathematics, t. I (1857), pp. 91-92.

X. Sopra la più generale funzione algebrica che può soddisfare una equazione il grado della quale è potenza di un numero primo. 126
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. VI (1855), pp. 260-272.

PAGINE

XI. Sopra le forme omogenee a due indeterminate 136
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. VII (1856), pp. 60-63).

XII. Sopra le serie doppie ricorrenti. 139
Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. VIII (1857), pp. 48-61.

XIII. Sur les fonctions symétriques des racines des équations . . 148
Journ. für die reine und ungewandte Mathem., t. 54 (1857) pp. 98-100.

XIV. Sopra l'equazioni algebriche con più incognite 150
Annali di matematica pura ed applicata, ser. I, t. I (1858), pp. 1-8.

XV. Sopra i covarianti delle forme binarie 157
Annali di matematica pura ed applicata, ser. I, t. I (1858), pp. 129-134.

XVI. Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche 163
Annali di matematica pura ed applicata, ser. I, t. I (1858), pp. 193-204.

XVII. Sopra le funzioni simmetriche delle radici di una equazione . 174
Annali di matematica pura ed applicata, ser. I, t. I (1858), pp. 323-326.

XVIII. Sopra i combinanti 178
Annali di matematica pura ed applicata, ser. I, t. I (1858), pp. 344-348.

XIX. Sur la résolution par radicaux des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier 183
Comptes-rend. des séances de l'Ac. des Sc., t. XLVIII (1859), pp. 182-186.

XX. Estratto di una lettera al sig. C. Hermite 188
Comptes-rend. des séances de l'Ac. des Sc., t. XLIX (1859), pp. 113-115.

XXI. Fondamenti di una teorica generale delle funzioni di una variabile complessa 190
Annali di matematica pura ed applicata, ser. I, t. II (1859), pp. 288-304, 337-356.

XXII. La teorica delle funzioni ellittiche 228
Annali di matematica pura ed applicata, ser. I, t. III (1860), pp. 65-159, 298-310; t. IV (1861), pp. 26-45, 57-70, 297-336.

Indice alfabetico dei nomi ricordati in questo volume. 413

ERRATA-CORRIGE DEL PRESENTE VOLUME

		ERRATA	CORRIGE
pag. 130,	lin. 12	*Abeliana*	*abeliana*
„ 130,	„ 32	122	123
„ 184,	„ 6	$ru_{p^\nu+\iota}$	$r_{u_{p^\nu+\iota}}$
„ 228,	„ 4	1859, 1860	1860, 1861
„ 377,	„ 21	$\sum_{1}^{\frac{N-1}{2}}$	$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}$

MEMORIE

I.

SOPRA LA DETERMINAZIONE ANALITICA DELL'EFFLUSSO DEI LIQUIDI PER UNA PICCOLISSIMA APERTURA

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. I, pp. 425-443, Roma, 1850).

Il movimento di un liquido, che esce per una piccolissima apertura praticata in parete sottile, si è accennato finora nell'Analisi Idrodinamica come un caso di moto lineare, supponendo che tutte le molecole di un medesimo strato orizzontale discendessero verticalmente, animate di eguali velocità. Ma in questa ipotesi si ritiene come già stabilita una direzione del moto, quale non ha realmente luogo, e per conseguenza, se ne può dedurre coll'Analisi, soltanto ciò che è indipendente da questa direzione, come il celebre Teorema di Torricelli, della proporzionalità delle portate alle radici quadrate dei battenti; e rimane impossibile di determinare tutte le altre circostanze del movimento, le quali sono divenute di esclusivo dominio della Idraulica sperimentale. Io quindi ho rigettato ogni ipotesi sulla direzione del movimento, e ho integrato direttamente le equazioni ordinarie della Idrodinamica.

Ho incominciato dal caso più semplice, cioè da quello dell'efflusso per una fessura piccolissima, fatta transversalmente nel mezzo del fondo orizzontale di un vaso, ed ho ottenuto coll'Analisi anche le trajettorie delle molecole, le leggi colle quali variano le velocità nell'interno della massa liquida, e quindi il coefficiente di efflusso.

Il chiarissimo prof. Pacinotti, mio ottimo maestro e amico, ha avuto la gentilezza d'instituire apposite esperienze su questo caso di movimento dei liquidi, per verificare i miei risultati teorici; e quelle, eseguite dal dott. Antonio Gianni, non hanno dato con questi che una differenza piccolissima, dovuta alle resistenze trascurate nell'Analisi, e alle inesattezze, che non si possono mai disgiungere affatto dai risultati sperimentali.

In un vaso della forma di un parallelepipedo rettangolo, tenuto costantemente ripieno di liquido, sia praticata nella parete rettangolare che ne constituisce il fondo, e che supporremo sottilissima e orizzontale, una fessura di larghezza piccolissima, la quale, terminando ai due lati opposti, li divida ambedue per metà col suo asse longitudinale. È evidente che il movimento sarà a due sole coordinate; perchè, essendo identico in tutti i piani normali all'asse della fessura, basterà determinarlo soltanto in un velo fluido che sia in uno qualunque di questi.

Si ponga l'origine nel punto d'intersezione del piano, che si considera, coll'asse della fessura, e si prenda per asse delle x la verticale.

Le condizioni esterne alle quali è soggetto il movimento, e che debbon servire alla determinazione delle funzioni arbitrarie dell'integrale, sono le seguenti:

1.° Che la componente verticale u sia nulla per tutti i punti del fondo, ossia per $x=0$ con y compreso tra $\pm b$ e $\pm \infty$; indicando con $2b$ la larghezza della fessura, e riguardando, come abbiam detto, le dimensioni del vaso incomparabilmente più grandi di b:

2.° Che la pressione p sia eguale alla pressione p_0 dell'atmosfera in tutti i punti della fessura, cioè per $x=0$ con y compreso tra $\pm b$ e zero: lo che si può assumere, come si è fatto da altri geometri in casi analoghi, avuto riguardo alla piccolezza di b:

3.° Che la pressione p sia pure eguale a p_0 alla superficie superiore del liquido, per $x=\mathrm{d}$ altezza del vaso. L'altra condizione relativa alle pareti laterali rimane verificata di per sè; perchè, attesa la piccolezza della fessura, la velocità a quella distanza deve risultar trascurabile.

Prendiamo il moto ridotto permanente, come suol farsi sempre nelle esperienze sull'efflusso dei liquidi.

Supponendo $udx + vdy = dk$, le equazioni fondamentali della Idrodinamica riduconsi alle seguenti

$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

$$p = c - gx - \frac{\mathrm{V}^2}{2}: \tag{2}$$

dove c è una costante arbitraria, g la gravità, V la velocità risultante.

Transformiamo la (1) in coordinate ellittiche del Lamè. Siano i fuochi delle Ellissi e Iperbole omofocali i bordi della fessura; b ne saranno le *eccentricità*. S'indichino con μ i semiassi maggiori delle Ellissi, con ν i semiassi reali delle Iperbole; avremo

$$\frac{y^2}{\mu^2} + \frac{x^2}{\mu^2 - b^2} = 1\,, \qquad \frac{y^2}{\nu^2} - \frac{x^2}{b^2 - \nu^2} = 1. \tag{3}$$

Poniamo

$$\mu = b \cos h.\theta\,, \qquad \nu = b \operatorname{sen} \varphi\,,$$

dove con h anteposto all'argomento s'indicano le funzioni trigonometriche iperboliche, per le quali esistono le relazioni [1]

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = 2 \cos h.\theta\,, \qquad e^{\theta} - e^{-\theta} = 2 \operatorname{sen} h.\theta,$$

---

[1] Le notazioni sen $h.\theta$ e cos $h.\theta$ hanno un significato molto diverso da quello delle funzioni circolari degli archi multipli, sen. $h\theta$ e cos. $h\theta$. Queste indicano l'ordinata e l'ascissa

Con queste la (3) divengono

$$(4)\qquad \frac{y^2}{b^2\cos^2 h.\theta}+\frac{x^2}{b^2\,\mathrm{sen}^2\, h.\theta}=1\,,\qquad \frac{y^2}{b^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}-\frac{x^2}{b^2\cos^2\varphi}=1\,;$$

e quindi

$$(5)\qquad \begin{cases} y=b\cos h.\theta\ \mathrm{sen}\,\varphi \\ x=b\ \mathrm{sen}\, h.\theta\cos\varphi. \end{cases}$$

Ora è noto che la transformata delle (1) è in generale, quando θ e φ sono parametri di linee ortogonali tra loro,

$$(6)\qquad \frac{\partial\,\dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}\dfrac{\partial k}{\partial\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\,\dfrac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}\dfrac{\partial k}{\partial\varphi}}{\partial\varphi}=0\ \text{(1)},$$

---

d'un punto di una circonferenza di raggio uno, determinato da un settore l'area del quale è $\frac{1}{2}h\theta$: quelle indicano l'ordinata e l'ascissa di un punto di una iperbola equilatera, che ha i semiassi eguali a uno, determinato da un settore la cui area è $\frac{1}{2}\theta$; e si dicono funzioni trigonometriche iperboliche. — Ho preferito queste notazioni; perchè sono state già usate dal prof O. F. Mossotti nelle sue Lezioni di Meccanica e Idraulica date nell'I. e R. Università di Pisa, e che ora sono sotto il torchio.

(1) Si può dimostrare la equazione (6) nel modo seguente, applicando il metodo semplice ed elegante che per queste trasformazioni ha dato in generale il celebre C. G. I. Iacobi nel vol. XXXVI del Giornale di Crelle.

Indichiamo con α l'angolo che la normale alla Ellisse coordinata fa coll'asse delle x, con β quello della normale alla Iperbola; avremo

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\mathrm{H}\cos\alpha\,,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\mathrm{H}'\cos\beta\,,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mathrm{H}'\mathrm{sen}\,\beta\,.$$

Le derivate parziali di k saranno

$$\frac{\partial k}{\partial x}=\frac{\partial k}{\partial\theta}\mathrm{H}\cos\alpha+\frac{\partial k}{\partial\varphi}\mathrm{H}'\cos\beta\qquad \frac{\partial k}{\partial y}=\frac{\partial k}{\partial\theta}\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\alpha+\frac{\partial k}{\partial\varphi}\mathrm{H}'\,\mathrm{sen}\,\beta\,;$$

onde, innalzando a quadrato e sommando, si ottiene

$$\frac{\partial k^2}{\partial x^2}+\frac{\partial k^2}{\partial y^2}=\mathrm{H}^2\frac{\partial k^2}{\partial\theta^2}+\mathrm{H}'^2\frac{\partial k^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

Avremo inoltre anche le seguenti relazioni

$$\frac{d\theta}{\mathrm{H}}=dx\cos\alpha+dy\ \mathrm{sen}\,\alpha\,,\qquad \frac{d\varphi}{\mathrm{H}'}=dx\cos\beta+dy\ \mathrm{sen}\,\beta\,,$$

dalle quali essendo le curve coordinate ortogonali, e quindi

$$\alpha-\beta=\pm\frac{\pi}{2}\cdot$$

si ha

$$dx=\frac{\mathrm{sen}\,\beta}{\mathrm{H}}d\theta+\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{H}'}d\varphi\qquad dy=\frac{\cos\beta}{\mathrm{H}}d\theta+\frac{\cos\alpha}{\mathrm{H}'}d\varphi\,;$$

onde

$$dx\,dy=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)d\theta\,d\varphi=\frac{d\theta\,d\varphi}{\mathrm{HH}'}\,.$$

essendo

$$H^2 = \frac{\partial\theta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\theta^2}{\partial y^2}, \quad H'^2 = \frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2}:$$

ma dalle (5) si ha

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{\cos h.\theta \cos\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)}, & \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{\operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -\frac{\operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{\cos h\,\theta \cos\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)} \end{aligned} \right.$$

onde

$$H^2 = H'^2 = \frac{1}{b^2(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)}:$$

ciò che riduce la (6) e quindi anche la (1) a

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Si può assumere per un integrale di questa equazione la seguente espressione,

$$k = C + C_0\,\theta + C_1\,\varphi + \Sigma B_m\, e^{-m\theta}.\cos m\varphi:$$

onde derivando

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial k}{\partial x} \\ &= \frac{(C_0 - \Sigma m B_m e^{-m\theta} \cos m\varphi)\cos h.\theta \cos\varphi - (C_1 - \Sigma m B_m e^{-m\theta} \operatorname{sen} m\varphi)\operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)} \\ v &= \frac{\partial k}{\partial y} \\ &= \frac{(C_0 - \Sigma m B_m e^{-m\theta} \cos m\varphi)\operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi + (C_1 - \Sigma m B_m e^{-m\theta} \operatorname{sen} m\varphi)\cos h.\theta \cos\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)} \end{aligned} \right.$$

colle quali espressioni si può sodisfare a tutte le condizioni enunciate, come andiamo a vedere.

Si potrà quindi stabilire la equazione

$$\iint \left(\frac{\partial k^2}{\partial x^2} + \frac{\partial k^2}{\partial y^2} \right) dx\,dy = \iint \left(H^2 \frac{\partial k^2}{\partial\theta^2} + H'^2 \frac{\partial k^2}{\partial\varphi^2} \right) \frac{d\theta\,d\varphi}{HH'};$$

dove i due integrali debbono intendersi estesi a tutti gli elementi di un medesimo spazio.

Le variazioni di questi integrali rapporto a un parametro di k, devono essere eguali; onde è facile dedurne

$$\iint \left(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \right) dx\,dy\,\delta k = \iint \left\{ \frac{\partial \frac{H}{H'} \frac{\partial k}{\partial\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial \frac{H'}{H} \frac{\partial k}{\partial\varphi}}{\partial\varphi} \right\} d\theta\,d\varphi\,\delta k:$$

La prima condizione porta che u sia nullo per $x=0$ con y compreso tra $\pm b$ e $\pm\infty$; i quali valori corrispondono, come si vede dalle (5), a $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ e a θ qualunque. Ma per questo valore di φ

$$u=-\frac{\pm C_1-\Sigma m B_m \operatorname{sen} m\frac{\pi}{2}\, e^{-m\theta}\operatorname{sen} h.\theta}{\operatorname{sen}^2 h.\theta}$$

che, dovendo esser nullo qualunque sia θ, dà

$$C_1=0\,,\qquad m=2t$$

essendo t numero intero.

Poniamo ora, per introdurre anche C_0 sotto il termine sommatorio,

$$2t B_{2t}=-C_{2t}\,.$$

Con ciò le (9) si riducono alle seguenti

$$u=\frac{\cos h.\theta\cos\varphi\sum_{t=0}^{t=\infty}C_{2t}\,e^{-2t\theta}\cos 2t\varphi-\operatorname{sen} h.\theta\operatorname{sen}\varphi\sum_{t=0}^{t=\infty}C_{2t}\,e^{-2t\theta}\operatorname{sen} 2t\varphi}{b\,(\cos^2 h.\theta-\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

$$v=\frac{\operatorname{sen} h.\theta\operatorname{sen}\varphi\sum_{t=0}^{t=\infty}C_{2t}\,e^{-2t\theta}\cos 2t\varphi+\cos h.\theta\cos\varphi\sum_{t=0}^{t=\infty}C_{2t}\,e^{-2t\theta}\operatorname{sen} 2t\varphi}{b\,(\cos^2 h.\theta-\operatorname{sen}^2\varphi)}\,.$$

Aggiungendo e togliendo alla somma dei coseni

$$C_0\,e^{-2\theta}\cos 2\varphi+(C_2-C_0)\,e^{-4\theta}\cos 4\varphi+(C_4-C_2+C_0)\,e^{-6\theta}\cos 6\varphi+\cdots$$
$$\cdots+\left(C_{2t}-C_{2t-2}+\cdots+(-1)^t C_0\right)e^{-(2t+2)\theta}\cos(2t+2)\varphi+\cdots$$

e ponendo

$$C_{2t}-C_{2t-2}+\cdots+(-1)^t C_0=A_t\,;$$

---

equazione, che, dovendo esser verificata qualunque siano dk e i limiti, è necessario che abbia luogo anche per gli elementi uguali di spazio

$$dx\,dy \quad\text{e}\quad \frac{d\theta\,d\varphi}{HH'}\,.$$

e sia

$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}=HH'\left\{\frac{\partial\,\frac{H}{H'}\frac{\partial k}{\partial\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\,\frac{H'}{H}\frac{\partial k}{\partial\varphi}}{\partial\varphi}\right\},$$

d'onde deriva immediatamente la (6).

e analogamente operando per la serie dei seni, si ottiene

$$u=\frac{1}{(b\cos^2 h.\theta-\mathrm{sen}^2\varphi)}\sum_{t=0}^{t=\infty}A_t e^{-(2t+1)\theta}\Big[\Big(e^{-\theta}\cos(2t+2)\varphi+e^{\theta}\cos 2t\varphi\Big)\cos h.\theta\cos\varphi$$

$$-\Big(e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,(2t+2)\,\varphi+e^{\theta}\,\mathrm{sen}\,2t\varphi\Big)\,\mathrm{sen}\,h.\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\Big]$$

$$v=\frac{1}{b(\cos^2 h.\theta-\mathrm{sen}^2\varphi)}\sum_{t=0}^{t=\infty}A_t e^{-(2t+1)\theta}\Big[\Big(e^{-\theta}\cos(2t+2)\varphi+e^{\theta}\cos 2t\varphi\Big)\,\mathrm{sen} h.\theta\,\mathrm{sen}\varphi$$

$$+\Big(e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,(2t+2)\,\varphi+e^{\theta}\,\mathrm{sen}\,2t\varphi\Big)\cos h.\theta\cos\varphi\Big].$$

Sostituendo a e^{θ} e a $e^{-\theta}$ i loro valori in funzioni trigonometriche iperboliche, e osservando che si ha identicamente

$$(\cos h.\theta-\mathrm{sen}\,h.\theta)\Big(\cos h.\theta\cos(2t+2)\varphi\cos\varphi-\mathrm{sen}\,h.\theta\,\mathrm{sen}\,(2t+2)\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\Big)$$
$$+(\cos h.\theta+\mathrm{sen}\,h.\theta)\Big(\cos h.\theta\cos 2t\varphi\cos\varphi-\mathrm{sen}\,h.\theta\,\mathrm{sen}\,2t\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\Big)$$
$$=2(\cos^2 h.\theta-\mathrm{sen}^2\varphi)\cos(2t+1)\varphi,$$

$$(\cos h.\theta-\mathrm{sen}\,h.\theta)\Big(\mathrm{sen}\,h.\theta\cos(2t+2)\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi+\cos h.\theta\,\mathrm{sen}\,(2t+2)\varphi\cos\varphi\Big)$$
$$+(\cos h.\theta+\mathrm{sen}\,h.\theta)(\mathrm{sen}\,h.\theta\cos 2t\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi+\cos h.\theta\,\mathrm{sen}\,2t\varphi\cos\varphi)$$
$$=2(\cos^2 h.\theta-\mathrm{sen}^2\varphi)\,\mathrm{sen}\,(2t+1)\varphi,$$

e ponendo A_t in luogo di $\frac{2A_t}{b}$; le nostre equazioni si riducono alle seguenti

$$u=\sum_{t=0}^{t=\infty}A_t\,e^{-(2t+1)\theta}\cos(2t+1)\varphi \tag{11}$$

$$v=\sum_{t=0}^{t=\infty}A_t\,e^{-(2t+1)\theta}\,\mathrm{sen}\,(2t+1)\varphi \tag{12}$$

le quali, quadrate e sommate, daranno

$$V^2=\sum_{t=0}^{t=\infty}A_t^2\,e^{-2(2t+1)\theta}+2\sum_{t_1=1}^{t_1=\infty}\cos 2t_1\varphi\sum_{t=0}^{t=\infty}A_t A_{t+t_1}\,e^{-2(t+t_1+1)\theta}. \tag{13}$$

La seconda condizione è, che la pressione p sia eguale alla pressione p_0 dell'atmosfera nei punti della fessura; cioè per $x=0$, con y compreso tra $\pm b$ e zero: ossia per $\theta=0$ con φ qualunque, come è facile ricavar dalle (5).

Per questi valori, indicando con V_0 la velocità corrispondente, la (2) e la (13) danno

$$p_0 = c - \frac{V_0^2}{2}$$

$$V_0^2 = \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t^2 + 2 \sum_{t_1=1}^{t_1=\infty} \cos 2t_1 \varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t A_{t+t_1} ,$$

onde, posto per semplicità

(14) $$2(c - p_0) = D^2,$$

$$D^2 = \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t^2 + 2 \sum_{t_1=1}^{t_1=\infty} \cos 2t_1 \varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t A_{t+t_1} .$$

Da questa, che deve esser verificata qualunque sia φ, se ne deducono le seguenti

$$\sum_{t=0}^{t=\infty} A_t^2 = D^2 , \quad \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t A_{t+t_1} = 0 ,$$

e l'ultima deve esser verificata qualunque sia t_1.

Le equazioni ottenute non possono evidentemente esser sodisfatte, se non che quando siano eguali a zero tutti gli A, meno uno solo A_q; onde avremo

(15) $$A_q = D , \qquad A_{q+n} = 0$$

qualunque sia n, purchè differente da zero. — Per determinare l'arbitraria q, osserviamo che la (11) deve dare la portata P, che è dovuta soltanto alla componente normale al piano della fessura. Se s'indichi con z la distanza di un punto da una delle pareti alle quali è normale l'asse della fessura, e con c la distanza tra queste pareti; avremo

$$P = 2 \int_0^c \int_0^b u_0 \, dv \, dz ;$$

ma

$$dv \, dz = b \cos \varphi \, d\varphi \, dz ,$$

e, dalla (11) ridotta colle (15), e postovi $\theta = 0$ per avere i punti della fessura.

$$u_0 = D \cos (2q + 1) \varphi ;$$

quindi

$$P = 2Db \int_0^c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (2q + 1) \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, dz$$

$$= bcD \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos (2q + 2) \varphi + \cos 2q\varphi \right\} d\varphi .$$

Questo valore è eguale a zero per tutti i valori di q, fuori che per $q = 0$.

Ora, la portata non potendo esser nulla, perchè l'efflusso deve aver luogo, si dovrà aver necessariamente

$$q = 0. \tag{16}$$

La terza condizione dà la pressione p uguale a p_0 alla superficie superiore, per la quale $x = \mathbf{d}$ altezza del vaso, e (per la grandezza delle dimensioni del medesimo rispetto a b) θ talmente grande, che il quadrato di $e^{-\theta}$ risulta trascurabile, e quindi anche la velocità risultante V_d. Per lo che la (2) darà

$$p_0 = c - g\mathbf{d},$$

e eliminando tra questa e la (14) $c - p_0$, si otterrà

$$D^2 = 2g\mathbf{d}. \tag{17}$$

Sostituendo i valori dati dalle (15), (16) e (17) nelle (11), (12) e (13), queste si riducono alle seguenti

$$u = \sqrt{2g\mathbf{d}}\, e^{-\theta} \cos\varphi = \sqrt{2g\mathbf{d}} \frac{\sqrt{(b^2 - \nu^2)}}{\mu + \sqrt{(\mu^2 - b^2)}} \tag{18}$$

$$v = \sqrt{2g\mathbf{d}}\, e^{-\theta} \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{2g\mathbf{d}} \frac{\nu}{\mu + \sqrt{(\mu^2 - b^2)}} \tag{19}$$

$$V = \sqrt{2g\mathbf{d}}\, e^{-\theta} = \sqrt{2g\mathbf{d}} \frac{b}{\mu + \sqrt{(\mu^2 - b^2)}}. \tag{20}$$

Passiamo ora a dedurre da queste le principali circostanze del movimento:

1.° La (18) ci darà la portata P, la quale come abbiamo già veduto, sarà espressa da

$$P = 2bc\sqrt{2g\mathbf{d}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2bc\sqrt{2g\mathbf{d}}\, \frac{\pi}{4}\,.$$

Ora la quantità

$$\frac{P}{2bc\sqrt{2g\mathbf{d}}} = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854,$$

la quale esprime il rapporto della portata al prodotto dell'area della fessura per $\sqrt{2g\mathbf{d}}$, rappresenta quello che in Idraulica sperimentale si chiama coefficiente di efflusso. Dunque, *il coefficiente di efflusso è eguale al quarto del rapporto della circonferenza al diametro.*

I risultati ottenuti nel Gabinetto del prof. Pacinotti danno per valore medio del medesimo

0,7635.

Le dimensioni del vaso che ha servito all'esperienze, erano

Altezza . . . . $= 0^m,5836$
Lunghezza . . . . $= 0^m,3355$
Larghezza nel senso dell'asse della fessura $= 0^m,0555$
Larghezza della fessura . . . . $= 0^m,0013$.

La differenza tra il coefficiente di efflusso dato dalle mie formule, e quello ottenuto dalla esperienza, è di

$$0,02\,;$$

quantità ben piccola, dovuta principalmente alla adesione colle pareti della fessura delle molecole del liquido, e alla coesione di queste tra loro.

2.° La (18) e la (19) danno per $\nu = 0$

$$v = 0, \quad u = \frac{b\sqrt{2g\mathrm{d}}}{\mu + \sqrt{(\mu^2 - b^2)}}.$$

Quindi nel piano verticale che passa per l'asse la velocità orizzontale è nulla; e le velocità verticali, a una distanza per cui b^2 sia trascurabile rispetto a μ^2, sono in ragione inversa delle distanze $\sqrt{(\mu^2 - b^2)}$ dal fondo.

3.° La (20) ci mostra che la velocità risultante è funzione soltanto di μ. Dunque *le superficie di egual velocità sono cilindri retti; che hanno per basi delle ellissi, i fuochi delle quali sono nei bordi della fessura, e giacciono in piani normali all'asse della medesima.*

4.° Se le equazioni, che rappresentano le trajettorie delle molecole, si pongono sotto la forma

$$\lambda = \text{costante}\,;$$

dovrà aversi

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} u + \frac{\partial\lambda}{\partial y} v = 0\,,$$

la quale trasformata in coordinate ellittiche, diviene

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}(1 + e^{-2\theta}\cos 2\varphi) + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} e^{-2\theta} \operatorname{sen} 2\varphi = 0\,,$$

che ha per integrale

$$\lambda = \mathrm{F}\,(2\varphi + e^{-2\theta} \operatorname{sen} 2\varphi)\,,$$

indicando con F una funzione arbitraria.

Le equazioni delle trajettorie saranno dunque tutte comprese nella seguente

$$2\varphi + e^{-2\theta} \operatorname{sen} 2\varphi = \text{costante}.$$

Ora quanto più aumenta il valore di θ, tanto più diminuisce il secondo termine del primo membro, e la equazione si approssima a quella di una Iperbola coordinata

$$2\varphi = \text{costante},$$

la quale poi contemporaneamente si approssima a quella del suo asintoto rettilineo. Dunque *le traiettorie delle molecole in distanza dal fondo (e tanto minore quanto più piccolo è b) possono riguardarsi come rette convergenti all'asse della fessura e perpendicolari al medesimo.* Ciò che è pienamente confermato dalle esperienze mentovate di sopra.

5.° Se si dice α l'angolo che la tangente alla trajettoria fa coll'asse delle x, si ha

$$\tang \alpha = - \frac{\partial \lambda}{\partial x} : \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{v}{u} = \tang \varphi ;$$

e φ è l'angolo dell'asintoto rettilineo della Iperbola coordinata coll'asse delle x. Dunque *in qualunque punto della massa liquida, il moto è nella direzione dell'asintoto della Iperbola coordinata, che passa per quello.*

6.° Derivando nuovamente la equazione ottenuta, si ha

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi}{b \cos^2\varphi\,(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)},$$

onde avendo la derivata seconda di y lo stesso segno di $\operatorname{sen}\varphi$, e quindi della y medesima, *le trajettorie volgono la loro convessità verso l'asse verticale delle x in ogni loro punto.*

Le trajettorie e le velocità delle molecole nella vena esterna si otterrebbero col cangiar soltanto nelle formule ottenute, il segno a $\operatorname{sen} h.\theta$; ma non possono aversi corrispondenti alla realtà, perchè non abbiamo soddisfatto la condizione, che su tutta la superficie esterna della vena abbia luogo la pressione costante p_0, e perchè in quella, a piccolissima distanza dall'apertura, non esistendo più la continuità, come è noto, la equazione (1), e quindi tutte le nostre formule che da quella dipendono, non possono essere verificate. Ma l'andamento del liquido, dopo che è uscito del vaso, non influisce su quello che egli ha avuto già nell'interno, e quindi tutto ciò, che abbiamo sopra dedotto non rimane meno legittimamente stabilito per questa indeterminatezza.

AGGIUNTA

La trasformazione della equazione della continuità in coordinate ellittiche, della quale mi son valuto nella determinazione analitica dell'efflusso per una fessura, ha il vantaggio di non cangiar forma alla equazione medesima. Questa proprietà non appartiene però esclusivamente alle coordinate ellittiche, ma è comune a un numero infinito di sistemi di coordinate, le quali sono parametri di curve ortogonali e omofocali. Onde, con opportuna scelta di queste, si potranno trattare più casi, tra loro differentissimi, con una sola integrazione; e molte volte le formule dedotte in un caso si trasporteranno ad un altro, mutando soltanto il significato delle variabili. Il teo-

rema, che contiene la generalizzazione della mentovata trasformazione, è il seguente:

Se θ e φ siano funzioni di x e di y definite dal sistema di equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{z_1^2}{b^2 \cos^2 h.(\theta + m)} + \dfrac{z_2^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 h.(\theta + m)} = 1\,, \\[2mm] \dfrac{z_1^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 (\varphi + n)} - \dfrac{z_2^2}{b^2 \cos^2 (\varphi + n)} = 1\,, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial z_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial z_1^2}{\partial y^2} = \frac{\partial z_2^2}{\partial x^2} + \frac{\partial z_2^2}{\partial y^2}\,,\quad \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial z_2}{\partial y} = 0\,,$$

la trasformata in θ e φ della

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 0$$

è

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Kummer, nel vol. 35 del giornale di Crelle, ha dimostrato che le (1) e (2) rappresentano infiniti sistemi di curve ortogonali e omofocali. Onde, la (3) trasformata in funzione dei parametri θ e φ, darà come è noto,

$$(5)\qquad \frac{\partial \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}\dfrac{\partial k}{\partial \theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dfrac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}\dfrac{\partial h}{\partial \varphi}}{\partial \varphi} = 0\,,$$

dove

$$\mathrm{H}^2 = \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2}\,,\qquad \mathrm{H}'^2 = \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2}\,.$$

Dalle (1) ricavando i valori delle derivate parziali di θ e di φ, quadrandoli e sommandoli respettivamente, riducendo queste somme colle (2), e confrontandole, si ottiene

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}'.$$

Dunque la (5) si riduce alla (4), come volevamo dimostrare.

Corollario di questo teorema è la seguente proposizione:

Se il sistema di equazioni, che determina θ e φ in funzione di λ e ϱ, è

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{z_1^2}{b^2 \cos^2 h.(\theta + m)} + \dfrac{z_2^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 h.(\theta + m)} = 1\,, \\[2mm] \dfrac{z_1^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 (\varphi + n)} - \dfrac{z_2^2}{b^2 \cos^2 (\varphi + n)} = 1\,, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1^2}{\partial \varrho^2} + \operatorname{sen}^2\lambda \dfrac{\partial z_1^2}{\partial \lambda^2} = \dfrac{\partial z_2^2}{\partial \varrho^2} + \operatorname{sen}^2\lambda \dfrac{\partial z_2^2}{\partial \lambda^2}\,, \\[2mm] \dfrac{\partial z_1}{\partial \varrho}\dfrac{\partial z_2}{\partial \varrho} + \dfrac{\partial z_1}{\partial \lambda}\dfrac{\partial z_2}{\partial \lambda} \operatorname{sen}^2\lambda = 0\,, \end{cases}$$

trasformando in θ e φ la

$$(8)\qquad \frac{\partial \operatorname{sen}\lambda \frac{\partial k}{\partial \lambda}}{\operatorname{sen}\lambda\, \partial \lambda} + \frac{\partial^2 k}{\partial \varrho^2}\, \frac{1}{\operatorname{sen}^2\lambda} = 0\,.$$

si ottiene

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Infatti, se si pone $\chi = \log.\text{tang.}\, \frac{1}{2}\lambda$, le (6), (7) e (8) si cangiano rispettivamente nelle (1), (2) o (3), colla unica differenza di χ e ϱ in luogo di x e di y.

Se λ e ϱ sono le coordinate polari sferiche, cioè λ l'angolo di colatitudine, e ϱ quello di longitudine, la (8) è la equazione della continuità, nella quale si è supposto costante il raggio vettore, e le (1) e (2) rappresentano infiniti sistemi di curve sferiche ortogonali.

Ora, ecco due casi di efflusso per piccole aperture, nei quali si determina il movimento collo stesso calcolo che io ho instituito per la fessura.

Caso I. Siano le pareti, tra le quali si muove il liquido, un piano orizzontale, un piano verticale, e una superficie cilindrica, che abbia per asse la intersezione delle due pareti piane. Il piano orizzontale sia la faccia superiore. Una piccolissima interruzione, di larghezza e^{-b}, d'onde avrà luogo l'efflusso, che in questo caso sarà un getto di basso in alto, sia tra la faccia cilindrica e la parete orizzontale. Un'altra ne sia presso l'asse, dove insista una colonna di liquido, tenuta costantemente all'altezza $\mathbf{d}$.

Le condizioni, che debbon servire a determinare le funzioni arbitrarie dell'integrale, saranno: 1.° che, la velocità $u = \frac{\partial k}{\partial r}$, nella direzione del raggio della sezione retta della parete cilindrica, sia nulla per $r = 1$ qualunque sia l'angolo polare ψ; prendendo per unità il raggio della sezione medesima: 2.° che la pressione p sia uguale alla pressione p_0 dell'atmosfera per $\psi = 0$ con r compreso tra 1 e $1 - e^{-b}$: 3.° che p sia uguale a $p_0 + g\mathbf{d}$ per r piccolissimo.

Poniamo nelle (1) $m = 0$ e $n = -\frac{\pi}{2}$; e per integrali delle (2)

$$z_1 = \log.r\,, \qquad z_2 = \psi\,,$$

e serviamoci delle coordinate θ e φ che risultano dal sistema delle equazioni (1) e (2) così ridotto. In conseguenza del teorema sopra enunciato, la equazione della continuità sarà la (4), e le condizioni diverranno le due seguenti:

1.° Che $u = \frac{\partial k}{\partial (\log.r)}\, \frac{1}{r}$ sia uguale a zero, per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ con θ qualunque:

2.° Che $V^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial k^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial k^2}{\partial (\log.r)^2}\right)$ sia eguale a $2g\mathbf{d}$ per $\theta = 0$ con φ qualunque.

Ora, a cagione della piccolezza dell'apertura, potendosi riguardare r costante nell'intervallo compreso tra $r=1$ e $r=1-e^{-b}$, la equazione da integrarsi e quelle di condizione non differiscono da quelle che ho già trattato nel caso della fessura; quindi le formule dedotte in quel caso varranno anche per questo, e avremo

$$u=\frac{\sqrt{2g\mathbf{d}}}{r}\,e^{-\theta}\cos\varphi\,,\qquad v=\frac{\sqrt{2g\mathbf{d}}}{r}\,e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,$$

$$\mathrm{V}=\frac{\sqrt{2g\mathbf{d}}}{r}\,e^{-\theta}.$$

Dalle quali si ricaveranno in un modo affatto uguale tutte le circostanze del movimento.

Caso II. Le pareti, tra le quali scorre il liquido, siano un piano orizzontale, uno verticale e due superficie sferiche col centro comune sulla intersezione delle pareti piane, e che abbiano i raggi sì poco differenti, che si possa trascurare il movimento nella direzione dei medesimi. Nella parete inferiore, che supporremo essere il piano orizzontale, sia praticata un apertura terminata da due raggi, che facciano angoli piccolissimi, e uguali a b, col raggio normale alla intersezione delle pareti piane, e dagli archi di circolo massimo che i raggi intercettano sulle due sfere. Questo quadrilatero mistilineo sarà l'orifizio, onde avrà luogo l'efflusso. Un'altra apertura sia sulla sfera maggiore, presso l'intersezione di questa col suo diametro verticale, e ivi insista una colonna di liquido, che abbia la superficie libera a una distanza $\mathbf{d}$ dalla parete orizzontale.

In questo caso le condizioni alle quali deve esser soggetto il movimento, sono: 1.° che la velocità $u=\frac{\partial k}{\partial\lambda}$ nella direzione di λ sia nulla per $\lambda=\frac{\pi}{2}$ con ϱ compreso tra $\pm b$ e $\pm\infty$; riguardando il quadrante incomparabilmente grande rispetto a b: 2.° che p sia uguale a p_0 per $\lambda=\frac{\pi}{2}$ con ϱ compreso tra $\pm b$ e zero: 3.° che p sia uguale a $p_0+g(\mathbf{d}-1)$ per valori piccolissimi di λ; prendendo per unità il raggio della sfera maggiore.

Prendiamo nella (1) $m=0$ e $n=0$, per integrali della (2)

$$z_1=\chi=\log.\mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}\lambda\,,\quad z_2=\varrho\,,$$

per coordinate θ e φ, dati dalle equazioni così ridotte; per il corollario del nostro teorema, avremo che la equazione della continuità sarà la (9), e le condizioni diverranno le seguenti:

1.° che $u=\frac{\partial k}{\partial\chi}\frac{1}{\mathrm{sen}\,\lambda}$ sia nulla per $\varphi=\frac{\pi}{2}$ con θ qualunque:

2.° Che $\mathrm{V}^2=\frac{1}{\mathrm{sen}^2\lambda}\left(\frac{\partial k^2}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial k^2}{\partial\varrho^2}\right)$ sia uguale a $2g\mathbf{d}$, per $\theta=0$ con φ

qualunque; valori che danno sen $\lambda = 1$. Dunque avremo tutte le solite equazioni da sodisfare, e quindi i medesimi risultati, cioè

$$u = \frac{\sqrt{2g\mathbf{d}}}{\operatorname{sen}\lambda} e^{-\theta} \cos\varphi , \qquad v = \frac{\sqrt{2g\mathbf{d}}}{\operatorname{sen}\lambda} e^{-\theta} \operatorname{sen}\varphi ,$$

$$\mathrm{V} = \frac{\sqrt{2g\mathbf{d}}}{\operatorname{sen}\lambda} e^{-\theta} ;$$

onde, anche in questo caso, il movimento può riguardarsi completamente determinato.

II.

SOPRA LA RISOLUBILITÀ PER RADICALI DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE IRRIDUTTIBILI DI GRADO PRIMO

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. II, pp. 5-19. Roma, 1851).

Lagrange, il primo, dimostrò (nelle Memorie dell'Accademia di Berlino per gli anni 1770 e 1771) che le radici di una equazione algebrica

$$x^{\mu}+px^{\mu-1}+qx^{\mu-2}+\cdots+tx+u=0 \tag{1}$$

nella quale il grado μ è un numero primo, possono sempre essere date sotto la forma

$$x=-\frac{p}{\mu}+\sum_{n=0}^{n=\mu-1}\sqrt[\mu]{R_n}\,; \tag{2}$$

essendo

$$R_n=\frac{1}{\mu^{\mu}}\Big(\sum_{i=0}^{i=\mu-1}\alpha^{in}\,x_i\Big)^{\mu}, \tag{3}$$

e

$$\sum_{m=0}^{m=\mu-1}\alpha^{m}=0.$$

Lagrange dimostrò ancora che i $\mu-1$ valori di R sono radici di una equazione di grado $\mu-1$,

$$R^{\mu-1}+PR^{\mu-2}+QR^{\mu-3}+\cdots+SR+T=0\,; \tag{4}$$

nella quale i coefficienti $P, Q, \ldots\ldots, S$ e T possono sempre essere espressi razionalmente per quelli della (1) e per una radice P della equazione di grado $\nu=1.2.3\ldots.\mu-2$,

$$P^{\nu}+aP^{\nu-1}+bP^{\nu-2}+\cdots\cdot+rP+s=0\,, \tag{5}$$

dove $a, b, \ldots. r$, e s sono funzioni razionali di $p, q \ldots t, u$.

Abel trovò poi che, se la (1) è irriduttibile e risolvibile per radicali, la (4) deve necessariamente avere i suoi coefficienti funzioni razionali di quelli della (1); e quindi la (5) deve avere almeno una radice razionale: lo che sappiamo verificare sulle equazioni numeriche. Il ch. signor professore

Malmstén ha dimostrato questo teorema con tutto il rigore e la chiarezza desiderabile, in una Memoria inserita nel vol. 34 del giornale di Crelle.

Evaristo Galois, in una Memoria che si trova nel vol. XI del giornale di Liouville, ha posto le basi di una teoria generale sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili, e l'ha applicata in particolare a quelle di grado primo. Il teorema di Abel si trova in essa nuovamente stabilito, completato coll'inverso e trasformato in quest' altro: « affinchè una « equazione irriduttibile di grado primo sia risolubile per radicali, è *neces-* « *sario* e *sufficiente* che tutte le radici siano funzioni razionali di due qua- « lunque tra loro ». La profonda teoria, e la deduzione dalla medesima del teorema enunciato sono esposte però in un modo, per concisione esagerata, quasi inintelligibile. Ma il ch. sig. Serret, in una Nota del suo Trattato di Algebra superiore, ha annunziato, che il ch. sig. Liouville ha intenzione di pubblicare un giorno alcuni sviluppi, coi quali egli ha potuto render chiaro e completo il lavoro di Galois. Contuttociò, poichè Malmstén ha posto già la scienza in pieno possesso del teorema di Abel, io credo non sarà disconveniente nè inutile il dimostrare, valendosi di teorie già sviluppate nell'Algebra, come questo si può trasformare in quello di Galois; e richiamando l'attenzione sopra questo frutto, che il giovane geometra ebbe il tempo di ottenere, quasi unicamente, dalle sue profonde vedute, far voti che il celebre Liouville non privi più a lungo il pubblico dei risultati dello studio che ha fatto sulle medesime, e che le renderanno, non può dubitarsi, feconde di molto notevoli progressi nell'Algebra.

Lemma I. *Se si ritengono eguali gl'indici numerici congrui rispetto al modulo primo* μ, *ed è*

$$n' n \equiv 1 \ (\text{mod. } \mu),$$

si ha

$$\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^{in} x_i = \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{in'} ;$$

e quando n *prende tutti i valori interi inferiori a* μ, n' *li prende tutti anch' essa sebbene in ordine differente.*

I residui minimi delle quantità

$$n', 2n', 3n', \ldots, (\mu - 1) n'$$

comprendono, come è noto, tutti i numeri interi inferiori a μ, quando n' è un numero qualunque primo con μ; onde si può porre

$$\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^{in} x_i = \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^{in'n} x_{in'} ;$$

e poichè $n' n \equiv 1 \pmod{\mu}$, e quindi $in' n \equiv i \pmod{\mu}$, si avrà

$$\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^{in} x_i = \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{in'} .$$

Ora, sia ϱ una radice primitiva di μ, e

$$(\alpha) \qquad \varrho^k \equiv n$$
$$\qquad\qquad\qquad \pmod{\mu};$$
$$(\beta) \qquad \varrho^{k'} \equiv n'$$

moltiplicando l'una per l'altra queste congruenze, si ottiene

$$\varrho^{k+k'} \equiv n' n \equiv 1 \pmod{\mu},$$

e quindi

$$(\gamma) \qquad k + k' = \mu - 1.$$

Dalle (α), (γ) e (β) è facile dedurre che quando n prende tutti i valori interi inferiori a μ, tutti corrispondentemente li prendono ancora, quantunque in diverso ordine, le quantità k, k' e n'.

Lemma II. *Le permutazioni di* μ *lettere, che si ottengono in numero* $\mu(\mu-1)$ *da una sola colle sostituzioni* (¹), *che consistono nel cangiare alle lettere gl'indici* i *in* $ai+b$, *essendo* a *e* b *due numeri qualunque* $< \mu$, (escluso per a il valore zero), *le quali indicheremo col simbolo*

$$(\delta) \qquad \begin{pmatrix} x_i \\ x_{ai+b} \end{pmatrix}; \ (^2)$$

godono la proprietà, che due qualunque tra loro non possono avere più di una lettera allo stesso posto.

Supponiamo che la permutazione, dalla quale si deducono tutte le altre, abbia tutte le lettere nei posti rispettivamente indicati dai loro indici, e che quelle ottenute colla sostituzione enunciata, prendendo in essa per a e b i valori c e d, e c', d', abbiano eguali le lettere che sono nei posti h^{simo} e t^{simo}, avremo

$$(\varepsilon) \qquad \begin{aligned} ch + d &\equiv c' h + d' \\ ct + d &\equiv c' t + d' \end{aligned} \pmod{\mu};$$

dalle quali sottraendo,

$$(c - c')(h - t) \equiv 0 ,$$

(¹) Sui principî della teoria delle sostituzioni si possono consultare le lezioni XI e XIX del *Cours d'Algèbre supérieure* di Serret, Paris, 1849.

(²) Vedi i gruppi di permutazioni (F) e (G) negli esempî delle pagine 24 e 25.

e poichè $h-t<\mu$, e quindi primo con μ, si deduce

$$c-c'\equiv 0\,;$$

la quale, essendo c e $c'<\mu$, dà

$$c=c'$$

e sostituendo nelle (ε)

$$d=d'$$

Dunque due permutazioni qualunque ottenute colle sostituzioni (δ), le quali avessero due lettere allo stesso posto, le avrebbero tutte, e sarebbero identiche.

Lemma III. *Date μ lettere, essendo al solito μ numero primo, sopra le quali siano possibili soltanto le sostituzioni che non lasciano più di una lettera allo stesso posto; le permutazioni che si potranno ottenere colle medesime, saranno in numero di $\mu(\mu-1)$, e si dedurranno tutte da una sola colle sostituzioni* (δ), *le quali unicamente saranno possibili.*

Poichè in questo caso non si hanno due permutazioni che abbiano due lettere allo stesso posto, è evidente che non si potranno avere più di $\mu-1$ permutazioni, che abbiano una lettera, per es. x_0, in uno stesso posto; dunque, essendo μ i posti, non si potranno avere in tutte più di $\mu(\mu-1)$ permutazioni.

Vi saranno tra queste alcune, le quali non avranno nessuna lettera nello stesso posto. Infatti, prendiamo una permutazione P che abbia x_0 nel primo, e il gruppo G composto delle $\mu-1$, che hanno la stessa x_0 nel secondo. Le lettere differenti che potrà avere allo stesso posto la P con la G non potranno essere più di $\mu-2$; perchè non potrà avervi certamente la x_0 e quella che è nel 2.° posto. Due permutazioni delle G non potranno avere una stessa lettera allo stesso posto colla P; poichè in tal caso ne avrebbero un' altra tra loro oltre la x_0. Dunque, poichè le G sono in numero di $\mu-1$, una P' di esse dovrà rimanere senza nessuna lettera allo stesso posto colla P.

La sostituzione, mediante la quale si passerà dalla permutazione P alla P', sarà circolare dell'ordine μ. Poichè, se ciò non fosse (come può vedersi in una Memoria di Cauchy inserita nel Vol. X del Giornale della Scuola Politecnica), si passerebbe dall'una all'altra con una sostituzione, che sarebbe prodotto di più sostituzioni circolari degli ordini m, n, p ecc., tali che

$$m+n+p+\text{ec.}=\mu\,;$$

e due almeno delle quantità m, n, p ecc. dovrebbero esser disuguali; poichè la loro somma è un numero primo, e tutte >1, perchè le due permutazioni non hanno alcuna lettera allo stesso posto. Ora se $m>p$, e si ripete questa sostituzione p volte di seguito, p lettere torneranno nei medesimi posti che avevano nella prima permutazione, e m saranno ancora in posti differenti.

Onde la sostituzione sarebbe tale che darebbe luogo a due permutazioni differenti con p lettere allo stesso posto, lo che, essendo $p > 1$, è impossibile.

La sostituzione circolare dell'ordine μ, la quale abbiamo dimostrato dovere essere possibile, potrà ripetersi μ volte di seguito, e darà un gruppo di μ permutazioni, due qualunque delle quali non avranno alcuna lettera allo stesso posto, e che, prendendo convenientemente gl'indici e la prima permutazione, che è arbitraria, potrà essere il seguente

$$
\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l}
x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots\ldots, x_{\mu-1} \\
x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \ldots\ldots, x_0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{\mu-1}, \; x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots\ldots, x_{\mu-2},
\end{array} \right.
$$

nel quale si deducono tutte le permutazioni dalla prima, per mezzo della sostituzione

$$
(5) \qquad \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+c} \end{pmatrix},
$$

dando a c tutti i valori interi $< \mu$.

Colle sostituzioni (5) non otteniamo che μ permutazioni, quindi ne saranno possibili anche altre, che ora passiamo a determinare. Sia una di queste

$$
(6) \qquad \begin{pmatrix} x_k \\ x_{F(k)} \end{pmatrix}.
$$

Eseguiamola sopra tutte le permutazioni del gruppo (A), avremo il seguente

$$
\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{array}{l}
x_{F(0)}, \quad x_{F(1)}, \; x_{F(2)}, \ldots\ldots, x_{F(\mu-1)} \\
x_{F(1)}, \quad x_{F(2)}, \; x_{F(3)}, \ldots\ldots, x_{F(0)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{F(\mu-1)}, \; x_{F(0)}, \; x_{F(1)}, \ldots\ldots, x_{F(\mu-2)}
\end{array} \right.
$$

Sopra ognuna di queste facciamo le μ sostituzioni comprese nel simbolo (5), ed otterremo μ^2 permutazioni, la forma delle quali sarà

$$
x_{F(k)+h}, \quad x_{F(k+1)+h}, \quad x_{F(k+2)+h}, \ldots, x_{F(k+\mu-1)+h},
$$

dove k e h sono due numeri qualunque inferiori a μ, e possono essere anche eguali a zero.

Tra queste devono necessariamente alcune essere eguali, perchè le differenti abbiamo veduto non potere essere più di $\mu(\mu-1)$. Supponiamo eguali quelle che si hanno prendendo per k e h i valori α, β, e α', β'

$$
\begin{array}{l}
x_{F(\alpha)+\beta}, \quad x_{F(\alpha+1)+\beta}, \quad x_{F(\alpha+2)+\beta} \ldots, x_{F(\alpha+\mu-1)+\beta}, \\
x_{F(\alpha')+\beta'}, \quad x_{F(\alpha'+1)+\beta'}, \quad x_{F(\alpha'+2)+\beta'} \ldots, x_{F(\alpha'+\mu-1)+\beta}.
\end{array}
$$

Dovendo essere eguali i termini corrispondenti, avremo, qualunque sia n,

$$F(n+\alpha)+\beta = F(n+\alpha')+\beta';$$

e ponendo

$$i = n+\alpha', \quad \alpha-\alpha' = c, \quad \beta'-\beta = ac,$$

si otterrà la equazione

$$F(i+c) - F(i) = ac,$$

dalla quale è facile dedurne

$$F(i) = ai + b.$$

La (6), sostituendovi questo valore, diviene

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} x_i \\ x_{ai+b} \end{pmatrix};$$

e questa, che comprende anche la (5), contiene tutte le sostituzioni possibili sulle μ lettere, e per mezzo di essa si dedurranno tutte le permutazioni da una sola; come volevamo dimostrare. Questa e la proposizione precedente sono dovute a Galois, che si è servito di una senza dimostrarla, dell'altra con un abbozzo di dimostrazione.

Lemma IV. *Se la equazione algebrica*

$$F(x) = 0,$$

che non contiene nessuna delle radici $r, r' \ldots r^{(n)}$ *di una equazione irriduttibile* $F(r)=0$, *ha per radice* $x_1 = \varphi(r)$; *avrà anche* $x_n = \varphi(r^{(n)})$.

Malmsten ha dimostrato questa proposizione, nel caso in cui r sia radice di una equazione binomia di grado primo, cioè un radicale, nel modo seguente.

Poichè $\varphi(r)$ è radice di $F(x)=0$, si avrà identicamente

$$F(x) = \left[x - \varphi(r)\right] \psi(x).$$

Cangiando r in $r^{(n)}$, $F(x)$ che non contiene r riman la stessa; onde si avrà ancora

$$F(x) = \left[x - \varphi(r^{(n)})\right] \psi_n(x),$$

e $\varphi(r^{(n)})$ radice, come volevamo dimostrare.

Teorema I. *Affinchè una equazione algebrica irriduttibile di grado primo sia risolubile per radicali, è necessario che tutte le radici siano funzioni razionali di due qualunque tra loro.*

Il Teorema di Abel stabilisce per condizione necessaria alla risolubilità per radicali della equazione irriduttibile (1); che i coefficienti della ausiliaria (4) siano funzioni razionali dei coefficienti della (1), e quindi invariabili per qualunque sostituzione che si eseguisca sulle radici x_i della medesima; ma essi sono anche funzioni simmetriche delle R_n date per le x_i dalla (3):

dunque le sostituzioni possibili sulle x_i non dovranno cangiare le funzioni simmetriche delle R_n, e saranno soltanto quelle, che, o lasciano invariabili le R_n, o le convertono una nell'altra. Ora, poichè per il Lemma I, alla (3) si può dar la forma

$$R_n = \frac{1}{\mu^\mu}\left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{in}\right)^\mu; \tag{8}$$

le sostituzioni che lasciano invariabili le R_n sono, come è noto, le circolari

$$\binom{x_i}{x_{i+b}},$$

quelle che convertono le R_n una nell'altra sono evidentemente

$$\binom{x_i}{x_{ai}};$$

onde tutte le sostituzioni possibili saranno comprese nel simbolo

$$\binom{x_i}{x_{ai+b}}:$$

e quindi, per il Lemma II, non potranno lasciare più che una lettera allo stesso posto. Dunque tenendo ferme due radici, per esempio x_a e x_b, le altre dovranno risultar completamente determinate, e non potranno permutarsi tra loro. Affinchè questo avvenga, dovranno esser tutte funzioni razionali delle due date; razionali, poichè se contenessero anche una radice r di una equazione irriduttibile, per il Lemma IV, sostituendo a r le altre radici della stessa equazione, senza cangiare x_a e x_b, si permuterebbero tra loro le radici della proposta.

Teorema II. *Se tutte le radici di una equazione sono funzioni razionali di due qualunque tra loro, la equazione medesima è risolubile per radicali.*

Egli è evidente che, essendo tutte le radici funzioni razionali di due qualunque tra loro, potranno eseguirsi sulle medesime soltanto le sostituzioni che non lasciano più di una lettera allo stesso posto, e che per il Lemma III, sono tutte comprese nel simbolo

$$\binom{x_i}{x_{ai+b}}; \tag{9}$$

le quali lasciano invariabili le funzioni simmetriche delle R_n. Dunque i coefficienti della (4) saranno invariabili per tutte le sostituzioni possibili sulle radici della proposta, e saranno funzioni simmetriche di queste, e quindi razionali dei coefficienti: una condizione necessaria alla risolubilità per radicali della (1) è quindi adempita; ma dimostriamo che avrà luogo di fatto questa risoluzione.

Alla serie dei numeri naturali inferiori a μ sostituiamo, per indici di R nella (8), la serie delle potenze pure inferiori a μ di una radice primitiva ϱ del numero primo μ, e poniamo $R_{\varrho^k} = A_k$; avremo

$$A_k = \frac{1}{\mu^\mu}\Big(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i\varrho^k}\Big)^\mu.$$

Le sostituzioni possibili sulle x sono unicamente quelle comprese nel simbolo (7), il quale ponendo

$$\begin{aligned} i &\equiv h\varrho^k \\ a &\equiv \varrho^c \end{aligned} \quad (\text{mod. } \mu),$$

si trasforma nel seguente

$$\begin{pmatrix} x_{h\varrho^k} \\ x_{h\varrho^{k+c}+b} \end{pmatrix};$$

e a queste corrispondono per le radici A_k della (4), le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} A_k \\ A_{k+c} \end{pmatrix}.$$

Dunque sulle $\mu - 1$ radici della (4) sono possibili soltanto le sostituzioni circolari dell'ordine $\mu - 1$, e quindi la medesima è risolubile per radicali col metodo di Gauss per le equazioni binomie ([1]). Dunque le x date dalla (2) in funzione delle radici della (4) saranno esprimibili per radicali, come volevamo dimostrare.

Esempi

1.° Se $\mu = 3$ tutte le sostituzioni possibili non lasciano più di una lettera allo stesso punto, e sono comprese nel simbolo (7);

$$(\text{F}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_i \\ x_i \end{pmatrix};\ x_0,\ x_1,\ x_2;\ \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix};\ x_1,\ x_2,\ x_0;\ \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+2} \end{pmatrix};\ x_2,\ x_0,\ x_1; \\ \begin{pmatrix} x_i \\ x_{2i} \end{pmatrix};\ x_0,\ x_2,\ x_1;\ \begin{pmatrix} x_i \\ x_{2i+1} \end{pmatrix};\ x_1,\ x_0,\ x_2;\ \begin{pmatrix} x_i \\ x_{2i+2} \end{pmatrix};\ x_2,\ x_1,\ x_0. \end{array} \right.$$

Dunque la condizione necessaria e sufficiente alla risolubilità per radicali, cioè che una radice sia funzione razionale di due qualunque delle altre, come si può vedere anche direttamente dalla equazione stessa, è sempre soddisfatta; e le equazioni di 3° grado si possono sempre risolvere come è già noto da molto tempo.

([1]) Vedi Serret. *Cours d'Alg. sup.*, Lez. XXVII.

2.° Per $\mu = 5$ le permutazioni che non hanno più di una lettera allo stesso posto tra loro, sono le 20 seguenti

$$
(G)\left\{\begin{array}{llll}
\begin{pmatrix} x_i \\ x_i \end{pmatrix}; & x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}; & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_0; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+2} \end{pmatrix}; & x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_0,\ x_1; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+3} \end{pmatrix}; & x_3,\ x_4,\ x_0,\ x_1,\ x_2; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+4} \end{pmatrix}; & x_4,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{2i} \end{pmatrix}; & x_0,\ x_2,\ x_4,\ x_1,\ x_3; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{2i+1} \end{pmatrix}; & x_1,\ x_3,\ x_0,\ x_2,\ x_4; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{2i+2} \end{pmatrix}; & x_2,\ x_4,\ x_1,\ x_3,\ x_0; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{2i+3} \end{pmatrix}; & x_3,\ x_0,\ x_2,\ x_4,\ x_1; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{2i+4} \end{pmatrix}; & x_4,\ x_1,\ x_3,\ x_0,\ x_2; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{3i} \end{pmatrix}; & x_0,\ x_3,\ x_1,\ x_4,\ x_2; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{3i+1} \end{pmatrix}; & x_1,\ x_4,\ x_2,\ x_0,\ x_3; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{3i+2} \end{pmatrix}; & x_2,\ x_0,\ x_3,\ x_1,\ x_4; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{3i+3} \end{pmatrix}; & x_3,\ x_1,\ x_4,\ x_2,\ x_0; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{3i+4} \end{pmatrix}; & x_4,\ x_2,\ x_0,\ x_3,\ x_1; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{4i} \end{pmatrix}; & x_0,\ x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{4i+1} \end{pmatrix}; & x_1,\ x_0,\ x_4,\ x_3,\ x_2; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{4i+2} \end{pmatrix}; & x_2,\ x_1,\ x_0,\ x_4,\ x_3; \\
\begin{pmatrix} x_i \\ x_{4i+3} \end{pmatrix}; & x_3,\ x_2,\ x_1,\ x_0,\ x_4; & \begin{pmatrix} x_i \\ x_{4i+4} \end{pmatrix}; & x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1,\ x_0.
\end{array}\right.
$$

Il numero delle permutazioni possibili in generale è di 120; dunque potranno eseguirsi sulle radici anche altre sostituzioni, oltre quelle comprese nel simbolo (7) (*); e non è soddisfatta la condizione necessaria alla risolubilità per radicali. Lo stesso è facile a osservarsi per i gradi superiori. Dunque le equazioni irriducibili di grado primo superiore a tre non possono risolversi per radicali, come il primo trovò il celebre Ruffini.

(*) Le altre sostituzioni possibili, per mezzo delle quali si ottengono le 100 permutazioni, sono tutte quante comprese nel simbolo

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{(ai+b)^3+c} \end{pmatrix},$$

dove si può prendere per a, b, e c tutti i valori intieri inferiori a 5 (escluso per a lo zero).

Indichiamo con

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{f(i)} \end{pmatrix}$$

una sostituzione per mezzo della quale si passa dalla prima delle (G) a una delle altre 100. Eseguiamola sopra le 20 permutazioni del gruppo (G); ne avremo altrettante, il tipo delle quali sarà

$$x_{f(b)}\,,\quad x_{f(a+b)}\,,\quad x_{f(2a+b)}\,,\quad x_{f(3a+b)}\,,\quad x_{f(4a+b)}\,.$$

Sopra ognuna di queste facciamo tutte le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{ai+b} \end{pmatrix};$$

Si otterranno 20^2 permutazioni, che avranno per forma tipica

$$x_{\alpha f(b)+\beta}\,,\quad x_{\alpha f(a+b)+\beta}\,,\quad x_{\alpha f(2a+b)+\beta}\,,\quad x_{\alpha f(3a+b)+\beta}\,,\quad x_{\alpha f(4a+b)+\beta}\,.$$

Ora, tutte le differenti permutazioni possibili con 5 lettere non possono essere più di 120; dunque alcune delle 20^2 così ottenute saranno identiche, e per alcuni valori delle costanti $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1$ e d_1 dovrà esser verificata, qualunque sia i, la equazione

$$cf(ai+b)+d=c_1 f(a_1 i+b_1)+d_1\,. \tag{1}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} a_1 i+b_1 &= \mathrm{F}(\omega+1) \\ ai+b &= \mathrm{F}(\omega)\,; \end{aligned} \tag{2}$$

eliminando la i si ha

$$a\mathrm{F}(\omega+1)-a_1\mathrm{F}(\omega)=b_1 a-ba_1\,,$$

dalla quale, come è noto, si ricava

$$\mathrm{F}(\omega)=\mathrm{C}\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\omega}+\frac{b_1 a-ba_1}{a-a_1}\,,$$

essendo C una costante arbitraria.

La (1), sostituendovi i valori (2), diviene

$$c_1 f\big(\mathrm{F}(\omega)+1\big)-cf\big(\mathrm{F}(\omega)\big)=d-d_1\,,$$

la quale ha per integrale

$$f\big((\mathrm{F}\omega)\big)=\mathrm{D}\left(\frac{c}{c_1}\right)^{\omega}+\frac{d-d_1}{c_1-c}\,;$$

dove D è una costante arbitraria.

Alle quantità a, a_1, c e c_1 indipendenti da i possono sostituirsi le potenze di ϱ radice primitiva di 5 delle quali sono residui; onde essendo

$$a_1\equiv\varrho^{h_1}\,,\quad a\equiv\varrho^{h}\,,\quad c_1\equiv\varrho^{k_1}\,,\quad c\equiv\varrho^{k}$$

$$h_1-h=\alpha\,,\quad k-k_1=\beta$$

avremo

$$\mathrm{F}(\omega)+\frac{ba_1-b_1 a}{a-a_1}=(ai+b)+\frac{ba_1-b_1 a}{a-a_1}=\mathrm{C}\varrho^{\alpha\omega}$$

$$f\big(\mathrm{F}(\omega)\big)-\frac{d-d_1}{c_1-c}=f(ai+b)-\frac{d-d_1}{c_1-c}=\mathrm{D}\varrho^{\beta\omega}.$$

Eliminando ϱ^{ω}, si ottiene

$$f(ai+b)=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}^{\frac{\beta}{\alpha}}}\left(ai+b+\frac{ba_1-b_1a}{a-a_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{d-d_1}{c_1-c}\,.$$

Pongo

$$ai+b=i\,,\quad \frac{\mathrm{D}^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\mathrm{C}}=a\,,\quad \frac{\mathrm{D}^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\mathrm{C}}\left(\frac{ba_1-b_1a}{a-a_1}\right)=b\,,$$
$$\frac{d-d_1}{c_1-c}=c\,,\quad \frac{\beta}{\alpha}=\lambda\,,$$

ed ho finalmente

$$f(i)=(ai+b)^{\lambda}+c.$$

Resta per determinar l'esponente λ la condizione, che $f(i)$ non abbia due valori eguali, per valori differenti di i. Se questa condizione non fosse verificata, si avrebbe una stessa lettera in due posti di una medesima permutazione; lo che non può essere.

Dovrà essere λ un numero primo e inferiore a $\mu-1=4$. Infatti, supponiamo $\mu-1$ multiplo di λ, avremo

$$\mu-1=\lambda\delta\,;$$

e si troveranno due valori di i, i_1 e i_2 per i quali sia

$$\left.\begin{aligned}\varrho^{\delta}&\equiv ai_1+b\\ \varrho^{\mu-1}&\equiv ai_2+b\end{aligned}\right\}\ (\text{mod. }\mu)$$

onde

$$f(i_1)=(ai_1+b)^{\lambda}+c=\varrho^{\delta\lambda}+c$$
$$f(i_2)=(ai_2+b)^{\lambda}+c=\varrho^{(\mu-1)\lambda}+c$$

ma

$$\varrho^{\delta\lambda}=\varrho^{\mu-1}\equiv 1\,,\quad \varrho^{(\mu-1)\lambda}\equiv 1\,;$$

quindi

$$f(i_1)=f(i_2)=1+c$$

e i_1 e i_2 numeri differenti, lo che è impossibile. Dunque λ dovrà essere primo e inferiore a 4; e potrà essere soltanto eguale a 1, o a 3; e *le sostituzioni possibili su* 5 *lettere saranno tutte comprese nei due simboli*

$$\begin{pmatrix}x_i\\ x_{ai+b}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_i\\ x_{(ai+b)^3+c}\end{pmatrix}.$$

III.

UN TEOREMA SULLE RISOLVENTI DELLE EQUAZIONI RISOLUBILI PER RADICALI

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. II. pp. 102-103. Roma, 1851).

Le risolventi lagrangiane delle equazioni algebriche di grado μ primo risolubili per radicali hanno sempre, oltre il fattore razionale di primo grado scoperto da Abel, anche tanti fattori razionali di grado μ, quanti sono i numeri primi inferiori a $\mu - 1$, le radici dei quali sono esprimibili per radicali.

Nella Nota inserita alla pag. 5 [1] del fascicolo di gennaio di questo anno ho dimostrato già, che una equazione di grado μ primo è risolubile per radicali soltanto, quando non sono possibili sulle radici della medesima altre sostituzioni che quelle comprese nel simbolo

$$(\alpha) \qquad \begin{pmatrix} x_i \\ x_{ai+b} \end{pmatrix};$$

e quindi, che una delle radici della risolvente lagrangiana

$$(1) \qquad \mathrm{P} = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i\rho^h} \right)^{\mu}$$

è invariabile per tutte le sostituzioni possibili, e perciò esprimibile razionalmente per i coefficienti della proposta. Ora, se si eseguiscano sulla (1) le sostituzioni

$$(\beta) \qquad \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i^\lambda + c} \end{pmatrix};$$

dove λ è un numero primo con $\mu - 1$, avremo altre μ radici della risolvente

$$\mathrm{P}_0 = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i^\lambda \rho^{h\lambda}} \right)^{\mu} = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i^\lambda \rho^h} \right)^{\mu},$$

$$\mathrm{P}_1 = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i^\lambda \rho^{h\lambda}+1} \right)^{\mu} = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i^\lambda \rho^h+1} \right)^{\mu},$$

$$\mathrm{P}_2 = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i^\lambda \rho^{h\lambda}+2} \right)^{\mu} = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i^\lambda \rho^h+2} \right)^{\mu},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{P}_{\mu-1} = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i^\lambda \rho^{h\lambda}+\mu-1} \right)^{\mu} = \sum_{h=1}^{h=\mu-1} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i^\lambda \rho^h+\mu-1} \right)^{\mu}.$$

---

[1] V. p. 17 di questo volume.

Qui è facile a vedersi che a ogni sostituzione (α) sulle x_i corrisponde sulle P_i una sostituzione

$$(\gamma) \qquad \begin{pmatrix} P_i \\ P_{ai+b} \end{pmatrix}.$$

Dunque tutte le sostituzioni possibili sulle radici della proposta o lasciano invariabili le P_i o le convertono una nell'altra, e quindi le funzioni simmetriche delle medesime saranno esprimibili razionalmente per i coefficienti della proposta; e, poichè sulle P_i non sono possibili che le sostituzioni che derivano dalle (α), e perciò le sole (γ), la equazione che ha per radici le P_i, e che è un fattore della risolvente, avrà i coefficienti razionali e sarà risolubile per radicali.

Se si osserva che λ può essere eguale a tutti i numeri inferiori e primi a $\mu - 1$, è evidente che il teorema è completamente dimostrato.

Il sig. Eduardo Luther, in una sua Memoria inserita nel tomo 34 del Giornale di Crelle, dimostrò con altro metodo che la risolvente delle equazioni di 5° grado risolubili per radicali è sempre decomponibile in due fattori razionali, uno di primo e l'altro di 5° grado; proprietà che è un caso particolare del teorema qui dimostrato.

IV.

ESTRATTO DI UNA LETTERA AL PROF. B. TORTOLINI

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. II, pp. 246-247, Roma, 1851).

Pistoia, li 4 maggio 1851.

Sig. Professore,

. . . . Ora sto scrivendo una Memoria: « *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* ». I problemi che ne fanno soggetto sono i seguenti: « *Determinare in generale le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una equazione irriduttibile qualunque sia risolubile* 1°. *per radicali;* 2°. *per radici di equazioni di grado inferiore;* 3°. *quando una equazione non sia risolubile nè per radicali, nè per radici di equazioni di grado inferiore, determinare le equazioni che definiscono i più semplici irrazionali, per i quali possano esprimersi le radici della proposta* ». Sulle tracce poche e interrotte lasciate da quel profondo ingegno di Galois, e che si trovano nei frammenti pubblicati da Liouville nel vol. XI del suo giornale, ho risoluto completamente il primo; e avendo già nella mia prima Nota dimostrato quel che riguarda le equazioni di grado primo, ora sviluppo in particolare quel che riguarda l'equazioni il grado delle quali è il prodotto di più numeri primi. Già Abel era giunto in parte per altra via alla soluzione di questo importante problema; ma si è trovato ne' suoi scritti poco più che l'enunciato de' teoremi; la morte avendo rapito anche lui troppo presto alle scienze. Ho risoluto anche il secondo problema. Ma quanto al terzo, l'ho soltanto toccato un poco. Bisogna però riflettere che esso contiene in sè, direi quasi, tutta una scienza nuova, e la sua completa soluzione attende probabilmente nuove scoperte nella *Teoria de' numeri*, e specialmente nella *Teoria della riduzione delle forme*; e già Eisenstein nel vol. 27 del Crelle ne fece vedere l'utilità per le formule di risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi, e anche Hermite ha palesato in una lettera a Jacobi, ultimamente pubblicata nel Crelle, vol. 40, fasc. 4°, di nutrire speranza di utilità nell'applicazione al problema algebrico della *Teoria delle forme* che egli coltiva con tanto successo.

V.

SULLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. III, pp. 49-115, Roma, 1852).

Nella presente Memoria ho preso a trattare colla massima generalità i problemi relativi alla risolubilità delle equazioni algebriche, che si proposero i due sommi geometri Abel e Galois, e intorno ai quali, per la morte che li rapì ambedue alla scienza ancor giovanissimi, non poterono lasciare altro che poche traccie della via tenuta per raggiunger lo scopo, e molti dei più importanti teoremi, ma privi in gran parte delle loro dimostrazioni.

Dopo che Paolo Ruffini di Modena ebbe dimostrata l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di grado superiore al quarto in generale, Abel il primo si propose di determinare la condizioni da verificarsi, affinchè una equazione di grado qualunque fosse in particolare risolubile per radicali. Il metodo da lui seguito in queste ardue ricerche si trova in parte abbozzato in un frammento di memoria ritrovato tra le sue carte, e pubblicato nella collezione delle sue opere fatta per cura del professore Holmboe. I chiarissimi sigg. Malmstén e Luther hanno sviluppato, ed esteso nel Giornale di Crelle questo bel metodo, per applicarlo, il primo, alla dimostrazione del teorema di Abel sulla risolubilità delle equazioni di grado primo, il secondo alla determinazione dei criteri di risolubilità delle equazioni di 5° e 6° grado.

Galois quasi contemporaneamente all'Abel meditava sullo stesso problema e 17 mesi dopo la morte di questi, presentava all'Accademia delle Scienze di Parigi una memoria dove esponeva una nuova e profonda teoria da lui creata per risolvere il problema preso sotto un punto di vista più generale, e l'applicava alla dimostrazione di un teorema sulla risolubilità per radicali delle equazioni di grado primo, il quale non è, come io ho già fatto conoscere [1], che una trasformazione di quello di Abel, poi dimostrato da Malmstén, e del quale egli non poteva aver cognizione. Poisson e Lacroix eletti a riferire sulla medesima la ritennero quasi inintelligibile, e rimproverarono al giovine autore la mancanza della chiarezza.

---

[1] Vedi: *Annali di scienze mat. e fis.*, compilati da B. Tortolini, t. II, pp. 5-19: (od anche pp. 17-27 di questo volume).

Il chiarissimo sig. Liouville, pubblicando questa Memoria, e altri frammenti sullo stesso soggetto ritrovati dopo la morte di Galois, annunziò di esser giunto, dopo aver colmato alcune leggiere lacune, a riconoscere l'esattezza intera del metodo col quale è provato in particolare il rammentato teorema, e fece conoscere la intenzione che egli aveva di pubblicare un Commentario per completare certi passaggi, e rischiarare certi punti delicati di quella Memoria.

Le condizioni di risolubilità per radicali delle equazioni di grado primo possono pertanto ritenersi determinate e dimostrate con ambedue i metodi dei due sommi geometri. Rimanevano però fin ora da determinarsi quelle relative alle equazioni di grado non primo, molte delle quali trovansi annunziate da essi sotto forme differenti, può dirsi senza dimostrazione, nei frammenti postumi. Riempire questa lacuna è l'oggetto principale del mio lavoro.

Io ho istituita con qualche novità una teoria delle sostituzioni, e per mezzo di essa ho potuto dedurre con facilità e rigore dalla bella teoria del Galois che ho sviluppata ed estesa, la determinazione delle condizioni di risolubilità per radicali, delle equazioni di un grado qualunque, e dimostrare tutti i teoremi relativi, tanto sotto la forma nella quale li annunziò Abel, quanto sotto quella colla quale li annunziò Galois, e aggiungerne alcuni nuovi per completare la soluzione del problema.

Le condizioni generali necessarie e sufficienti alla risolubilità di una equazione di grado qualunque non le ho date soltanto per il caso in cui vogliasi una risoluzione per radicali, ma anche per quello in cui ci contentiamo di averla con radici di altre equazioni algebriche; e ho accennato un principio di classificazione degl'irrazionali, il quale spero di potere sviluppare in altro lavoro.

Ho divisa la Memoria in due parti. Nella prima ho esposta la teoria delle sostituzioni: nella seconda la determinazione delle condizioni di risolubilità delle equazioni algebriche.

PARTE PRIMA

CAPITOLO PRIMO

DELLE SOSTITUZIONI

I.

Principi del calcolo delle sostituzioni.

1. Una *sostituzione* è la operazione mediante la quale si passa da una ad un'altra permutazione di più quantità.

Ci serviremo di una sola lettera x con diversi indici i posti al basso per distinguer tra loro tutte le quantità che entrano nelle permutazioni. Perciò potremo ritenere che ogni sostituzione si eseguisca sostituendo a tutti gli apici i una funzione $\varphi(i)$ dei medesimi; e la indicheremo colla notazione

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{\varphi(i)} \end{pmatrix} .$$

La funzione $\varphi(i)$ dovrà godere la proprietà di prendere per tutti i valori successivi di i, li stessi valori che prende i, ma in ordine differente.

2. Adotteremo diversi sistemi di apici secondo il numero n delle lettere.

1°. Se

$$n = p\,,$$

e p numero primo, prenderemo per apici le p radici della congruenza

$$i^p \equiv i \,(\text{mod. } p)\,,$$

le quali saranno i numeri naturali da zero a $p-1$; poichè riguarderemo eguale a zero la parte di ogni numero multipla di p.

2°. Quando sia

$$n = p^\nu\,,$$

p un numero primo e ν un numero qualunque, ci serviremo per apici, delle p^ν radici della congruenza

(1) $$i^{p^\nu} \equiv i \,(\text{mod.}\, p).$$

Galois ha osservato che, se

$$\mathrm{F}(t) \equiv 0 \,(\text{mod. } p)$$

è una congruenza irriduttibile di grado ν, e t una radice incommensurabile della medesima; tutte le radici della (1) sono date dalla espressione

$$i = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \ldots + a_{\nu-1}\, t^{\nu-1}\,;$$

dove $a_0\,, a_1 \ldots . a_{\nu-1}$ prendono successivamente tutti i valori interi minori

di p, e si riguardano eguali a zero le quantità multiple di p [1]. Le proprietà principali di questa specie di numeri complessi sono state poi dimostrate con molta chiarezza e rigore dal sig. Schönemann in una Memoria inserita nel tomo 31 del giornal di Crelle, intitolata: *Grundzüge einer allgemeiner Theorie von höhern Congruenzen.*

3. Se

$$n = p^{\nu} q^{\mu} r^{\sigma} \ldots ,$$

e $p, q, r, \ldots$ numeri primi, e $\nu, \mu, \sigma, \ldots$ qualunque, distingueremo le quantità con più apici per ciascuna lettera, i quali siano della natura dei precedenti, cioè radici delle congruenze

$$k^{p^{\nu}} \equiv k \text{ (mod. } p), \quad h^{q^{\mu}} \equiv h \text{ (mod. } q), \quad l^{r^{\sigma}} \equiv l \text{ (mod. } r), \ldots\ldots$$

Per brevità, in questa prima parte, indicheremo le sostituzioni col semplice segno delle funzioni degli apici che debbono sostituirsi ai medesimi per eseguirle, servendoci per il segno di funzione, sempre di lettere greche. Così scriveremo φ in luogo di $\begin{pmatrix} x_i \\ x_{\varphi(i)} \end{pmatrix}$.

4. Le operazioni successive di più sostituzioni $\theta_0\,\theta_1\,\theta_2 \ldots \theta_{n-1}$ equivalgono a una sola sostituzione φ che rappresenteremo, come il primo fece Cauchy [2], col prodotto di quelle:

$$\varphi = \theta_0\,\theta_1\,\theta_2 \ldots \theta_{n-1} ;$$

disponendo i fattori nell'ordine col quale sono state eseguite le rispettive sostituzioni.

Se fosse

$$\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 \ldots = \theta_{n-1} ,$$

si avrebbe

$$\varphi = \theta^n .$$

5. Se θ è una sostituzione circolare sopra p lettere, ripetuta p volte riprodurrà la permutazione d'onde siamo partiti; perciò si avrà la stessa permutazione eseguendola a o b volte, quando sia

$$a \equiv b \text{ (mod. } p),$$

e si potrà porre

$$\theta^{mp+a} = \theta^a :$$

onde si dovrà stabilire

$$\theta^p = 1 .$$

---

[1] Vedi: *Journal de Liouville*, t. XI, p. 398; ovvero, *Bulletin de Férussac*, t. XIII, p. 428.

[2] Vedi: *Journal de l'École Polytechnique*, t. X.

6. Ogni sostituzione, che non è circolare sopra un certo numero di lettere, equivale a più sostituzioni circolari effettuate sopra lettere differenti, e quindi con un ordine qualunque [1].

Siano $\varphi_0\, \varphi_1 \ldots . \varphi_{m-1}$ queste sostituzioni circolari, avremo

$$\theta = \varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_{m-1}$$

e ripetendola n volte, poichè è indifferente l'ordine con cui si eseguiscono le sostituzioni su lettere differenti, si otterrà

$$\theta^n = \varphi^n{}_0\, \varphi^n{}_1\, \varphi^n{}_2 \ldots \varphi^n{}_{m-1} \; .$$

Affinchè $\theta^n = 1$ è evidente che dovranno esser soddisfatte le seguenti equazioni

$$\varphi^n{}_0 = 1\, ,\, \varphi^n{}_1 = 1\, ,\, \varphi^n{}_2 = 1\, , \ldots \varphi^n{}_{m-1} = 1 \; .$$

Se $p_0\, p_1 \ldots p_{m-1}$ sono i numeri delle lettere sopra le quali rispettivamente sono eseguite le sostituzioni $\varphi_0\, \varphi_1 \ldots . \varphi_{m-1}$, queste equazioni non potranno esser soddisfatte a meno che n non sia divisibile per $p_0\, , p_1\, , \ldots . p_{m-1}$.

7. Chiameremo *ordine* di una sostituzione il numero che indica quante permutazioni differenti si possono ottenere eseguendola più volte successive, e che è la minima potenza della sostituzione, che dà per risultato l'unità. Ciò che si è stabilito nei due paragrafi precedenti dà i seguenti teoremi:

1°. *Le potenze di una sostituzione, gli esponenti delle quali sono congrui rispetto all'ordine, sono eguali tra loro.*

2°. *L'ordine di una sostituzione circolare su* p *lettere è eguale a* p.

3°. *L'ordine di una sostituzione qualunque è eguale al minimo divisibile per tutti gli ordini delle sostituzioni circolari sopra lettere differenti, delle quali è il prodotto.*

4°. *Se il numero* p *delle lettere è primo, ogni sostituzione di* p^esimo^ *ordine sarà circolare su tutte le lettere.*

5°. *Una sostituzione di ordine primo* p, *o è circolare su* p *lettere, o è il prodotto di più circolari su* p *lettere differenti ciascuna.*

8. La sostituzione mediante la quale dalla permutazione ottenuta colla θ^m, si torna a quella d'onde siamo partiti è θ^{p-m}; se p è l'ordine di θ. Ora poichè $\theta^p = 1$ si potrà stabilire che

$$\theta^{p-m} = \theta^{-m} \, ,$$

ossia che un esponente negativo indica la sostituzione inversa a quella che rappresenterebbe quando si prendesse positivamente.

Per passare dalla permutazione ottenuta colla sostituzione θ^n a quella ottenuta colla ψ^m, la sostituzione da farsi potrà rappresentarsi con $\theta^{-n}\, \psi^m$.

---

[1] V. Serret, *Cours d'Alg. sup.*, p. 252; o, *Journal de l'École Polytechnique*, t. X.

9. Se si ha eguaglianza tra due prodotti di più sostituzioni si potranno moltiplicare ambedue a destra per una stessa sostituzione, come pure a sinistra; ma non però in generale uno a destra e l'altro a sinistra.

II.

Delle sostituzioni derivate.

10. Allorchè più sostituzioni sono tali che le lettere cangiate da ciascuna di esse sono lasciate ferme da tutte le altre, il loro prodotto non varia se si cangia l'ordine col quale sono disposti i fattori. Ma se due sostituzioni θ e ψ inducono cangiamento anche sulle stesse lettere, non è più indifferente l'ordine dei fattori, non è più in generale

$$\theta\psi = \psi\theta \ ,$$

ma invece

$$\theta\psi = \psi\theta_1 \ ; \tag{1}$$

dove θ_1 è un'altra sostituzione.

Moltiplicando da ambe le parti per ψ^{-1} si ricava

$$\theta_1 = \psi^{-1}\,\theta\psi \ . \tag{2}$$

La sostituzione θ_1 la diremo la *derivata di* θ *per mezzo di* ψ, θ la sostituzione *primitiva* e ψ la *derivante.*

La derivata di θ_1 la chiameremo derivata seconda di θ, la derivata della derivata seconda, derivata terza, e così di seguito.

Indichiamo colla notazione $D^m{}_\psi$ la derivata m^{sima} di θ per mezzo di ψ; avremo

$$D^n{}_\psi\,\theta\,.\,\psi = \psi\,D_\psi^{n+1}\theta\ ;\ \ D^m{}_\psi\,D^n{}_\psi\,\theta = D_\psi^{m+n}\theta\ ;\ \ D^o{}_\psi\,\theta = \theta\,. \tag{3}$$

La quantità m la chiameremo l'*indice* della derivata.

11. Prendiamo le equazioni

$$D_\psi\theta = \psi^{-1}\,\theta\psi\,,\qquad D_\psi\varphi = \psi^{-1}\,\varphi\psi\,,\qquad D_\psi\chi = \psi^{-1}\,\chi\psi$$

. . . .

Moltiplicandole tra loro, avremo

$$D_\psi\,\theta\,.\,D_\psi\,\varphi\,.\,D_\psi\,\chi\ldots = \psi^{-1}\,\theta\varphi\chi\ldots\psi = D_\psi\,\theta\varphi\chi\ldots$$

ossia: *la derivata del prodotto di più sostituzioni è eguale al prodotto delle derivate delle medesime.*

Se

$$\theta = \varphi = \chi = \ldots\ ;\ \text{sarà}\ (D_\psi\,\theta)^n = D_\psi\,\theta^n\ ;$$

essendo n il numero delle sostituzioni: dunque *la derivata della potenza* n^{esima} *di una sostituzione è la potenza* n^{esima} *della derivata.*

12. Se

$$\theta^n = 1,$$

sarà

$$(D_\psi \theta)^n = D_\psi 1 = \psi^{-1} \psi = \psi^0 = 1:$$

viceversa, quando

$$(D_\psi \theta)^n = 1,$$

è

$$D_\psi \theta^n = 1;$$

e quindi

$$1 = \psi^{-1} \theta^n \psi, \qquad \psi = \theta^n \psi, \qquad 1 = \theta^n.$$

Di qui è facile dedurre che *la sostituzione e la sua derivata sono dello stesso ordine.*

13. *La derivata per mezzo di una sostituzione φ, della derivata per mezzo di un' altra ψ, di una qualunque θ, è eguale alla derivata della medesima θ per mezzo del prodotto $\psi\varphi$.*

Infatti

$$\theta\psi = \psi D_\psi \theta, \qquad D_\psi \theta \,.\, \varphi = \varphi D_\varphi D_\psi \theta:$$

moltiplichiamo a sinistra la 2ª per ψ, avremo riducendo colla 1ª

$$\theta\psi\varphi = \psi\varphi D_\varphi D_\psi \theta;$$

ma

$$\theta\psi\varphi = \psi\varphi D_{\psi\varphi} \theta;$$

dunque

$$D_\varphi D_\psi \theta = D_{\psi\varphi} \theta:$$

e in generale si può dedurre da queste

$$\theta\gamma \ldots \chi\psi\varphi = \gamma \ldots \chi\psi\varphi D_\varphi D_\psi D_\chi \ldots . D_\gamma \theta, \tag{4}$$

$$D_\varphi D_\psi D_\chi \ldots . D_\gamma \theta = D_{\gamma \ldots \chi\psi\varphi} \theta. \tag{5}$$

Se

$$\varphi = \psi = \chi \ldots = \gamma,$$

la (4) e la (5) divengono

$$\theta\psi^p = \psi^p D_\psi^p \theta, \tag{6}$$

o

$$D_{\psi^p} \theta = D_\psi^p \theta; \tag{7}$$

quindi *la derivata per mezzo della potenza* p^esima^ *di una sostituzione è eguale alla derivata* p^esima^ *per mezzo della medesima sostituzione.*

14. Quando

$$D^p{}_\psi \theta = D^p{}_\psi \varphi$$

è anche (v. n. 13)

$$D_{\psi^p} \theta = D_{\psi^p} \varphi,$$

quindi

$$\theta\psi^p = \varphi\psi^p \ , \ \theta = \psi \ ;$$

dunque *derivate dello stesso indice eguali hanno eguali le loro primitive.*

Se $\psi^p = 1$, la (6) dà

$$D^p_\psi \theta = \theta \ ; \tag{8}$$

dalla quale si ricava

$$D^a{}_\psi \theta = D^b{}_\psi \theta$$

quando è

$$a \equiv b \ (\text{mod.}\, p) :$$

le derivate gl'indici delle quali sono congrui rispetto all'ordine della derivante sono eguali tra loro.

Sia ora n il minimo numero per il quale si abbia

$$D^n{}_\psi \theta = \theta \ , \tag{9}$$

e

$$p = mn + r \ , \tag{10}$$

essendo p l'ordine di ψ.

Derivando $(m-1)n$ volte la (9), si ha

$$D^{mn}_\psi \theta = D^{(m-1)n}_\psi \theta = \theta : \tag{11}$$

e dalla (8) sostituendo in essa a p il valore (10),

$$D^{mn}_\psi \theta \, D^r{}_\psi \theta = \theta \ . \tag{12}$$

Eguagliando la (11) e la (12), si ha

$$D^{mn}_\psi \theta \, D^r{}_\psi \theta = D^{mn}_\psi \theta :$$

onde

$$D^r{}_\psi \theta = \theta \ ,$$

e perchè $r < n$, dovrà essere

$$r = 0 \ .$$

Dunque *l'indice minimo di una derivata eguale alla primitiva, è un divisore dell'ordine della derivante*; *e sono eguali le derivate che hanno gl'indici congrui rispetto al medesimo.*

Se l'ordine di ψ è un numero primo p le derivate differenti di una sostituzione qualunque rispetto a ψ saranno p.

CAPITOLO SECONDO

DEI GRUPPI DI PERMUTAZIONI

I.

Delle sostituzioni di un gruppo.

15. Dicesi *gruppo di permutazioni* una serie di permutazioni tali che una sostituzione mediante la quale si passa da una ad un'altra qualunque di esse, eseguita su tutte, non faccia che permutarle tra loro, senza produrne nessuna nuova che non appartenga già al gruppo. Si dicono sostituzioni del gruppo quelle colle quali si passa da una a tutte le altre permutazioni del medesimo. Se queste siano $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{p-1}$ dovrà aversi

$$\psi_m \psi_n = \psi_r ,$$

essendo r un valore intero dipendente da m e da n, e minore di p.

Un gruppo che contenga n permutazioni lo diremo di *grado* n^{esimo}.

Una funzione di più quantità che non muti valore altro che per le sostituzioni di un gruppo, avrà altrettanti valori quante sono le permutazioni di questo.

16. Sia q l'ordine di una sostituzione ψ_0 del gruppo; q, o sarà eguale al numero delle permutazioni del gruppo medesimo, e si avranno con essa tutte le permutazioni: o sarà minore di quel numero, e se ne avranno soltanto q, e vi saranno poi delle altre sostituzioni. Sia una di queste ψ_1 di ordine n; da ambedue si avranno qn permutazioni differenti; poichè supponiamone due eguali

$$\psi^r_0 \psi^s_1 = \psi^{r'}_0 \psi^{s'}_1 :$$

moltiplicando a destra per ψ_1^{-s}, a sinistra per ψ_0^{-r},

$$\psi_1^{s-s'} = \psi_0^{r'-r} .$$

Prendiamo $(s - s')\, k \equiv 1 \pmod{n}$, e inalziamo alla potenza k, si avrebbe

$$\psi_1 = \psi_0^{(r'-r)k} ,$$

e quindi la sostituzione ψ_1 non sarebbe altro che una potenza di ψ_0, e non una nuova che potesse dare delle altre permutazioni. Se q non è eguale al numero delle permutazioni del gruppo, si avrà anche un'altra sostituzione ψ_2, colla quale si otterranno altre qn permutazioni, tutte differenti dalle precedenti: poichè supponiamo

$$\psi^r_0 \psi^s_1 = \psi^u_0 \psi_2 ,$$

si avrebbe

$$\psi_2 = \psi_0^{r-u} \psi^s_1 .$$

ossia ψ_2 eguale a una delle precedenti sostituzioni, contro il supposto. Se con queste $q(n+1)$ permutazioni non sono esaurite tutte quelle del gruppo, le altre sostituzioni non potranno egualmente dare che un numero multiplo di q: dunque *l'ordine di una sostituzione qualunque di un gruppo è un divisore del numero delle permutazioni del gruppo.*

Se un gruppo avrà un numero primo di permutazioni, le sostituzioni del medesimo saranno tutte potenze di una sola di ordine p.

17. Chiameremo *eguali* due gruppi quando tutte le sostituzioni di uno saranno eguali a quelle dell'altro, ancorchè differenti sieno le permutazioni.

Se le sostituzioni saranno differenti, ma nello stesso numero e di ordini eguali, i gruppi conterranno anche uno stesso numero di permutazioni, e li diremo *simili.*

II.

Dei gruppi derivati simili.

18. Siano $\theta_0\,\theta_1\ldots\theta_{p-1}$ tutte le sostituzioni di un gruppo G; $\psi_0\,\psi_1\ldots\psi_{n-1}$ quelle di un altro Γ. Un gruppo ottenuto eseguendo sulle permutazioni di G una sostituzione ψ_m ha le sue sostituzioni derivate di quelle di G per mezzo di ψ_m, e perciò lo diremo *Gruppo derivato di* G *per mezzo di* ψ_m, e lo indicheremo colla notazione

$$D_{\psi_m}\,G.$$

Poichè le sostituzioni derivate sono dello stesso ordine delle primitive (v. n. 12), *i gruppi derivati saranno o simili, o eguali al primitivo o tra loro.*

I gruppi derivati di uno G per mezzo delle sostituzioni di un altro Γ si dicono *derivati di* G *per mezzo di* Γ, che dicesi *derivante.* Se sono simili e sommandoli si ha un gruppo, questo si chiamerà *gruppo della somma dei derivati di* G *per mezzo di* Γ.

19. *Una sostituzione* φ *che converte una permutazione di un gruppo* G *in una di un suo derivato, cangia il primo gruppo interamente nel secondo.*

Infatti, sia

$$\theta_m\,\varphi = \psi_r\,D_{\psi_r}\,\theta_{m'}\ .$$

Moltiplichiamo per θ_q a sinistra, avremo

$$\theta_q\,\theta_m\,\varphi = \theta_q\,\psi_r\,D_{\psi_r}\,\theta_{m'} = \psi_r\,D_{\psi_r}\,\theta_q\,\theta_{m'}$$

Ora

$$\theta_q\,\theta_m = \theta_a, \qquad \theta_q\,\theta_{m'} = \theta_a\,\theta_m^{-1}\,\theta_{m'} = \theta_b:$$

onde

$$\theta_a\,\varphi = \psi_r\,D_{\psi_r}\,\theta_b$$

Poichè q e quindi a possono esser qualunque, se ne deduce che tutte le permutazioni di un gruppo rimangono cangiate in quelle di un suo derivato, quando rimanga cangiata una sola di esse in una di quelle dell'altro, come volevamo dimostrare.

20. Se tutti i gruppi derivati sono soltanto simili, tutte le sostituzioni del gruppo H che ne è somma, li permuteranno tra loro; e il gruppo K somma di queste permutazioni conterrà un numero di sostituzioni eguale al numero delle sostituzioni di H, e tutte di ordini rispettivamente eguali a quelli di queste ultime, e perciò sarà simile a H.

Il gruppo K lo diremo *gruppo delle permutazioni sopra i derivati*, e potremo stabilire *che il gruppo delle permutazioni sopra i derivati è simile al gruppo della somma dei derivati, allorquando questi sono soltanto simili tra loro.*

III.

Dei gruppi derivati eguali.

21. Quando i gruppi derivati per mezzo di un gruppo Γ sono tutti eguali ma non identici tra loro, cioè quando hanno eguali le sostituzioni, ma non le permutazioni, e si ha

$$G = D_{\psi_0}\, G = D_{\psi_1}\, G = \ldots . = D_{\psi_{n-1}}\, G\ ;$$

il gruppo *derivante* Γ delle sostituzioni $\psi'_0\, \psi'_1 \ldots \psi_{n-1}$, prenderà il nome di *moltiplicatore* del gruppo primitivo G; e anche quello di *divisore* del gruppo H che risulta dalla somma di tutti i gruppi derivati.

Il gruppo H lo chiameremo il prodotto di G per Γ, e porremo

$$H = G\Gamma .$$

Se

$$\Gamma = G_1\, \Gamma_1\, ,\, \Gamma_1 = G_2\, \Gamma_2\, , \ldots\, \Gamma_{n-2} = G_{n-2}\, G_{n-1}\, ,$$

sarà

$$H = G\, G_1\, G_2 \ldots G_{n-1}\, ;$$

e poichè l'ordine di questi fattori non è indifferente, distingueremo questi gruppi tra loro, chiamando G_{n-1} il 1° divisore, G_{n-2}, il 2° ...... G l' n^{esimo}, ultimo divisore; e G_1 il primo, G_2 il 2° .... G_{n-1} l'$(n-1)^{esimo}$ moltiplicatore di G.

Se non possono esistere altri moltiplicatori dopo Γ, si dirà questo *il massimo moltiplicatore di* G.

Un gruppo che non ammette nessun divisore lo diremo *primo*. Uno che non abbia nessun moltiplicatore *gruppo massimo*.

Poichè del gruppo H le sole sostituzioni che ha comuni con Γ permutano

tra loro i derivati di G; si può stabilire che *il gruppo delle permutazioni sopra i derivati per mezzo di un moltiplicatore di essi è simile a questo moltiplicatore*.

22. *Il derivato del prodotto di più gruppi è eguale al prodotto dei derivati di ciascuno di essi presi nello stesso ordine.*

Sia

$$H = G\Gamma,$$

e θ_m le sostituzioni di G, ψ_n quelle di Γ; avremo

$$D_{\psi_n} \theta_m = \theta_{m'}.$$

Deriviamo H per mezzo di φ; nel gruppo che si otterrà, alle θ_m corrisponderanno le $D_\varphi \theta_m$, alle ψ_n, le $D_\varphi \psi_n$. Ora si ha (v. n. 11).

$$D_\varphi \theta_m \, D_\varphi \psi_n = D_\varphi \theta_m \psi_n = D_\varphi \psi_n \, D_\varphi \theta_m \;;$$

onde

$$D_{D_\varphi \psi_n} D_\varphi \theta_m = D_\varphi \theta_m ,$$

e il gruppo $D_\varphi H$ sarà il prodotto dei due derivati

$$D_\varphi G \text{ e } D_\varphi \Gamma \;;$$

$$D_\varphi G\Gamma = D_\varphi G \, D_\varphi \Gamma \;;$$

e in generale se

$$H = G\, G_1\, G_2 \ldots . G_{n-1} \;;$$

$$D_\varphi H = D_\varphi G\, D_\varphi G_1\, D_\varphi G_2 \ldots D_\varphi G_{n-1} .$$

CAPITOLO TERZO

DELLA DETERMINAZIONE DEI MOLTIPLICATORI E DIVISORI DI UN GRUPPO

I.

Equazioni del massimo moltiplicatore e dei divisori di un gruppo.

23. Dato un gruppo, possono esser proposti due problemi; determinarne, 1°. i gruppi moltiplicatori, 2°. i divisori.

La soluzione di ambedue questi problemi richiede prima la determinazione di una funzione θ degli apici che dia tutte le sostituzioni del gruppo per i differenti valori che prendono le costanti o parametri che entrano nella medesima.

1°. Per la determinazione dei moltiplicatori osserviamo che, indicando con ψ le loro sostituzioni, e con θ quelle del gruppo dato H, dovranno i derivati

per mezzo delle ψ essere eguali tra loro, e quindi le sostituzioni derivate dalle θ per mezzo di ψ eguali ad altre delle medesime θ; onde deve aversi la equazione

$$\mathrm{D}_{\psi}\, \theta_n = \theta_m\,; \tag{13}$$

dove essendo θ_n una sostituzione del gruppo dato, θ_m ne è un'altra, le costanti della quale sono dipendenti da quelle di θ_n. Questa equazione corrisponde all'altra

$$\psi[\theta_n(i)] = \theta_m[\psi(i)]\,. \tag{14}$$

Il valore di ψ che è l'integrale più generale di questa conterrà tutti i valori che sodisfano la (14), e quindi tutte le sostituzioni del massimo moltiplicatore del gruppo proposto.

2°. Passiamo ora alla decomposizione di un gruppo nei suoi successivi divisori primi.

Siano

$$\theta_{a_0}\ \theta_{a_1}\ \theta_{a_2}\ \ldots\ \theta_{a_{\nu-2}}\,, \tag{a}$$

le sostituzioni di un gruppo G,

$$\theta_{b_0}\ \theta_{b_1}\ \theta_{b_2}\ \ldots\ \theta_{b_{\mu-2}}\,; \tag{b}$$

quelle di un altro Γ_n, affinchè un gruppo H sia il prodotto di questi, cioè

$$\mathrm{H} = \mathrm{G}\Gamma_n\,,$$

sarà necessario e sufficiente che le (a) formino un gruppo effettivo, e che quindi soddisfacciano la equazione

$$\theta_{a_n}\,\theta_{a_m} = \theta_{a_r} \tag{15}$$

(v. n. 15); e che inoltre sieno eguali i derivati di G per mezzo di Γ_n (v. n. 21), cioè

$$\mathrm{D}_{\theta_b}\,\theta_{a_n} = \theta_{a_m}\,, \tag{16}$$

$$\theta_b[\theta_{a_n}(i)] = \theta_{a_m}[\theta_b(i)]\,. \tag{17}$$

Le sostituzioni di Γ_n che sono il prodotto di una medesima sostituzione per due differenti delle (a), danno dei derivati non solo eguali, ma anche identici, cioè colle stesse permutazioni, e quindi esse dovranno ritenersi eguali tra loro nel gruppo Γ_n; il grado del quale sarà dato perciò dal numero di quelle sostituzioni soltanto che permutano effettivamente tra loro i derivati, e che perciò non hanno per fattore nessuna delle (a), e potranno anche non formare un vero gruppo. Con questa considerazione riman *sempre* vero il teorema del n. 21, e inoltre si può stabilire che *il prodotto dei gradi dei divisori di un gruppo è eguale al grado del gruppo stesso.*

I valori più generali che soddisfanno le equazioni (15) e (17) danno le sostituzioni del secondo divisore G, sul quale operando come sopra H, se

ne potrà ottenere un terzo G_1, e così seguitando si giungerà finalmente a un ultimo divisore primo Γ_1.

Le sostituzioni dell'ultimo gruppo G_{n-2} di cui è divisore Γ_1, private dei fattori eguali a qualcuna delle sostituzioni di Γ_1, daranno un primo moltiplicatore Γ_2, quelle di G_{n-3}, tolti da esse i fattori eguali ad alcuna di quelle di G_{n-2}, daranno un secondo moltiplicatore Γ_3, e così di seguito avremo tutti i moltiplicatori fino all'ultimo Γ_n, e sarà

$$H = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \dots \Gamma_n .$$

Tutti questi divisori saranno primi, perchè altrimenti non si sarebbero presi per i valori che sodisfanno la (15) e la (17) tutti i possibili come abbiamo supposto.

Quando si trovassero una serie di valori (a) che soddisfacessero la (15) e non la (17), le sostituzioni che essi rappresenterebbero, darebbero tanti gruppi derivati simili, quante fossero quelle di H non comprese nelle (a). La decomposizione di un gruppo nei suoi divisori primi corrisponde a quella che Galois chiamava *decomposizione propria.* La determinazione di più derivati simili dei quali un gruppo dato sia la somma, corrisponde alla decomposizione che egli chiamava *impropria.*

Nella ricerca dei moltiplicatori di un gruppo distingueremo tre casi: 1°. quello nel quale il numero delle lettere è primo: 2°. quando è il prodotto di numeri primi differenti tra loro: 3°. quando è una potenza di un numero primo.

II.

Massimo moltiplicatore dei gruppi di un numero primo di permutazioni sopra un numero eguale di lettere.

24. Sia p il numero primo delle lettere, e delle permutazioni del gruppo. Le sostituzioni del gruppo saranno tutte le potenze differenti di una sola di ordine p (v. n. 16), circolare sopra tutte le lettere (v. n. 7, 4°), la quale disponendo convenientemente gli apici numerici i della prima permutazione, sarà

$$\varphi(i) = i + 1 .$$

La equazione (14) da integrarsi per avere il massimo moltiplicatore diverrà

$$\psi(i+1) = \psi(i) + a ,$$

la quale ha per integrale generale

$$\psi(i) = ai + b = a(i+c) = a\,[\varphi(i)]^c ,$$

dove $ac = b$.

Le potenze di $\varphi(i)$ essendo poi sostituzioni del gruppo primitivo, tutte le sostituzioni del massimo moltiplicatore saranno date da

$$\psi(i) = ai :$$

ed essendo λ una radice primitiva di p, e ponendo

$$\theta(i) = \lambda i\,;$$

tutte saranno potenze di $\theta(i)$: dunque *le sostituzioni del massimo moltiplicatore di un gruppo di un numero primo di permutazioni sopra un numero primo di lettere, e che perciò ha per sostituzioni le potenze di*

$$\begin{pmatrix} i \\ i+1 \end{pmatrix}$$

soltanto, sono tutte potenze della unica

$$\begin{pmatrix} i \\ \lambda i \end{pmatrix}\,;$$

e quindi *il gruppo le cui sostituzioni sono tutte comprese nella notazione*

$$\begin{pmatrix} i \\ ai+b \end{pmatrix}$$

è un massimo.

III.

Massimo moltiplicatore di un gruppo di un numero primo di permutazioni sopra un numero di lettere che ha dei fattori primi differenti tra loro.

25. Sia primo il numero p delle permutazioni di un gruppo G, e il numero m delle lettere che entrano nelle medesime, sia il prodotto di più fattori primi differenti tra loro. Avremo che tutte le sostituzioni di G saranno potenze di una sola di ordine p (v. n. 16) che risulterà dal prodotto di q circolari, ciascuna sopra un sistema di p lettere differenti (v. n. 7, 5°). Distinguiamo tra loro con un primo apice k le lettere di un sistema, con un secondo h indichiamo il sistema al quale appartengono. Il simbolo

$$\begin{pmatrix} x_{k,h} \\ x_{k+a,h} \end{pmatrix}$$

comprenderà tutte le sostituzioni di G.

Un primo moltiplicatore, per ciò che si è detto precedentemente (v. n. 24) sarà un gruppo Γ le sostituzioni del quale sono potenze di

$$\begin{pmatrix} x_{k,h} \\ x_{\lambda k,h} \end{pmatrix}.$$

Moltiplicatore del gruppo GΓ, che ne risulta, sarà ogni gruppo H che non abbia altre sostituzioni che sui sistemi; cioè comprese nella notazione

$$\begin{pmatrix} x_{k,h} \\ x_{k,\varphi(h)} \end{pmatrix}\,;$$

perchè evidentemente queste non cangiano le permutazioni delle lettere di ogni sistema in particolare.

26. Un gruppo L = KH, dove K non abbia altre sostituzioni che sopra gl'indici k, H sopra gli h, lo diremo *a lettere congiunte*, e *lettere congiunte* quelle che hanno uno stesso indice h. Tra le sostituzioni di K ve ne potranno essere anche alcune che permutino soltanto gl'indici k di uno, o di alcuni sistemi; come pure alcune che permutino quelli di un sistema in un modo, e quelli di un altro in un modo differente. Ma vi dovranno essere insieme tutte le derivate differenti di queste sostituzioni, per mezzo di un'altra qualunque sopra gl'indici h soltanto.

Se non esiste alcun moltiplicatore del gruppo, che dia un prodotto a lettere congiunte, L sarà un gruppo *massimo*, a meno, che il numero delle lettere che entrano nelle permutazioni non abbia tutti eguali tra loro i suoi fattori primi come passiamo a dimostrare.

Supponiamo che sia un moltiplicatore di L il gruppo Γ di ν permutazioni. Le sostituzioni $\psi_0\, \psi_1 \ldots \psi_{\nu-2}$ di esso non potranno essere nè sugl'indici h, nè sui k soltanto, perchè altrimenti L non sarebbe il massimo gruppo a lettere congiunte, come abbiamo supposto.

Le lettere che in un gruppo derivato $D_{\psi_n} L$ corrispondono a quelle di ciascuno dei diversi sistemi di lettere congiunte nel primitivo L, formeranno altrettanti nuovi sistemi di lettere congiunte nel derivato, e poichè i gruppi L e $D_{\psi_n} L$ sono eguali, le lettere congiunte nell'uno sono congiunte anche nell'altro, e quindi nel gruppo L le m lettere si potranno disporre almeno in ν differenti modi in q sistemi di p lettere congiunte ciascuno.

Fra questi modi ve ne sarà sempre uno tale, che faccia appartenere due lettere qualunque per es. x_a, x_b, allo stesso sistema.

Infatti tutte le lettere che fanno parte dei sistemi che contengono la lettera x_a non potranno esser differenti da tutte quelle dei sistemi che contengono x_b; perchè altrimenti tanto quelle che queste farebbero un sistema di lettere congiunte nel gruppo LΓ, contro il supposto. Sia per tanto x_c una lettera che fa parte di un sistema con x_a e di uno con x_b. Nel gruppo L non vi saranno sostituzioni che cangiano x_c in una lettera di un sistema qualunque, e che non permutino contemporaneamente x_a e x_b in due altre del medesimo; dunque x_a e x_b faranno parte di uno stesso sistema, *c. v. d.*

27. Due lettere non possono far parte altro che di un solo sistema di lettere congiunte. È chiaro se $p = 2$. Se $p > 2$, supponiamo che x_a e x_b faccian parte di due sistemi differenti in tutte le altre lettere. Nel gruppo L, in questo caso, non vi sarebbe sostituzione che permutasse x_a senza permutare anche x_b, e viceversa: poichè anche cangiando x_a in una x_c a lei congiunta, x_a formando parte con x_b anche di un altro sistema che non

contiene x_c, dovrebbero tutte le lettere di questo ultimo rimaner cangiate in quelle del primo, e quindi anche la x_b. Quelle lettere poi nelle quali rimarrebbero cangiate x_a e x_b, verrebbero a far parte di due sistemi, e sarebbero nello stesso caso; e così di seguito. Dunque L sarebbe un gruppo a lettere congiunte, i sistemi del quale sarebbero di due lettere, contro il supposto.

Ugualmente si dimostrerebbe lo stesso per un numero di lettere >2 e $<p$. Dunque *i sistemi differenti di lettere congiunte avranno una sola lettera eguale.*

28. Disposte le lettere in un modo qualunque in sistemi congiunti, sarà sempre possibile anche un'altra disposizione (v. n. 26), nella quale un sistema non potrà contenere che una lettera di ciascuno dei primi (v. n. 27); dunque, le lettere di ogni sistema essendo p, i sistemi saranno almeno p, e le lettere p^2. Siano le seguenti linee orizzontali i primi p sistemi di lettere congiunte, e quello formato da una di ciascuno di essi sia la prima linea verticale

$$
(A)\left\{\begin{array}{lllll}
x_{0,0} & x_{1,0} & x_{2,0} & \cdots & x_{p-1,0} \\
x_{0,1} & x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{p-1,1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{0,p-1} & x_{1,p-1} & x_{2,p-1} & \cdots & x_{p-1,p-1}
\end{array}\right. ;
$$

e poichè nei sistemi di lettere congiunte non si possono mutare alcune di uno in alcune di un altro senza mutarle tutte quante; le sostituzioni sulle lettere di una linea orizzontale, o lasceranno ferma la prima linea verticale, o ne convertiranno tutte quante le lettere in altre corrispondenti rispettivamente alla stessa linea orizzontale, e congiunte tra loro: le quali potremo supporre essere quelle di una delle altre linee verticali: poichè la prima permutazione è arbitraria. In conseguenza nel quadro (A) saranno lettere congiunte tanto quelle situate in una stessa linea orizzontale, quanto quelle della medesima verticale.

Ora osserviamo che le sostituzioni del gruppo L non possono lasciare una linea verticale ferma, e permutar le altre; perchè altrimenti contro ciò che abbiamo dimostrato al n. 26, due lettere di due sistemi verticali non potrebbero esser congiunte; lo stesso può dirsi delle orizzontali; dunque tutte le sostituzioni di L non potranno essere che le circolari comprese nella notazione

$$\begin{pmatrix} x_{k,h} \\ x_{k+a,h+b} \end{pmatrix}$$

e saranno congiunte anche tutte le lettere che si trovano sulla stessa diagonale.

Se le lettere sono in numero maggiore di p^2, a quelli del quadro (A)

andranno aggiunti altri sistemi; e sarà possibile un'altra disposizione in sistemi di lettere congiunte, in ciascuno dei quali entri una sola delle lettere del quadro A (v. n. 26, 27); dunque per ciascuna delle p^2 lettere ve ne saranno altre $p-1$; onde le lettere saranno almeno p^3. E poichè non si può permutare una lettera del quadro (A) in una che non si trovi in esso, senza convertirle tutte quante in altre egualmente congiunte; le p^3 lettere si potranno disporre in p sistemi di lettere congiunte simili ad (A).

Distinguiamo con un terzo apice l le lettere di questi sistemi: poichè non si può tener fermo nessuno di questi sistemi permutandone alcuni tra loro, anche rispetto all'apice l saranno in L le sostituzioni tutte circolari; e quindi tutte quante comprese nel simbolo

$$\begin{pmatrix} x_{k,h,l} \\ x_{k+a,h+b,l+c} \end{pmatrix}.$$

Generalizzando si può finalmente stabilire il seguente Teorema:

Affinchè un gruppo a lettere congiunte ammetta un moltiplicatore per il quale moltiplicato, il prodotto non sia a lettere congiunte, è necessario che il numero delle lettere sia la potenza di un numero primo, e che esso non contenga altre sostituzioni che quelle comprese nel simbolo

$$\begin{pmatrix} x_{k,h,l,\ldots} \\ x_{k+a,h+b,l+c,\ldots\ldots} \end{pmatrix}.$$

Un gruppo di permutazioni di un numero di lettere che ammette dei fattori primi differenti tra loro, non può aver per divisore nessun gruppo a lettere congiunte, a meno che non sia a lettere congiunte esso stesso.

IV.

Massimo moltiplicatore di un gruppo di un numero primo di permutazioni sopra un numero di lettere che è potenza di un numero primo.

29. Sia p^ν il numero delle lettere, p numero primo e ν qualunque. Il gruppo di p permutazioni sarà a lettere congiunte, e un divisore di quello, le sostituzioni del quale sono comprese tutte nella notazione

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} x_{k,h,l,m\ldots} \\ x_{k+a,h+b,l+c,m+d,\ldots\ldots} \end{pmatrix}$$

Determineremo perciò il massimo moltiplicatore di questo ultimo gruppo.

Adottiamo per apici delle lettere, come abbiam detto in principio, le p radici della congruenza

$$(b) \qquad k^{p^\nu} \equiv k \ (\text{mod.}\ p)\ ;$$

le quali sappiamo essere espresse da

$$k = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \dots + a_{\nu-1} i^{\nu-1} ;$$

dove i è radice incommensurabile della congruenza di grado ν, irriduttibile

$$(c) \qquad F(i) \equiv 0 \pmod{p} .$$

I coefficienti della i corrisponderanno agli apici $k, l, m, n, \dots$, onde le sostituzioni (a) saranno tutte date da

$$\begin{Bmatrix} x_{a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \dots + a_{\nu-1} i^{\nu-1}} \\ x_{a_0 + a + (a_1+b)i + (a_2+c)i^2 + \dots + (a_{\nu-1}+g)i^{\nu-1}} \end{Bmatrix}$$

o anche, poichè $a + bi + ci^2 + \dots + gi^{\nu-1}$ è una radice k_0 della (b), queste sostituzioni possono rappresentarsi con

$$(d) \qquad \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+k_0} \end{pmatrix} ,$$

dove k_0 può avere per valori tutte le radici della (b). Onde le permutazioni che con esse si ottengono saranno p^ν; e, poichè $pk_0 \equiv 0$, tutte quelle sostituzioni saranno di ordine p.

Sia $\psi(k)$ una sostituzione del moltiplicatore Γ del gruppo G che nasce dalle sostituzioni (d); dovrà aversi (v. n. 23).

$$(e) \qquad \psi(k + k_0) \equiv \psi(k) + h_0$$

dove h_0 è pure una radice della (b) dipendente da k_0.

L'integrale più generale della congruenza (e) alle differenze finite è

$$\psi(k) \equiv \sum_{n=0}^{n=\nu-1} B_n k^{p^n} + B_\nu ;$$

dove i B_n sono radici della (b) tali che

$$\sum_{n=0}^{n=\nu-1} B_n k_0^{p^n} \equiv h_0 .$$

È facile verificare questo integrale ponendo mente alla proprietà, della quale godono questa specie di quantità, che cioè

$$(k + k_0)^{p^n} \equiv k^{p^n} + k_0^{p^n} .$$

Poichè le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+B_\nu} \end{pmatrix}$$

appartengono tutte al gruppo G; tutte le sostituzioni del massimo moltiplicatore Γ saranno soltanto quelle comprese nel simbolo

$$(f) \qquad \left\{ \begin{matrix} x_k \\ x_{\sum\limits_{n=0}^{n=\nu-1} B_n k^{p^n}} \end{matrix} \right\}$$

Esprimendo le B_n e k in funzione di i, è facile ottenere la (f) sotto la forma

$$(f') \left\{ \begin{matrix} x_{a_0+a_1 i+a_2 i^2+\ldots a_{\nu-2} i^{\nu-1}} \\ x_{m_0 a_0+m_1 a_1+\ldots+m_{\nu-1} a_{\nu-1}+(m'_0 a_0+m'_1 a_1+\ldots+m'_{\nu-1} a_{\nu-1})i+\ldots+(m_0^{(n-1)} a_0+m_1^{(\nu-1)} a_1+\ldots+m_{\nu-1}^{(\nu-1)} a_{\nu-1})i^{\nu-1}} \end{matrix} \right\}$$

dove tutte le a e le m sono numeri interi eguali o maggiori di zero, e $< p$.

Per qualunque valore dei B_n non si hanno sempre sostituzioni. Poichè tutte le permutazioni non devono contenere che una sola volta una medesima lettera, sarà necessario che i B_n siano tali che la congruenza

$$\sum_{n=0}^{n=\nu-1} B_n k^{p^n} \equiv k_0$$

non abbia che una sola radice comune colla (b) qualunque sia k_0.

30. Tutte le sostituzioni (f) di Γ lasciano ferma la x_0; ed esso è un gruppo a lettere congiunte rispetto alle altre $p^\nu - 1$. Infatti se

$$\sum_{n=0}^{n=\nu-1} B_n k_0^{p^n} \equiv k_1 \ ,$$

anche

$$\sum_{n=0}^{n=\nu-1} B_n (ak_0)^{p^n} \equiv ak_1$$

dove a è un intero qualunque $< p$; poichè

$$a^{p^n} \equiv a ;$$

dunque nel gruppo massimo moltiplicatore le $p^\nu - 1$ lettere che hanno per indici le radici della congruenza

$$k^{p^\nu - 1} \equiv 1 \ (\text{mod.}\ p) ,$$

si dividono in $\dfrac{p^\nu - 1}{p-1}$ sistemi di $p-1$ lettere congiunte ciascuno, e queste sono precisamente quelle gli apici delle quali hanno un rapporto numerico.

31. Il numero di lettere che può lasciar ferme una sostituzione (e) è sempre un divisore p^m di p^ν.

Sia x_{k_0} una lettera che rimanga ferma per una delle (f); si avrà

$$(g) \qquad \sum_{n=0}^{n=\nu-1} B_n k_0^{p^n} = k_0 ;$$

della quale saranno radici tutti gli apici dello stesso sistema di lettere congiunte, ak_0: dunque se sta ferma una lettera ne staranno ferme almeno p.

Sia k_1 un'altra radice della (g) diversa dalle precedenti; ne saranno radici anche tutti i p^2 valori, che prende la espressione

$$ak_0 + bk_1 ,$$

ponendo in essa per a e per b tutti i numeri intieri $< p$. Questi p^2 valori saranno differenti, poichè altrimenti si avrebbe

$$ak_0 + bk_1 \equiv a_1 k_0 + b_1 k_1 \, (\text{mod.}\, p),$$

ossia

$$(a - a_1) k_0 \equiv (b_1 - b) k_1 .$$

Moltiplicando per un numero h tale, che

$$(b_1 - b) h \equiv 1,$$

si ha

$$k_1 \equiv (a - a_1) hk_0$$

contro il supposto: dunque se stanno ferme più di p lettere, ne staranno ferme almeno p^2.

Se sta ferma un'altra lettera, sia l'apice di questa k_2, che sarà una radice della (g) differente dalle precedenti: e ne saranno radici tutte le p^3 comprese al solito nella espressione

$$ak_0 + bk_1 + ck_2 :$$

e queste saranno tutte differenti; che altrimenti si avrebbe

$$ak_0 + bk_1 + ck_2 \equiv a_1 k_0 + b_1 k_1 + c_1 k_2 ;$$

ossia

$$(a - a_1) k_0 + (b - b_1) k_1 \equiv (c_1 - c) k_2 ;$$

e moltiplicando per il numero h che dà

$$(c_1 - c) h \equiv 1 ,$$

si ha

$$k_2 \equiv h (a - a_1) k_0 + h (b - b_1) k_1 ,$$

contro ciò che avevamo supposto: così seguitando si può stabilire, che le lettere che stanno ferme saranno sempre in numero p^m divisore p^ν.

32. Le ν lettere che hanno per apici $k_0\, k_1\, k_2 \ldots . k_\nu$ tali, che uno qualunque di essi non si può esprimere linearmente per gli altri, non possono esser lasciate ferme da nessuna sostituzione che non lasci ferme altresì tutte quante le lettere, cioè che non equivalga a nessuna operazione. Queste lettere possono essere una radice primitiva λ di p, e le potenze di una radice i della congruenza (c).

Per le sostituzioni potenze di

$$\binom{x_k}{x_{k^p}}$$

non possono esser lasciate ferme che le p lettere

$$x_0\,,\, x_1\,,\, x_2 \ldots . x_{p-1}:$$

poichè i numeri intieri $<p$ sono le uniche radici della congruenza

$$k^p \equiv k\,(\mathrm{mod.}\, p)\,.$$

33. Dal non esser contenute nel gruppo Γ le sostituzioni che lasciano ferme un numero di lettere differente da p^m, dove m è un intero qualunque minore di ν, si deduce che tutte le sostituzioni di Γ sono di ordine $p^\nu - p^m$, e che quindi (vedi n. 16) *il numero delle permutazioni del gruppo massimo che non è a lettere congiunte, e che ammette un divisore a lettere congiunte è eguale a* M *o a un divisore di* M, *essendo*

$$\mathrm{M} = p^\nu\,(p^\nu - 1)\,(p^\nu - p) \ldots . (p^\nu - p^{\nu-1})\,.$$

V.

Decomposizione di un gruppo nei suoi divisori primi.

34. Abbiamo già osservato (v. n. 23) che quando sia dato un gruppo, e si voglia decomporlo nei gruppi primi dei quali è il prodotto, è necessario determinare prima la funzione $\theta(i)$ degl'indici, la quale dà per tutti i differenti valori dei suoi parametri, tutte le sostituzioni del gruppo; poi risolvere le equazioni (15) e (17). Quando non esistano valori dei parametri di θ, che le sodisfacciano, il gruppo è primo. La classificazione dei gruppi primi farà soggetto di un altro mio lavoro, se avrò agio a seguitare con risultato le ricerche intraprese. Ora mi contenterò di parlare dei gruppi di prima classe, dei quali solo abbisognano le applicazioni che fo nella seconda parte di questa Memoria.

Gruppi di *prima classe* diremo quelli che contengono un numero primo di permutazioni; e che perciò hanno tutte le loro sostituzioni potenze di una soltanto (v. n. 16).

35. *I gruppi le sostituzioni dei quali sono tutte quante potenze di una sola θ di ordine* m, *sono decomponibili in tanti gruppi di prima classe quanti sono i fattori primi di* m, *e che sono di grado rispettivamente eguale a questi fattori.*

Infatti, se $m = pn$, dove p è un fattore primo; la funzione che da tutte le sostituzioni del gruppo è θ^t. La equazione (17) diviene in questo caso

$$\theta^{a+b}(i) = \theta^{c+a}(i)\,;$$

la quale è soddisfatta da

$$b = c,$$

qualunque sia a. La equazione (15) poi diviene

$$\theta^{b_m}\,\theta^{b_n} = \theta^{b_r}\,;$$

che è sodisfatta da $b_i = pi$. L'ultimo divisore avrà dunque per sostituzioni

$$\theta^p\;\theta^{2p}\;\theta^{3p}\ldots\ldots\theta^{p(n-1)}$$

e per l'altro rimarranno

$$\theta\;\theta^2\;\theta^3\ldots\theta^{p-1}\,.$$

Questo è di prima classe e di grado p, e quello è pure di prima classe se n è primo, altrimenti è decomponibile nuovamente in uno di prima classe e in un altro che è di prima classe, oppure decomponibile, e così di seguito.

36. *Un gruppo di grado* pq, *le permutazioni del quale si ottengono tutte con due sostituzioni una di ordine* p *l'altra di ordine* q, *è sempre il prodotto di due gruppi di prima classe, o prodotti di gruppi di prima classe, e se* p > q *il primo divisore è di grado* q^{simo}, *il secondo di grado* p^{simo}.

Se θ è la sostituzione di ordine p, ψ quella di ordine q, è evidente che tutte le permutazioni si otterranno eseguendo sopra una sola le sostituzioni

$$\theta^m\,\psi^n$$

prendendo per m tutti i valori da 0 a $p-1$ inclusivamente, e per n da 0 a $q-1$.

Se si eseguissero invece prima tutte le sostituzioni

$$\theta^m\,\psi\,,$$

e poi su queste nuovamente tutte le potenze di θ, si avrebbero p^2 permutazioni, cioè un numero $> pq$, e in conseguenza alcune dovrebbero esser eguali, e quindi si avrebbero alcuni valori a, a', b e b' per i quali

$$\theta^a\,\psi\theta^{a'} = \theta^b\,\psi\theta^{b'}\,,$$

o anche

$$\theta^{a-b}\,\psi = \psi\theta^{b'-a'}\,;$$

ed essendo h dato dalla congruenza

$$h(a-b) \equiv 1 \pmod{p},$$

risulterebbe

$$\theta\psi' = \psi\theta^{h(b'-a')} \equiv \psi\theta^k,$$

posto

$$k = h(b'-a');$$

e quindi

$$D_\psi \theta = \theta^k :$$

dalla quale si ha qualunque sia m (v. n. 11)

$$D_\psi \theta^m = \theta^{mk};$$

onde chiamando G il gruppo delle θ

$$D_\psi G = G :$$

e detto Γ il gruppo delle ψ, sarà il proposto eguale al prodotto $G\Gamma$, come volevamo dimostrare.

Le sostituzioni di un gruppo pq, quando p e q siano primi, sono di ordine p o di ordine q (v. n. 16): *dunque ogni gruppo il grado del quale è il prodotto di due numeri differenti non è mai primo.*

37. È evidente una prima decomposizione dei gruppi a lettere congiunte in due, uno dei quali contenga tutte le sostituzioni sulle lettere congiunte, e l'altro quelle sui sistemi delle medesime; e per avere i gruppi primi, in questo caso basta determinare i divisori primi di questi due.

38. Il massimo moltiplicatore Γ del gruppo a lettere congiunte (d) nel caso che le lettere siano la potenza di un numero primo p^ν è sempre decomponibile in più gruppi primi, ma che in generale non sono tutti di prima classe.

Le sostituzioni di questo moltiplicatore sono tutte date dalla funzione

$$\theta(k) = \sum_{n=0}^{n=\nu-1} B_n k^{p^n};$$

o anche da

$$\theta(a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_{\nu-1} i^{\nu-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\nu-1} \left(m_0^{(n)} a_0 + m_1^{(n)} a_1 + m_2^{(n)} a_2 + \ldots + m_{\nu-1}^{(n)} a_{\nu-1}\right) i^n$$

(v. n. 29). Ora gl'indici che hanno un rapporto numerico appartengono a lettere congiunte (v. n. 30): onde queste si potranno distinguer con un indice eguale al numero che esprime il rapporto che hanno, a una qualunque tra

loro, che sarà intiero e $< p$, ritenendo al solito eguali a zero i multipli di p; i sistemi poi ai quali esse appartengono si potranno contrassegnare con un indice funzione del primitivo, che rimanga lo stesso moltiplicando questo per un fattore numerico. Ciò si ottiene ponendo

$$x_{a_0+a_1 i+\dots a_{\nu-1} i^{\nu-1}} = x_{a_0, \frac{a_1}{a_0} i+\frac{a_2}{a_0} i^2+\dots+\frac{a_{\nu-1}}{a_0} i^{\nu-1}},$$

e meglio

$$x_{a_0+a_1 i+\dots a_{\nu-1} i^{\nu-1}} = x_{t, k_1 i+k_2 i^2+\dots+k_{\nu-1} i^{\nu-1}};$$

dove $k_n = \frac{a_n}{a_0}$ dovrà prendere i $p+1$ valori $0, 1, 2, \dots p-1, \frac{1}{0}$; t poi prenderà i soli $1, 2, 3 \dots p-1$.

Questa mutazione d'indici trasforma la (f') nella seguente

$$(h) \left\{ \begin{array}{c} x_{t, k_0 i+k_1 i_2+\dots+k_{\nu-1} i^{\nu-1}} \\ x_{\lambda t, \sum\limits_{n=1}^{n=\nu-1} \frac{\left(m_0^{(n)} + m_1^{(n)} k_1 + m_2^{(n)} k_2 + \dots + m_{\nu-1}^{(n)} k_{\nu-1}\right) i^n}{m_0 + m_1 k_1 + m_2 k_2 + \dots + m_{\nu-1} k_{\nu-1}}} \end{array} \right\}$$

Chiamiamo *determinante della sostituzione* (h), e indichiamo con D, il determinante del sistema dei ν^2 numeri intieri

$$\begin{array}{l} m_0 \; m_1 \; m_2 \dots m_{\nu-1} \\ m'_0 \; m'_1 \; m'_2 \dots m'_{\nu-1} \\ m''_0 \; m''_1 \; m''_2 \dots m''_{\nu-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ m_0^{(\nu-1)} \; m_1^{(\nu-1)} \; m_2^{(\nu-1)} \dots m_{\nu-1}^{(\nu-1)}. \end{array}$$

Per moltiplicare la sostituzione (h) per un'altra (h'), il determinante D' della quale sia quello del sistema

$$\begin{array}{l} n_0 \; n_1 \; n_2 \dots n_{\nu-1} \\ n'_0 \; n'_1 \; n'_2 \dots n'_{\nu-1} \\ n''_0 \; n''_1 \; n''_2 \dots n''_{\nu-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ n_0^{(\nu-1)} \; n_1^{(\nu-1)} \; n_2^{(\nu-1)} \dots n_{\nu-1}^{(\nu-1)} \end{array}$$

basta porre in luogo di $k_1\, k_2 \ldots . k_{\nu-1}$ nella (h') i coefficienti delle corrispondenti potenze d'i della (h). Quindi dal noto teorema della moltiplicazione de' determinanti è facile dedurre che, se si chiama Δ il determinante del prodotto delle due sostituzioni (h) e (h'), avremo

$$(i) \qquad \Delta = DD' ;$$

cioè, *il determinante del prodotto di due sostituzioni è eguale al prodotto de'loro determinanti.*

Siano

$$(a) \qquad \theta_{a_0}\, \theta_{a_1}\, \theta_{a_2} \ldots . \theta_{a_M}$$

tutte quante le sostituzioni comprese nella notazione (h), il determinante delle quali è residuo quadratico di p. Poichè il prodotto di due residui è residuo, esse sodisfaranno la (15) del n. 23, e formeranno un gruppo L. Se s'indica poi con θ_b una sostituzione qualunque compresa nella (h), il determinante della quale è non residuo quadratico di p, avremo sodisfatta la (17) del n. 23, che diviene

$$\theta_{a_n}\, \theta_b = \theta_b\, \theta_{a_m} ;$$

perchè, il primo prodotto avendo il determinante non residuo, dovrà averlo non residuo anche il secondo; ed essendo non residuo il determinante di θ_b, dovrà esser residuo quello di θ_{a_m}. Dunque se si chiama G_2 il gruppo delle θ_b avremo

$$\Gamma = LG_2 .$$

Ma tutte le sostituzioni a determinante non residuo si ottengono facendo il prodotto di una sola e medesima a determinante non residuo con tutte quelle a determinante residuo; dunque G_2 è di 2° grado (v. n. 23).

Ora se indichiamo con G il gruppo che si ottiene colle $p-1$ potenze della sostituzione

$$\left\{ \begin{matrix} x_{t,\, k_1 i + k_2 i^2 + \ldots k_{\nu-1} i^{\nu-1}} \\ x_{\lambda t,\, k_1 i + k_2 i^2 + \ldots k_{\nu-1} i^{\nu-1}} \end{matrix} \right\}$$

nella quale λ è una radice primitiva di p; e con G_1 il gruppo di tutte le sostituzioni che rimangono del gruppo L, tolti dalle medesime i fattori eguali a qualcuna delle sostituzioni di G, che saranno perciò

$$\left\{ \begin{matrix} x_{t,\, k_1 i + k_2 i + \ldots + k_{\nu-1} i^{\nu-1}} \\ x_{t,\, \Sigma \frac{m_0^{(n)} + m_1^{(n)} k_1 + \ldots + m_{\nu-1}^{(n)} k_{\nu-1}}{m_0 + m_1 k_1 + \ldots + m_{\nu-1} k_{\nu-1}}} \end{matrix} \right\} ;$$

è evidente che si avrà

$$L = GG_1 ,$$
$$\Gamma = GG_1\, G_2 .$$

G è di grado $(p-1)^{simo}$ e decomponibile in gruppi di prima classe, G_2 di 2° grado, G_1 sarà di grado

$$\frac{(p^\nu-1)(p^\nu-p)(p^\nu-p^2)\dots(p^\nu-p^{\nu-1})}{2(p-1)}.$$

Onde Γ sarà decomponibile in gruppi di prima classe soltanto quando lo sarà G_1.

Questo avviene quando

1.° $p=2\,,\quad \nu=2:$

2.° $p=3\,,\quad \nu=2:$

nel 1° caso G_1 essendo di 3° grado, e quindi primo, nel 2° essendo un gruppo di 24 permutazioni su 4 lettere, che è decomponibile sempre in gruppi di prima classe, come si vede nell'esempio che abbiamo sviluppato qui appresso.

39. Quando un gruppo G ha le sostituzioni tutte comprese nel simbolo

$$(k)\qquad \left\{\begin{matrix} x_k \\ x_{(Bk+C)^{p^r}} \end{matrix}\right\},$$

avremo sempre

$$G=\Gamma\Gamma_1\Gamma_2\,;$$

essendo le sostituzioni di Γ date da

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+C} \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\Gamma=G_1\,G_2\,G_3\,..\,,G_\nu\,,$$

indicando con G_t il gruppo le sostituzioni del quale sono le p differenti potenze di

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+i^t} \end{pmatrix}.$$

Le sostituzioni di Γ_1 poi saranno le $p^\nu-1$ potenze differenti di

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{Bk} \end{pmatrix};$$

dove B è una radice primitiva della (b): e quelle di Γ_2 le ν potenze di

$$\begin{pmatrix} x \\ x_{k^p} \end{pmatrix}.$$

Dunque il gruppo G conterrà $p^\nu(p^\nu-1)\nu$ permutazioni (v. n. 23), e sarà il prodotto di gruppi tutti di prima classe (vedi n. 35).

ESEMPIO

Per indicare che le sostituzioni di un gruppo sono comprese in un dato simbolo, stabiliremo l'eguaglianza della lettera che indica il gruppo, col simbolo stesso.

Se

$$i^2 + i + 1 \equiv 0 \pmod{2},$$

le radici della congruenza

$$k^{2^2} \equiv k \pmod{2}$$

saranno

$$k_0 \equiv 0 \quad k_1 \equiv i \quad k_1^2 \equiv i + 1 \quad k_1^3 \equiv 1\,.$$

Il gruppo H che comprende tutte le 24 permutazioni che si posson fare con 4 lettere, sarà sempre decomponibile in gruppi di prima classe; poichè le sue sostituzioni possono ottenersi tutte dalla (k), e se

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+k_1^2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{G}_1 = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+k_1} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{G}_2 = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k_1 k} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{G}_3 = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k^2} \end{pmatrix}$$

sarà

$$\mathrm{H} = \mathrm{G}\mathrm{G}_1\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_3 :$$

e avremo la seguente decomposizione, rappresentando le lettere cogli esponenti degl'indici, e con zero x_{k_0},

$$(\mathrm{G}_3)\left\{\begin{array}{l}
(\mathrm{G}_2)\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad (\mathrm{G}_1) \\
(\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}0123\\3210\end{array}\right. \quad (\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}1032\\2301\end{array}\right. \\
\qquad\qquad\quad (\mathrm{G}_1) \\
(\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}0231\\3102\end{array}\right. \quad (\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}1320\\2013\end{array}\right. \\
\qquad\qquad\quad (\mathrm{G}_1) \\
(\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}0312\\3021\end{array}\right. \quad (\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}1203\\2130\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
(\mathrm{G}_2)\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad (\mathrm{G}_1) \\
(\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}0213\\3120\end{array}\right. \quad (\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}1302\\2031\end{array}\right. \\
\qquad\qquad\quad (\mathrm{G}_1) \\
(\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}0321\\3012\end{array}\right. \quad (\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}1230\\2103\end{array}\right. \\
\qquad\qquad\quad (\mathrm{G}_1) \\
(\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}0132\\3201\end{array}\right. \quad (\mathrm{G})\left\{\begin{array}{l}1023\\2310\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

PARTE SECONDA

CAPITOLO PRIMO

DELLE CONDIZIONI GENERALI DI RISOLUBILITÀ DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE PER RADICI DI EQUAZIONI AUSILIARIE

I.

Della risolvente di Galois.

1. È noto che una funzione razionale delle radici di una equazione irriduttibile di grado μ

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

la quale prende, per qualunque sostituzione eseguita sulle radici, valori tutti differenti tra loro, gode la proprietà che le μ radici della (1) possono essere espresse razionalmente in funzione della medesima ([1]).

Siano

$$V = F(x_0, x_1, x_2 \ldots . x_{\mu-1})$$

questa funzione, e

$$(2) \qquad V_0\, V_1\, V_2 \ldots V_{M-1}$$

gli M valori che essa prende per tutte le diverse permutazioni delle radici: sarà

$$M = 1 . 2 . 3 \ldots . \mu - 1 . \mu,$$

e potranno esprimersi tutti i valori (2) in funzione razionale di uno qualunque tra loro ([2]).

2. Sia

$$(3) \qquad \Theta(V) = 0$$

la equazione di grado M che ha per radici i valori (2), e che perciò avrà i coefficienti funzioni simmetriche delle radici, e quindi razionali dei coefficienti della (1). Questa equazione la quale ha alcune proprietà scoperte da Galois, che fanno il fondamento della presente Teoria, la chiameremo ad onore di questo profondo geometra la *risolvente di Galois*.

Indicheremo con

$$\varphi_0(V), \varphi_1(V), \varphi_2(V) \ldots . \varphi_{\mu-1}(V)$$

([1]) Vedi: Serret, *Cours d'Alg. sup.*, p. 149.
([2]) V. ivi, p. 152

le μ funzioni razionali di un valore qualunque di V, che danno le radici della (1).

3. La risolvente di Galois in generale sarà irriduttibile, ma potrà decomporsi in fattori irrazionali, cioè in fattori che contengono delle radici di equazioni algebriche ausiliarie. Queste radici, quando si stabilisca d'introdurle nel calcolo, come quantità conosciute, si diranno quantità *aggiunte*, e *razionale* si chiamerà ogni funzione che sia tale dei coefficienti della proposta e delle quantità aggiunte; e *riduttibile* o *irriduttibile* una equazione secondo che può o non può decomporsi in fattori, i coefficienti dei quali siano razionali.

Siano aggiunte tali radici di equazioni ausiliarie che rendano la (3) riduttibile; $\psi(V)$ sia uno dei fattori razionali della medesima di grado ν, e

$$V_0, \ V_1, \ V_2 \ \dots \ V_{\nu-1} \tag{4}$$

le radici di

$$\psi(V) = 0. \tag{5}$$

Potremo prendere per radici della (1) quelle date da una qualunque delle seguenti linee orizzontali, che formano ν differenti permutazioni delle medesime:

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(V_0), \quad \varphi_1(V_0), \quad \varphi_2(V_0) \quad \dots \quad \varphi_{\mu-1}(V_0) \\ \varphi_0(V_1), \quad \varphi_1(V_1), \quad \varphi_2(V_1) \quad \dots \quad \varphi_{\mu-1}(V_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_0(V_{\nu-1}), \quad \varphi_1(V_{\nu-1}), \quad \varphi_2(V_{\nu-1}) \quad \dots \quad \varphi_{\mu-1}(V_{\nu-1}) \end{array} \right.$$

4. Per eseguire una sostituzione che converta la n^{esima} delle permutazioni (A) in un'altra m^{esima}, è necessario e sufficiente il cangiamento di uno dei valori (4) V_n in un altro dei medesimi V_m.

Ora sappiamo che

$$V_m = \lambda(V_n),$$

indicando con λ una funzione razionale; e poichè la (5) è irriduttibile, saranno altrettanti valori (4) i seguenti [1]

$$V_n, \ \lambda(V_n), \ \lambda^2(V_n) \ \dots \ \lambda^{p-1}(V_n), \tag{6}$$

essendo p il più piccol numero per cui

$$\lambda^p(V_n) = V_n:$$

e se la serie dei valori (6) non esaurisce la (4), saranno $\mu(V_n)$, $\mu_1(V_n)$, $\mu_2(V_n)\dots$ altre funzioni razionali che daranno altrettante radici,

$$\text{(7)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu(V_n), \ \mu\lambda(V_n), \ \mu\lambda^2(V_n) \ \dots \ \mu\lambda^{p-1}(V_n) \\ \mu_1(V_n), \ \mu_1\lambda(V_n), \ \mu_1\lambda^2(V_n) \ \dots \ \mu_1\lambda^{p-1}(V_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

(1) Vedi: Serret, *Cours d'Alg. sup.*, p. 345.

Ora cangiando V_n in V_m, ossia V_n in $\lambda(V_n)$, si permutano circolarmente in tutti i loro termini ciascuna delle linee orizzontali di valori (6) e (7), ossia si permutano tra loro tutti i valori (4): dunque eseguendo su tutte le (A) una sostituzione qualunque che faccia passare da una ad un'altra delle medesime, esse si permutano tutte quante tra loro, senza che nasca nessuna nuova permutazione; dunque *le* ν *permutazioni* (A) *costituiscono un gruppo.*

Questo gruppo lo chiameremo *gruppo della equazione ridotto dalle quantità che si sono aggiunte.*

Se non si fosse aggiunta nessuna quantità irrazionale il grado del gruppo della equazione in generale sarebbe stato M.

5. *Tutte le funzioni razionali delle radici della* (1) *invariabili per tutte le sostituzioni del gruppo* (A), *sono esprimibili razionalmente per i coefficienti della* (1) *e per le quantità aggiunte dalle quali è stato ridotto.*

Esprimendo tutte le radici della (1) per uno qualunque V_0 dei valori (4), una funzione razionale qualunque delle radici sarà eguale a una funzione razionale di V_0

$$\chi(V_0)$$

Se essa è invariabile per tutte le sostituzioni del gruppo (A), equivalendo queste alle permutazioni dei valori (4) tra loro, avremo

$$\chi(V_0) = \chi\ (V_1) = \chi(V_2) = \cdots = \chi(V_{\nu-1}),$$

e quindi

$$\chi(V_0) = \frac{1}{\nu}\Big(\chi(V_0) + \chi(V_1) + \cdots + \chi(V_{\nu-1})\Big) \cdot$$

Dunque una funzione razionale qualunque delle radici della (1), che sia invariabile per le sostituzioni del gruppo (A), sarà simmetrica delle radici della (5), e perciò esprimibile razionalmente per i coefficienti della (5), ossia di quelli della (1) e delle quantità aggiunte.

Una funzione razionale delle radici e irrazionale dei coefficienti e delle quantità aggiunte dovrà essere variabile per alcune delle sostituzioni del gruppo.

6. *Se una funzione razionale delle radici, e invariabile per alcune sostituzioni soltanto, è esprimibile razionalmente per i coefficienti e per alcune quantità aggiunte, il gruppo ridotto non conterrà nessuna sostituzione per la quale essa non sia invariabile.*

Sia

$$\psi(V_0) = B; \tag{8}$$

e il primo membro una funzione razionale delle radici della (1), il secondo dei coefficienti e delle quantità aggiunte. Poichè la (5) è irriduttibile, e la (8) ha i coefficienti razionali di quelli della (5), ed è soddisfatta da una radice della medesima, dovrà esserlo anche da tutte le altre. Dunque

sostituendovi a V_0 qualunque altro valore (4), ossia facendo qualunque sostituzione del gruppo (A) sulle radici della (1), rimarrà invariabile; come volevamo dimostrare.

7. Allorchè una funzione razionale delle radici variabile per ogni sostituzione che muta il posto di alcune soltanto di esse, è cognita razionalmente; il gruppo non può contenere sostituzioni che sull'altre radici; e quelle essendo invariabli per tutte le sostituzioni del gruppo saranno cognite razionalmente, e la equazione non sarà irriduttibile.

Da ciò ne segue che *le sostituzioni del gruppo di una equazione irriduttibile non potranno mai essere in numero minore del grado della equazione stessa.*

8. *Quando la risolvente di Galois si decompone in fattori, ciascuno dei quali è razionale dei coefficienti e di una sola delle radici*

$$r_0, r_1, r_2 \dots r_{n-1} \tag{9}$$

di una equazione ausiliare irriduttibile di grado n

$$\varphi(r) = 0; \tag{10}$$

il gruppo della proposta si divide in n *gruppi derivati simili, e ciascuno di questi diviene gruppo della equazione quando si aggiunga una sola delle* (9); *e il gruppo della* (10) *è simile a quello della proposta.*

I fattori della risolvente (3) dovranno esser n, e differenti tra loro soltanto per i valori di r; perchè altrimenti $\Theta(V)$ razionale dei coefficienti della (10) o non sarebbe invariabile per alcuna sostituzione sopra le r, e unicamente per quelle che mutano il posto di alcune soltanto di esse, e quindi la (10) (v. n. 7) non sarebbe irriduttibile. Pertanto potremo porre

$$\Theta(V) = \theta(V, r_0)\,\theta(V, r_1) \dots\dots \theta(V, r_{n-1}).$$

Questi fattori saranno in V di grado

$$m = \frac{\nu}{n},$$

e posti a zero daranno tutte le radici della (3).

Siano

$$V_{0,t}\ V_{1,t}\ V_{2,t} \dots\dots V_{m-1,t} \tag{11}$$

le radici di una qualunque delle equazioni che ne nascono

$$\theta(V, r_t) = 0. \tag{12}$$

Se si aggiunga la sola radice r_t, il gruppo della proposta sarà

$$(A_t) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} \varphi_0(V_{0,t}), & \varphi_1(V_{0,t}), & \varphi_2(V_{0,t}) & \dots\dots & \varphi_{\mu-1}(V_{0,t}) \\ \varphi_0(V_{1,t}), & \varphi_1(V_{1,t}), & \varphi_2(V_{1,t}) & \dots\dots & \varphi_{\mu-1}(V_{1,t}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(V_{m-1,t}), & \varphi_1(V_{m-1,t}), & \varphi_2(V_{m-1,t}) & \dots\dots & \varphi_{\mu-1}(V_{m-1,t}) \end{array} \right.$$

Dando a t tutti i valori da zero a $n-1$ si ottengono n gruppi, che sono quelli della equazione quando si aggiunga successivamente ciascuna delle (9), e che sommati insieme formano il gruppo dell'equazione quando non le è aggiunta nessuna radice della (10).

Se $V_{0,t}$ e $F(V_{0,t})$ sono due radici della (12), si avrà

$$(13) \qquad \theta(V_{0,t}, r_t) = 0, \quad \theta\Big(F(V_{0,t}), r_t\Big) = 0:$$

e poichè la 1ª è irriduttibile, e la 2ª razionale delle quantità che entrano nei coefficienti della 1ª, sarà il resto della divisione della 2ª per la 1ª

$$(14) \qquad \varpi(r_t)) = 0.$$

Questa che ha tutti i suoi coefficienti razionali, e ammette una radice della (10) che è irriduttibile, dovrà ammettere anche tutte le altre. Perciò essendo $r_{t'}$ un'altra qualunque delle (9) si avrà

$$\varpi(r_{t'}) = 0, \quad \text{e} \quad \theta\Big(F(V_{0,t}), r_{t'}\Big)$$

divisibile per

$$\theta(V_{0,t'}, r_{t'}).$$

Da ciò ne segue che, essendo le radici di un fattore (12) date da certe funzioni razionali di una tra loro, anche quelle di un altro fattore qualunque saranno date dalle stesse funzioni di una tra loro. Dunque cangiando uno dei valori $V_{0,t}$, che entrano in un gruppo (A_t), in uno $V_{0,t'}$, di un altro gruppo $(A_{t'})$, tutte le permutazioni di (A_t) si cangiano rispettivamente in quelle di $(A_{t'})$: e poichè il cangiamento di un valore V, in un altro, corrisponde a una sostituzione sulle radici della (1), una sola e medesima sostituzione converte tutte le permutazioni di un gruppo in quelle di un altro, e i gruppi (A_0), $(A_1) \ldots . (A_{n-1})$ sono derivati uno dell'altro.

Poichè un gruppo A_t appartiene alla equazione quando è aggiunta una sola delle (9) r_t, e tutte le altre (9) rimangono irrazionali; ciascuna di esse espressa razionalmente per le radici della proposta dovrà risultare invariabile per le sostituzioni del gruppo corrispondente e variabile per quelle di tutti gli altri: dunque il gruppo della equazione (10) dovrà essere eguale a quello delle permutazioni sopra i derivati, e simile a quello della proposta (v. Parte I, n. 20.).

9. *Se la risolvente può decomporsi in più fattori razionali dei coefficienti della proposta, e di tutte le radici*

$$(15) \qquad r_0, r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$$

di una equazione ausiliaria irriduttibile

$$(16) \qquad \varphi(r) = 0;$$

il gruppo deve essere il prodotto di due altri; il primo dei quali è il gruppo della equazione stessa quando siano aggiunte tutte le (15); *il secondo è simile al gruppo dell'ausiliaria* (16).

Sia

$$\Theta(V) = \theta_0(V, r_0, r_1 \dots r_{n-1})\,\theta_1(V, r_0, r_1 \dots r_{n-1}) \dots \theta_{n-1}(V, r_0, r_1 \dots r_{n-1}).$$

Poichè la risolvente ha i coefficienti razionali delle quantità che entrano in quelli della (16), dovrà essere invariabile per le sostituzioni del gruppo di queste, e quindi i fattori θ_t non dovranno differire che per l'ordine nel quale sono disposte le (15) ed esser tanti quante sono le permutazioni del gruppo della (16). Indicando, come nel caso precedente, con

$$(17) \qquad V_{0,t}, \quad V_{1,t}, \quad V_{2,t}, \dots, V_{m-1,t}$$

le m radici del fattore irriduttibile di grado $m = \frac{r}{n}$

$$(18) \qquad \theta_t(V, r_0, r_1, r_2 \dots r_{m-1}) = 0,$$

si dimostrerà ugualmente che tutti i gruppi (A_0) (A_1) ... (A_{n-1}) ottenuti dando a t tutti i valori interi da zero a n—1, e che appartengono alla equazione quando si aggiungano tutte le radici (15), sono derivati uno dell'altro.

Se una radice $V_{a,t}$ di un fattore (18) è data in funzione razionale di una radice $V_{a,t'}$ di un altro, per mezzo della equazione

$$V_{a,t'} = \psi(V_{a,t});$$

si avrà

$$\theta_t(V_{a,t}) = 0, \quad \theta_{t'}\big(\psi(V_{a,t})\big) = 0:$$

e poichè la prima è irriduttibile, e ambedue sono razionali delle stesse quantità, le radici della prima saranno tutte radici anche dell'altra, e se queste sono

$$V_{0,t}, \ F_1(V_{0,t}), \ F_2(V_{0,t}) \dots F_{m-1}(V_{0,t})$$

saranno radici della $\theta_{t'} = 0$

$$\psi(V_{0,t}), \ \psi F_1(V_{0,t}), \ \psi F_2(V_{0,t}), \dots \psi F_{m-1}(V_{0,t}).$$

Onde si passerà dall'una all'altra permutazione del gruppo $(A_{t'})$ facendo gli stessi cangiamenti delle $V_{a,t}$ l'una nell'altra, come per passar da una permutazione all'altra di (A_t): dunque i gruppi derivati in questo caso sono tutti eguali, e il gruppo dell'ausiliaria che definisce le quantità aggiunte che sono invariabili per le sole sostituzioni dei gruppi (A_t), è simile a quello per il quale bisogna moltiplicare uno dei derivati per ottenere il gruppo stesso che appartiene alla proposta quando non siano aggiunte le (15) (v. Parte I, n. 21); come volevamo dimostrare.

10. *Se si aggiunga a una equazione una funzione* U *razionale delle radici, la quale prenda per tutte le sostituzioni del primo divisore del gruppo altrettanti valori differenti, e sia invariabile per le sostituzioni*

dell'altro fattore, il gruppo della equazione diverrà il solo fattore per le sostituzioni del quale la U *è invariabile.*

Poichè ogni funzione aggiunta diviene razionale, e perciò invariabile per tutte le sostituzioni del gruppo, il quale non potrà più contenere le sostituzioni per le quali essa è variabile ([1]).

11. Se il gruppo è primo, non si potrà ridurre altro che aggiungendo una funzione variabile per tutte le sostituzioni del gruppo, con che il gruppo non conterrà più nessuna sostituzione, ossia una permutazione soltanto; perchè se si prenda una funzione U simmetrica dei valori, che riceve una funzione delle radici, per le sostituzioni di uno G dei derivati dei quali è somma il gruppo proposto, essa non sarà che apparentemente invariabile per queste sostituzioni; perchè eseguita una che lo converta in un altro derivato, diviene variabile anche per le sostituzioni di G. Dunque *se una equazione ha un gruppo primo, non esiston funzioni delle radici che aggiunte lo riducano, tranne quelle che lo riducono a una sola permutazione.*

12. Il gruppo di una equazione, finchè non sia aggiunta una irrazionale che non si trovi già nei coefficienti, sarà in generale di grado $1.\,2.\,3\ldots\mu-1.\,\mu$: perchè le sole funzioni simmetriche sono sempre cognite razionalmente senza l'aggiunta di nessuna quantità. Se il gruppo sarà di grado minore, dovranno esistere delle relazioni particolari tra le radici, che rendano impossibili le sostituzioni che non compariscono nel gruppo. Infatti, si aggiunga una funzione delle radici variabile per tutte le sostituzioni del gruppo, e invariabile per qualunque altra, e precisamente di queste una U che contenga il minimo numero di radici; il gruppo non conterrà più nessuna sostituzione, e quindi ogni funzione delle radici, e le radici stesse risulteranno razionalmente cognite; e si potranno tutte esprimere per U e per i coefficienti:

$$x_0 = F_0(U), \quad x_1 = F_1(U), \quad x_2 = F_2(U) \ldots x_{\mu-1} = F_{\mu-1}(U).$$

Ora eseguendo in questo sistema di equazioni una sostituzione qualunque che non appartenga al gruppo, i secondi membri rimarrebbero fermi, e i primi si permuterebbero tra loro; ciò che è impossibile, perchè la equazione essendo irriduttibile, le radici sono tutte differenti tra loro. Perciò le sostituzioni del gruppo di una equazione alla quale non è aggiunta nessuna irrazionale, le chiameremo *possibili*, e le altre *impossibili.*

Così, se sulle radici di una equazione non sono possibili altre sostituzioni che quelle le quali non lasciano nessuna lettera allo stesso posto; per

([1]) Per conoscere come di fatto avviene che aggiunta una sola funzione delle radici, rimangono aggiunte tutte quelle che le son *simili*, e quindi anche quelle che riducono la risolvente e il gruppo, vedasi la Lezione XI dell'Algebra superiore di Serret.

U potrà prendersi una radice qualunque, poichè essa sarà variabile per tutte le sostituzioni del gruppo, e invariabile per tutte le altre: quindi tutte le radici saranno funzioni razionali di una qualunque tra loro. Se non sono possibili altro che quelle che non lasciano più di due lettere allo stesso posto, si può prendere per U una funzione non simmetrica di due radici qualunque: e perciò tutte quante sono funzioni razionali di due qualunque tra loro.

13. Reciprocamente quando esistono delle relazioni razionali tra le radici, il gruppo non contiene altre sostituzioni che quelle *possibili* nel sistema di equazioni che dà quelle relazioni, o, ciò che è lo stesso, in quello che se ne può dedurre per esprimer tutte le radici razionalmente per il minimo numero di esse. Infatti, aggiunte queste, le radici sono tutte cognite razionalmente, e il gruppo non contiene più nessuna sostituzione; dunque quelle per le quali le radici aggiunte sono invariabili, che sono le impossibili nel sistema, non le poteva contenere avanti la loro aggiunzione.

Così quando le radici sono tutte funzioni razionali di una qualunque tra loro, è evidente che, cangiata una, si debbono cangiar tutte le altre che ne sono funzioni razionali, e non son possibili altre sostituzioni che quelle che non lasciano ferma nessuna lettera: e queste sono le uniche che appartengono al gruppo.

Puiseux in questi ultimi tempi ha determinato le sostituzioni che si operano sulle radici quando si faccia percorrere con continuità una serie di valori immaginari, finchè non si torni a quello da cui siamo partiti, a una quantità della quale sono funzioni razionali i coefficienti [1]. Hermite ha dimostrato che queste sostituzioni sono quelle stesse del gruppo della equazione [2]. Le considerazioni precedenti spiegano facilmente questa rimarchevole coincidenza.

II.

Della risoluzione delle equazioni.

14. *Risolvere una equazione algebrica significa renderne razionali le radici coll'aggiunzione di radici di equazioni ausiliarie.*

Affinchè una equazione sia risoluta è necessario e sufficiente che il suo gruppo non contenga più nessuna sostituzione: perchè ogni funzione anche variabile per qualunque sostituzione deve essere razionalmente cognita quando una equazione è risoluta, e reciprocamente, se il gruppo è ridotto a non contenere più nessuna sostituzione, tutte le radici sono cognite razionalmente.

---

(1) Vedi: *Journal de Liouville,* t. XV.

(2) Vedi: *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* avril, 1851.

Bisogna qui distinguere due casi: o non esistono equazioni ausiliarie di gruppo inferiore per le radici delle quali siano esprimibili razionalmente quelle della proposta; e la operazione mediante la quale coll'aggiunzione di radici di equazione di gruppo simile si riduce il gruppo della proposta a non contenere nessuna sostituzione, la diremo *trasformazione della equazione*, o *risoluzione impropria*, e le radici di queste equazioni le diremo *irrazionali primitivi*; o esisteranno equazioni di gruppo inferiore, per le radici delle quali possano darsi razionalmente quelle della proposta, e allora la equazione si dirà *risolubile propriamente.*

Il primo caso ha luogo quando il gruppo è primo: il secondo quando è il prodotto di più gruppi primi.

15. I. Caso. Noi qui toccheremo soltanto la Teoria delle trasformazioni delle equazioni in quanto è necessario per i problemi relativi alla risoluzione propria che ci siamo proposti in questa Memoria. Gl'irrazionali primitivi, di gruppo simile che possono esprimersi razionalmente gli uni per gli altri potranno essere definiti da equazioni irriduttibili di gradi differenti, o anche di grado eguale, e di maggiore o minore semplicità relativamente all'applicazione dei metodi di risoluzione numerica: noi però non ci fermeremo su queste distinzioni: e li terremo tutti della stessa classe. Osserveremo soltanto che da quanto abbiam detto al numero 11, si deduce facilmente il seguente teorema : *affinchè una equazione irriduttibile sia impropriamente risolubile per radici di equazioni di grado inferiore, è necessario e sufficiente che il suo gruppo sia decomponibile in un numero di derivati simili minori del suo grado.*

Gl'irrazionali primitivi di gruppi non simili li distingueremo in classi corrispondenti alle classi dei loro gruppi.

16. *Gl'irrazionali primitivi di prima classe, il gruppo dei quali è di grado primo, sono tutti esprimibili razionalmente per soli radicali.*

Il Gruppo della equazione che li definisce non contiene che le potenze di una sola sostituzione di ordine eguale al numero delle radici (v. Parte I, n. 16), e circolare sopra tutte le medesime (v. Parte I, n. 7, 4°): quindi distinguendo le radici con apici numerici, poichè il loro numero è primo (v. Parte I, n. 2), le sostituzioni del gruppo saranno soltanto le potenze di

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Costruiamo la funzione

$$U = (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^{\mu-1} x_{\mu-1})^\mu,$$

dove

$$\alpha^{\mu-1} + \alpha^{\mu-2} + \cdots + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

U è invariabile per tutte le sostituzioni del gruppo (1), e perciò razionalmente cognita. Il radicale $\sqrt[\mu]{U}$ espresso per le radici è variabile per tutte le potenze della (19): dunque aggiunto ridurrà il gruppo a non contenere più alcuna sostituzione, e gli irrazionali primitivi x risulteranno razionalmente espressi per $\sqrt[\mu]{U}$, e per α, che è esprimibile per radicali, come dimostrò Gauss per il primo (2).

17. *Tutti gl'irrazionali primitivi esprimibili per soli radicali sono di prima classe.*

Aggiunte le radici p^{esime} immaginarie della unità, una equazione binomia di grado p ha tutte le sue radici funzioni razionali di una qualunque tra loro: talchè queste non si possono che aggiunger tutte insieme: e quindi il gruppo di una equazione o non è riduttibile per questa aggiunta, oppure è il prodotto di un gruppo che potrà essere anche di primo grado, per un altro di grado p (v. n. 8); dunque gl'irrazionali esprimibili per soli radicali o non sono primitivi, o sono di prima classe.

La determinazione degl'irrazionali, per i quali converrà di esprimere gl'irrazionali primitivi di classi superiori, sarà un'applicazione delle proprietà dei gruppi delle classi corrispondenti.

18. II. Caso. *Una equazione, il gruppo della quale è il prodotto di più gruppi primi, è risolubile per irrazionali primitivi, i gruppi dei quali sono rispettivamente simili ai divisori del gruppo della proposta e viceversa.*

Sia il gruppo della proposta

$$H = \Gamma' \Gamma'' \dots \Gamma^{(i)}$$

e $\Gamma' \Gamma'' \dots\dots \Gamma^{(i)}$ siano tutti primi. Decomponiamo il primo gruppo $\Gamma^{(i)}$ in un numero p di derivati simili (v. Parte I, n. 23, 2°), e costruiamo una funzione θ delle radici, invariabile per tutte le sostituzioni degli altri gruppi $\Gamma' \Gamma'' \dots$ e per quelle di uno dei derivati dei quali è somma $\Gamma^{(i)}$. La funzione θ avrà p valori che saranno dati da una equazione di grado p, e di gruppo simile a $\Gamma^{(i)}$ (v. n. 8). Aggiunte tutte le p radici di questa equazione, saranno cognite razionalmente delle funzioni variabili per le sostituzioni di $\Gamma^{(i)}$, e perciò il gruppo della proposta si ridurrà al solo prodotto degli altri. Coll'aggiunta d'irrazionali primitivi analogamente costruiti e di gruppi simili a $\Gamma^{(i-1)}$, $\Gamma^{(i-2)}$ ....., si potrà ridurre successivamente il gruppo a contenere quanti divisori di meno si vuole, e quindi a non contenere più nessuna sostituzione, e così otterremo la risoluzione completa della equazione.

(1) V. Serret, *Cours d'Alg. sup.*, p. 358.

(2) V. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*; ovvero, Serret, *Cours d'Alg. sup.*, p. 373.

La proposizione inversa è una conseguenza immediata di ciò che si è stabilito al n. 9.

Dal teorema precedente se ne deducono immediatamente i seguenti corollari.

1°. *Affinchè una equazione irriduttibile sia risolubile per irrazionali primitivi di classi determinate, è necessario e sufficiente, che il suo gruppo sia il prodotto di gruppi di classi eguali a quelle degl'irrazionali medesimi.*

2°. *Affinchè una equazione sia risolubile per radicali è necessario e sufficiente che il suo gruppo sia il prodotto di gruppi tutti di prima classe.*

3°. *Il prodotto dei gradi dei gruppi delle equazioni che definiscono gl'irrazionali primitivi per i quali una equazione irriduttibile è risolubile, è eguale almeno al grado del gruppo di questa medesima.*

4°. *Il prodotto degl'indici dei radicali per i quali è risolubile una equazione, è eguale almeno al grado della medesima, se è irriduttibile.*

19. *Il grado dell'ultimo divisore del gruppo di una equazione, o è eguale al grado dell'equazione, o n'è un divisore.*

L'aggiunzione dell'irrazionale U variabile per le μ sostituzioni di questo divisore rende razionali le radici, e quindi decompone la equazione in μ fattori tutti di primo grado. L'aggiunta degli altri irrazionali poteva aver già decomposta la equazione in fattori tutti di grado eguale tra loro, e quindi μ deve essere o eguale al grado, o a un divisore del medesimo; e qui, ragionando come per istabilire il numero dei fattori nei quali si decompone la risolvente, ai n. 8 e 9, si dimostra che μ è eguale o al grado della equazione irriduttibile che dà U, o al gruppo, e quindi a un multiplo del grado della medesima; con che rimane provato ciò che volevamo.

Da ciò che precede derivano i corollari seguenti:

1°. *Una equazione irriduttibile di grado primo non può risolversi senza irrazionali di grado eguale al proprio.*

2°. *Una equazione irriduttibile di grado qualunque non può risolversi senza irrazionali di grado divisore del proprio.*

3°. *Gl'irrazionali primitivi esterni nella espressione delle radici cioè quelli che non compariscono nei coefficienti di nessuna delle ausiliarie o sono dati da equazioni di grado eguale a quello della proposta, o a un divisore del medesimo: teorema già dimostrato da* Malmstén *per il caso particolare dei radicali* (1).

(1) Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, B. 34 « In solutionem aequationum algebraicarum disquisitio »: auct. Malmstén.

CAPITOLO SECONDO

DELLA RISOLUBILITÀ DELLE EQUAZIONI PER RADICALI

I.

Delle risolventi lagrangiane.

20. Non sempre sono date immediatamente le relazioni razionali che passano tra le diverse radici di una equazione irriduttibile da risolversi, e quindi non sempre se ne conoscono i loro gruppi direttamente, come nelle equazioni che danno la divisione delle funzioni circolari ed ellittiche. Perciò non basta conoscere le condizioni di risolubilità per radicali da verificarsi sui gruppi; ma è necessario di trasformar quelle in altre facili a verificarsi direttamente sui coefficienti. Galois ebbe in vista più specialmente le condizioni relative ai gruppi, Abel ai coefficienti. Io ho sviluppato prima quelle, e poi le ho trasformate in queste.

La determinazione in particolare della natura dei gruppi di tutte le equazioni risolubili per radicali, consisterà nella ricerca del massimo moltiplicatore decomponibile in divisori di prima classe, dell'ultimo gruppo che deve esser pure di prima classe, e di grado eguale a quello dell'equazione o a un divisore del medesimo (v. n. 18, 2° e 19).

21. Passiamo ora a determinare come si possano coi coefficienti costruire alcune risolventi che abbiano proprietà particolari meno difficili a verificarsi di quelle della risolvente generale di Galois, quando appartengono a equazioni risolubili per radicali.

Abbiamo già veduto che il gruppo di queste equazioni è il prodotto di più gruppi di prima classe. Sia H il gruppo totale, e $G, G', G'', \ldots G^{(\nu)}$ i suoi divisori respettivamente di grado $\mu, \mu', \mu'', \ldots, \mu^{(\nu)}$, dove μ è eguale al grado n della equazione, o a un divisore del medesimo, e tutti sono numeri primi.

L'ultimo radicale da aggiungersi dovrà esser variabile per le sostituzioni dell'ultimo divisore G (v. n. 19), e quindi per le sostituzioni circolari su tutte quante le radici se μ è primo, e se no, per il prodotto di più sostituzioni circolari su μ radici ciascuna: dovrà inoltre esser radice di una equazione binomia, la quale abbia il termine noto R razionale, allorchè siano state aggiunte altre funzioni variabili per le sostituzioni di tutti gli altri divisori, e quindi invariabile per le sostituzioni circolari sopra μ radici: dunque potrà sempre

prendersi per ultimo radicale da aggiungersi $\sqrt[\mu]{R}$, essendo μ un divisore del grado, e R la nota espressione di Lagrange

$$R = \left\{ \sum_{t=0}^{t=n-1} \alpha^t x_t \right\}^{\mu},$$

dove α è dato dalla equazione

$$\sum_{r=0}^{r=\mu-1} \alpha^r = 0.$$

I gradi $\mu', \mu'', \ldots \mu^{(\nu)}$ degli altri divisori di H sono tutti $< n$, perchè il numero delle permutazioni di un gruppo non può contenere fattori primi maggiori del numero delle lettere; dunque si potrà prendere un gruppo prodotto dei divisori di H

$$\Gamma = G' G'' \ldots G^{(i)},$$

il grado del quale sia

$$\delta = \mu' \mu'' \ldots \mu^{(i)} < n.$$

Eseguiamo sulle x_t contenute in R tutte le sostituzioni di Γ, avremo δ valori per R. Costruiamo la equazione di grado δ che li ha per radici. Per averne i coefficienti basta determinare una sola funzione F simmetrica dei δ valori delle R; poichè la nota teorica delle funzioni simili ci dà il modo di esprimer quelli in funzion razionale di questa. Eseguendo quante e quali si vogliono sostituzioni sulle x_t contenute nella F, si avranno altrettanti valori che tutti saranno radici di una equazione in generale di grado molto elevato a coefficienti razionali. e che potrà chiamarsi *risolvente lagrangiana* dal sommo geometra che la usò il primo. Poichè ogni funzione simmetrica dei valori che prende F per le δ sostituzioni di Γ', sono razionali se

$$\Gamma' = G^{(i+1)} G^{(i+2)} \ldots G^{(\nu)},$$

e in conseguenza

$$\delta' = \mu^{(i+1)} \mu^{(i+2)} \ldots \mu^{(\nu)};$$

la risolvente lagrangiana dovrà esser riduttibile, e avere un fattore razionale di grado δ'. Se non è $\delta' < n$, operando sopra questo fattore posto a zero, il gruppo del quale è Γ', come abbiamo operato sulla proposta, si farà dipendere da una di grado $< n$, e da un'altra che sarà di grado $< \delta'$, e così seguitando si avranno tante equazioni tutte di grado minore della proposta, dalla risoluzione delle quali dipenderà la risoluzione di questa. I gruppi di tutte le risolventi sono tutti evidentemente i successivi divisori di H; dunque esse saranno risolubili per radicali quando è la proposta.

L'applicazione diretta e generale di questo metodo suppone la cognizione precedente del gruppo della equazione da risolversi. Ma vedremo come anche senza conoscere il gruppo, essendo dati soltanto i coefficienti della equazione esistono certi modi di applicarlo, differenti secondo la natura del numero al quale è eguale il grado della equazione, tali che se con essi non si può ottenere la risoluzione voluta, possiamo esser certi che essa è impossibile. Questi modi sono quelli stessi proposti da Lagrange. L'Abel aveva veduto questo pregio del metodo inventato da quel sommo geometra, e i teoremi annunziati nel frammento della sua Memoria postuma: *Sur la résolution algèbrique des équations*, sono diretti tutti a dimostrarlo.

22. La risolvente lagrangiana in tutti i casi, tranne alcuni nei quali il grado è potenza di un numero primo, deve sempre avere un fattore razionale di primo grado. È curioso di conoscere se, tolto questo fattore, è ulteriormente riduttibile, e se lo è, di determinare il grado e la natura dei fattori razionali che la dividono. Io ho trovato un metodo generale per risolvere questo problema, e qui passo ad esporlo.

La radice U della risolvente lagrangiana, data dal fattore razionale di primo grado, è invariabile per tutte le sostituzioni del gruppo H della equazione. Le altre radici sono tutti i valori che prende U per tutte le sostituzioni che non appartengono a H. Deriviamo H per mezzo di una di queste φ, e poi il gruppo derivato deriviamolo successivamente per tutte le sostituzioni $\theta_0\, \theta_1\, \theta_2 \ldots \theta_{n-2}$ di H; le funzioni invariabili rispettivamente per tutte le sostituzioni di questi derivati

(20) $$D_\varphi H,\ D_{\varphi\theta_0} H,\ D_{\varphi\theta_1} H,\ D_{\varphi\theta_2} H,\ \ldots\ D_{\varphi\theta_{n-2}} H$$

saranno altrettante radici della risolvente, che indicheremo con le lettere

(21) $$R_0\, R_1\, R_2 \ldots R_{n-1}\,.$$

Alcune di queste potranno anche essere eguali tra loro; ma ancorchè siano tutte differenti le sostituzioni di H non faranno che permutarle una nell'altra; dunque le funzioni simmetriche delle medesime saranno invariabili per le sostituzioni di H e quindi razionali; onde *la risolvente lagrangiana se avrà un fattore di grado primo ammetterà anche più fattori razionali di grado non superiore al grado del gruppo della equazione, quando questa sia risolubile per radicali.*

Poichè il gruppo di una equazione non contiene altre sostituzioni che quelle per le quali è invariabile una funzione delle radici razionalmente esprimibile per i coefficienti (v. n. 6): il gruppo della equazione che ha per radici le (21) sarà eguale a H: dunque *i fattori razionali nei quali è riduttibile la risolvente lagrangiana sono tutti risolubili per radicali, se lo è la proposta.*

Affinchè alcune delle (21) siano eguali tra loro, e che il grado del fattore razionale sia perciò minore del grado del gruppo H, è necessario che alcuni dei (20) siano eguali, ossia per alcuni valori di m e m_1

(22) $$D_{\varphi\theta_m}H = D_{\varphi\theta_{m_1}}H\,;$$

e quindi

$$\theta_a\,\varphi\theta_m = \theta_{a_1}\,\varphi\theta_{m_1}$$

e moltiplicando a destra per θ_α a sinistra per θ_μ essendo

$$\theta_\alpha\,\theta_{a_1} = 1 \quad \theta_m\,\theta_\mu = 1$$

e

$$\theta_\alpha\,\theta_a = \theta_b\,, \qquad \theta_{m_1}\,\theta_\mu = \theta_c\,;$$

si ottiene

(23) $$\theta_b\,\varphi = \varphi\,\theta_c\,;$$

dunque dovrà essere φ una sostituzione di un moltiplicatore di alcuno dei divisori di H. Questo poi è sufficiente, perchè con un processo inverso dalla (23) si può facilmente dedurre la (22). Dunque *il numero dei fattori razionali della risolvente lagrangiana di grado* α (*e* α *sarà sempre un divisore del grado* n *del gruppo della equazione*) *è eguale al numero delle sostituzioni dei massimi moltiplicatori dei gruppi di grado* $\frac{n}{\alpha}$ *divisori del gruppo* H *della proposta.*

II.

Della risolubilità per radicali delle equazioni di grado primo.

23. *Affinchè una equazione irriduttibile di grado primo sia risolubile per radicali, è necessario e sufficiente che il suo gruppo non ammetta altre sostituzioni che quelle comprese nel simbolo*

(24) $$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{ai+b} \end{pmatrix},$$

e che in conseguenza tutte le sue radici siano funzioni razionali di due qualunque tra loro.

L'ultimo divisore del gruppo di una equazione di grado primo risolubile per radicali non ha altre sostituzioni che le potenze di

(25) $$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}$$

(v. n. 19): il suo massimo moltiplicatore contiene solo le potenze di

(26) $$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i\rho} \end{pmatrix},$$

dove ϱ è radice primitiva del grado (v. Parte I, n. 24), e quindi ha tutti i divisori di prima classe (v. Parte I, n. 35); dunque è necessario e sufficiente che tutte le sostituzioni del gruppo siano i prodotti delle differenti potenze della (25) con quelle della (26), cioè le sostituzioni comprese nel simbolo (24).

Le (24) non possono dare due permutazioni che abbiano più di una lettera allo stesso posto [1]: dunque tutte le radici debbono esser funzioni razionali di due qualunque tra loro (v. n. 12); e questo è sufficiente, come già dimostrai in una mia Nota: *Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni di grado primo* [2]: e come si deduce facilmente dal n. 13. Le (24) dando non più di $\mu(\mu-1)$ permutazioni, e per il n. 3 solo avendosi $1.2\ldots\mu=\mu(\mu-1)$, tutte le equazioni di grado primo superiore a 3 non sono in generale risolubili per radicali.

24. *Affinchè una equazione di grado μ primo sia risolubile per radicali è necessario e sufficiente che la risolvente lagrangiana ammetta un fattore razionale di primo grado.*

Le radici della risolvente lagrangiana sono in questo caso

$$\sum_{h=1}^{h=\mu-1}\left(\sum_{i=0}^{i=\mu-1}\alpha^i x_{i\varrho^h}\right)^{\mu},$$

dove

$$\sum_{m=0}^{m=\mu-1}\alpha^m=0$$

e ϱ radice primitiva di μ [3]. Questa funzione è evidentemente invariabile per tutte le sostituzioni (25) e (26) del gruppo [4]: dunque la risolvente ha una radice razionale; e questo basta perchè col metodo di Lagrange si possano ottenere tutte le radici espresse per radicali.

Passiamo a determinare gli altri fattori razionali della *risolvente*. Poichè il gruppo delle (25) ha per massimo moltiplicatore quello delle sostituzioni date dalle (26), basterà determinare il moltiplicatore di questo ultimo. In questo caso la equazione (14) della prima parte, diviene

$$\psi(\varrho i)=\varrho^m\,\psi(i)$$

che ha per integrale

$$\psi(i)=i^m$$

---

(1) Vedi: *Annali di scienze mat. e fis*, compilati da B. Tortolini, t. II, p. 8; (od anche p. 19 di questo volume).

(2) Ivi, p. 14: (od anche p. 23 di questo volume).

(3) Ivi.

(4) Ivi.

dunque la *risolvente lagrangiana delle equazioni di grado μ primo ha tanti fattori razionali di grado μ, quante sono le sostituzioni ψ cioè quanti i numeri primi inferiori a μ: gli altri sono di grado $\mu(\mu-1)$, e tutti poi risolubili per radicali.*

III.

Delle equazioni il grado delle quali è il prodotto di più numeri primi differenti.

25. *Una equazione il grado della quale è il prodotto di numeri primi differenti non può esser risolubile per radicali, se il suo gruppo non è a lettere congiunte.*

Poichè abbiamo veduto che l'ultimo gruppo di una equazione risolubile per radicali dev'esser di grado primo p divisore del grado μ della equazione (v. n. 19); e che il massimo gruppo che lo abbia per divisore è (v. Parte I, n. 26, 27, 28) a lettere congiunte quando i fattori di μ sono differenti tra loro.

26. *Una equazione irriduttibile il grado* $\mu = \mathrm{pq}$ *della quale ha dei fattori primi differenti non può essere risolubile per radicali, se non è decomponibile in* p *fattori razionali di grado* q, *coll'aggiunzione delle sole radici di una equazione di grado* p.

Distinguiamo con un apice h le lettere di uno stesso sistema, con un altro k il sistema al quale appartengono, avremo per il teorema precedente che tutte le sostituzioni del gruppo dovranno essere della forma

$$\begin{pmatrix} x_{h,k} \\ x_{\varphi(h),\varphi(k)} \end{pmatrix}.$$

Siano $F_0\, F_1\, F_2 \ldots F_{p-1}$ altrettante funzioni ciascuna delle lettere di uno stesso sistema, e invariabili per le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x_{h,k} \\ x_{\varphi(h),k} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Esse saranno radici di una equazione di grado p il gruppo della quale contiene soltanto le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x_{h,k} \\ x_{h,\psi(k)} \end{pmatrix}; \tag{28}$$

e poichè esse sono variabili per tutte le sostituzioni (28), aggiunte ridurranno il gruppo alle sole (27). Dunque le funzioni invariabili per quelle saranno razionalmente cognite; e quindi anche le funzioni simmetriche di ogni sistema di radici: dunque per l'aggiunzione delle p radici F_k la proposta si ridurrà in p fattori razionali di grado q, come volevamo dimostrare.

È evidente che le funzioni simmetriche delle F, ossia i coefficienti della equazione della quale esse sono radici, saranno invariabili per tutte le

sostituzioni del gruppo, e quindi razionali, e la risolvente Lagrangiana, che in questo caso è di grado

$$\frac{1.2.3...\mu}{(p-1)\,p\,(1.2...q)^p}\text{ [1]}$$

dovrà avere un fattore razionale di primo grado se p è primo; se no, dovrà esser riduttibile parimente la equazione che dà la F, e così di seguito, finchè non si arrivi a una di grado primo; per la quale vale quello che abbiamo stabilito nel paragrafo precedente. Lo stesso deve dirsi dei fattori razionali di grado q, i quali posti a zero danno direttamente le radici.

Le condizioni esposte nei due teoremi dei n. 25 e 26, non sono sufficienti; ma le condizioni sufficienti sono già in esse contenute: perchè rimangono ridotte a quelle delle equazioni di grado primo, che tali sono le ultime equazioni irriduttibili alle quali si arriva con questo metodo.

Quando una equazione irriduttibile è di grado pq, e p e q sono numeri primi differenti, indicando le radici colle lettere

$$\begin{matrix} x_{0,0} & x_{1,0} & \cdots\cdots & x_{p-1,0} \\ x_{0,1} & x_{1,1} & \cdots\cdots & x_{p-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ x_{0,q-1}, & x_{1,q-1} & \cdots\cdots & x_{p-1,q-1} \end{matrix}$$

i casi di risolubilità sono i soli tre seguenti:

1°. Quando il gruppo della equazione è di grado

$$p^q(p-1)^q\,q\,(q-1)$$

e le sue sostituzioni sono date da

$$\begin{pmatrix} x_{i,0} \\ x_{\varphi(i),0} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{\varphi(i),1} \end{pmatrix},\ldots \begin{pmatrix} x_{i,q-1} \\ x_{\varphi(i),q-1} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} x_{i,h} \\ x_{i,\psi(h)} \end{pmatrix}.$$

2°. Quando è di grado

$$q^p(q-1)^p\,p\,(p-1)$$

e le sostituzioni sono

$$\begin{pmatrix} x_{0,i} \\ x_{0,\varphi(i)} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{1,\varphi(i)} \end{pmatrix},\ldots \begin{pmatrix} x_{p-1,i} \\ x_{p-1,\varphi(i)} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{h,i} \\ x_{\psi(h),i} \end{pmatrix}.$$

3°. Se il gruppo è di grado

$$pq\,(p-1)\,(q-1)$$

e le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x_{i,h} \\ x_{\varphi(i),\psi(h)} \end{pmatrix}.$$

In tutti questi simboli dovrà aversi

$$\varphi(i) = ai + b\,,\quad \psi(h) = a'h + b'$$

essendo a e b numeri interi qualunque $< p$, a' e $b' > q$.

---

[1] V. Serret, *Cours d'Alg. sup.*, p. 240.

Le risolventi lagrangiane delle equazioni di grado p e q dalle quali si fa dipendere la proposta, debbono inoltre aver tutte un fattore razionale di primo grado (v. n. 24). Facendo $p = 2, q = 3$ si hanno i tre casi di risolubilità delle equazioni di 6° grado, sviluppati e dimostrati da Luther nel t. 36 del Giornale di Crelle.

27. Da ciò che abbiamo stabilito nel numero precedente si deduce immediatamente che il grado del gruppo di una equazione di grado $m = pq$, dove p e q sono differenti, non deve esser maggiore di $1.2 \ldots q.\ 1.2 \ldots p$. Ora il gruppo di una equazione di grado pq in generale è di grado $1.2.3.pq$; dunque affinchè sia risolubile per radicali dovrà aversi

$$1.2.3 \ldots pq \leqq 1.2.3 \ldots q\,.\,1.2.3 \ldots p\,;$$

o anche

$$q + 1\,.\,q + 3 \ldots pq \leqq 1.2.3 \ldots. p$$

lo che evidentemente non può essere se p e $q > 1$; dunque l'equazioni i gradi delle quali ammettono dei fattori primi differenti, non sono *in generale* risolubili per radicali.

IV.

Delle equazioni il grado delle quali è la potenza di un numero primo.

28. *Se il gruppo* K *di una equazione risolubile per radicali di grado* p^ν (p *essendo un numero primo*) *non è a lettere congiunte, deve necessariamente*: 1°. *non contenere altre sostituzioni che della forma*

$$(29) \qquad \left\{ \begin{matrix} x_k \\ x_{\sum\limits_{r=0}^{r=\nu-1} B_r k^{p^r} + B_\nu} \end{matrix} \right\}.$$

(k *e i* B_r *essendo radici di* $x^{p^\nu} \equiv x$ (mod. p.)); *e in conseguenza essere di grado*, *o eguale a*

$$M = p^\nu (p^\nu - 1)(p^\nu - p) \ldots (p^\nu - p^{\nu-1}),$$

o a un divisore di M; *e tutte le radici della equazione debbon essere funzioni razionali di* $\nu + 1$ *tra loro.* 2°. *Essendo sempre*

$$H = K_0 G G_1 G_2,$$

dove K_0 *ha soltanto sostituzioni della forma*

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+k_0} \end{pmatrix},$$

e G, G_1, G_2 *hanno il medesimo significato che al n.* 38*; il gruppo* G_1 *il grado del quale è un divisore di*

$$\frac{(p^\nu-1)(p^\nu-p)\dots(p^\nu-p^{\nu-1})}{2(p-1)},$$

deve essere decomponibile in gruppi di prima classe.

L'ultimo gruppo deve essere di grado p (v. n. 19), dunque (v. n. 28) il massimo gruppo che lo ha per ultimo divisore o è a lettere congiunte, o non contiene altre sostituzioni che le (29) e il suo grado è un divisore di M, e non è decomponibile in gruppi di prima classe altro che quando lo è G_1 (v. Parte I, n. 38).

Le funzioni non simmetriche delle $\nu+1$ radici che hanno per apici

$$0, \lambda, i, i^2 \dots i^{\nu-1},$$

o di altre $\nu+1$ delle radici della congruenza $x^{p^\nu} \equiv x \pmod{p}$, delle quali nessuna si possa esprimere linearmente per altre (v. Parte I, n. 32) sono variabili per tutte le sostituzioni del gruppo: dunque (v. n. 6), tutte le radici possono esprimersi razionalmente per esse.

La prima condizione del teorema contiene la seconda quando $p^\nu = 4, = 9$ (v. Parte I, n. 38).

29°. *Affinchè una equazione irriduttibile di grado* p^ν (p *essendo numero primo e* ν *qualunque) sia risolubile per radicali, è necessario e sufficiente o che essa sia decomponibile in* $p^{\nu-\beta}$ *equazioni ognuna di grado* p^β, *i coefficienti delle quali siano funzioni razionali delle radici di una sola equazione di grado* $p^{\nu-\beta}$, *o che ciascuna delle radici possa prender la forma*

$$x = A + \sqrt[\mu]{S_0} + \sqrt[\mu]{S_1} + \dots + \sqrt[\mu]{S_\delta},$$

essendo A *razionale, e le* S, *radici di una equazione di grado* $\delta < p^\nu$, *i coefficienti della quale siano o razionali o funzioni razionali di radici di equazioni di gradi minori di* $p^\nu - 1$: *e che sì nell'un caso che nell'altro le equazioni dalle quali si fa così dipender la proposta siano risolubili per radicali.*

Il gruppo della equazione o sarà a lettere congiunte, o sarà il gruppo K del numero precedente. Se è a lettere congiunte, è evidente che si verifica il primo caso del teorema (v. n. 26). Se è eguale a K passiamo a dimostrare che si deve necessariamente verificare il secondo.

La espressione lagrangiana del numero 21 sarà in questo caso

$$S_0 = \left\{ \sum_{t=0}^{t=p-1} \alpha^t \sum_{h=1}^{h=p^{\nu-1}} x_{t+\sigma_h} \right\}^p,$$

essendo α radice immaginaria p^{esima} della unità, e rappresentando con σ_h la espressione

$$a_1 i + a_2 i^2 - \dots a_{\nu-1} i^{\nu-1}$$

per una combinazione qualunque di valori numerici delle a minori di p. Essa è invariabile per le p^ν sostituzioni circolari del gruppo K_0. Ora tra i seguenti e successivi moltiplicatori di K_0 nel gruppo K se ne potranno prendere alcuni in modo che il loro prodotto sia del più alto grado $< p^\nu$, cioè al più eguale a $p^\nu - 1$. Chiamiamo questo gruppo Γ e δ il suo grado.

Se eseguiamo tutte le sostituzioni immaginabili sulle x_t contenute nella S_0, avremo M valori differenti per la medesima,

(30) $$S_0\, S_1\, S_2 \dots S_{M-1}\,,$$

essendo, come è facile a dimostrarsi,

$$M = \frac{1.2.3.4 \dots (p^\nu - 1)\, p^\nu}{p\,(1.2.3 \dots p^{\nu-1})^p}\,.$$

Le sostituzioni di K eseguite sulle x_t della S_0 non potranno dare più di m dei valori (30), chiamando m il massimo comun divisore di M e di

$$M' = (p^\nu - 1)(p^\nu - p)(p^\nu - p^2)(p^\nu - p^{\nu-1})\,.$$

Quelle di Γ non potranno dare più di δ valori (30), e δ dovrà essere divisore di m.

Ora costruiamo la equazione che ha per radici i δ valori (30) ottenuti colle sostituzioni di Γ. Il grado della risolvente lagrangiana che ne darà i coefficienti sarà al più eguale a $\frac{M}{\delta}$: e poichè facendo tutte le sostituzioni di K nelle funzioni simmetriche F di quei δ valori, le quali sono invariabili per le sostituzioni $K_0\,\Gamma$, non si possono avere più di $\frac{m}{\delta}$ valori differenti, essendo $K_0\,\Gamma$ un divisore di K, la risolvente sarà riduttibile, e avrà un fattore razionale di grado non maggiore di $\frac{m}{\delta}$.

Dalla forma delle S è facile dedurre, rammentando il metodo già usato nell'Algebra, che le radici avranno la forma

$$x = A + \sqrt[\mu]{S_0} + \sqrt[\mu]{S_1} + \dots\dots + \sqrt[\mu]{S_{\delta-1}}\,,$$

A essendo il coefficiente del secondo termine della equazione.

Se $\frac{m}{\delta} < p^\nu - 1$ è già dimostrato il teorema: ma quando non è, col metodo Lagrangiano è evidente che si potrà abbassare la equazione che dà la F finchè non si giunga a una risolvente di grado $< p^\nu - 1$.

Consideriamo ora alcuni casi particolari.

1°. Sia $\nu = 2$, $p = 2$, sarà $M = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{2(1\,.\,2)^2} = 3$, $M' = 3\,.\,2$, onde $m = 3$, e poichè δ deve essere un fattore di m, sarà eguale a 3; e il grado del fattore razionale della risolvente lagrangiana sarà eguale a $\frac{m}{\delta} = 1$.

2°. Se $\nu = 2$, $p = 3$; sarà $M = \frac{1.2.3....7.8.9}{3(1.2.3)^3} = 2^4.5.7$, $M' = 2^4.3$; $m = 2^4$, $\delta = 8$; $\frac{m}{\delta} = 2$.

3°. Se $\nu = 3$, $p = 2$; $M = \frac{1.2....7.8}{2(1.2.3.4)^2} = 5.7$, $M' = 7.6.4$, $m = 7$, $\delta = 7$; $\frac{m}{\delta} = 1$.

Le risolventi lagrangiane per l'equazioni di 4° e 8° grado debbono aver un fattor razionale di 1°. grado: per quelle di 9° al più di secondo.

30. Una equazione il gruppo della quale sia $> M$, avendo M il valore del n. 28, e che abbia per grado una potenza di un numero primo, non può esser risolubile per radicali (v. n. 28). Deve dunque aversi, se le radici non hanno delle particolari relazioni tra loro

$$p^\nu(p^\nu - 1)(p^\nu - p)\ldots(p^\nu - p^{\nu-1}) \geqq p^\nu(p^\nu - 1)(p^\nu - 2)\ldots 3.2.1,$$

o anche

$$(p^\nu - p)(p^\nu - p^2)\ldots(p^\nu - p^{\nu-1}) \geqq (p^\nu - 2)(p^\nu - 3)\ldots 3.2.1.$$

Ora questo non ha luogo in generale altro che per i casi seguenti

$$\begin{array}{llll} \nu = 1, & p = 1; & \nu = 2, & p = 1 \\ & p = 2; & & p = 2; \\ & p = 3; & & \end{array}$$

dunque le equazioni il grado delle quali è potenza di un numero primo ed è > 4, non sono risolubili per radicali *in generale*; ma di quelle il grado delle quali non è potenza di un numero primo non ve ne è alcuna (v. n. 23 e 26); quindi *nessuna equazione di grado* > 4 *può essere in generale risolubile per radicali.*

Determinato se una equazione algebrica è o non è risolubile per radicali, o per irrazionali primitivi di altre date classi, rimane a eseguire la risoluzione effettiva. Abbiamo avuto luogo di accennare il modo che può tenersi per la medesima; però appena il grado della equazione è un poco elevato, i calcoli necessarî divengono di una lunghezza da stancare ogni paziente calcolatore. Ma le ricerche intraprese con successo da molti distinti geometri in questi ultimi tempi sulle quantità complesse della natura della espressione di Lagrange, fanno sperare che l'Algebra potrà non solo vantaggiarsi dell'acquisto di nozioni più determinate e più estese sulla natura degl'irrazionali primitivi, ma giungerà anche ad arrichirsi di Tavole che diano gli elementi coi quali si possa con più speditezza condurre il calcolo della costruzione dei valori delle radici coi coefficienti; come ne abbiamo un esempio per le equazioni binomie, nei bei lavori dei sigg. Plana e Kummer.

VI.

SOPRA L'ABBASSAMENTO DELLE EQUAZIONI MODULARI DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. IV, pp. 81-100, Roma, 1853).

---

1. È noto che la equazione algebrica

$$F(x)=0\,, \tag{1}$$

la quale serve a determinare $\operatorname{sn}\frac{\omega}{p}$ quando

$$\frac{\omega}{4}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,,$$

e p è un numero primo qualunque, ha p^2-1 radici comprese nella espressione

$$x_{m,n}=\operatorname{sn}\left(\frac{m\omega+n\bar{\omega}i}{p}\right), \tag{2}$$

dove m e n sono numeri interi qualunque $<p$, che possono essere separatamente eguali a zero, $i=\sqrt{-1}$, e

$$\frac{\bar{\omega}}{4}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(1-k^2)x^2)}}\,.$$

Costruiamo una funzione razionale delle p^2-1 radici (2), che muti valore per qualunque sostituzione si faccia sulle medesime. Sia questa

$$U=f\,(x_{0,1}\,x_{0,2}\dots x_{0,p-1}\,x_{1,0}\,x_{1,1}\dots x_{1,p-1}\dots x_{p-1,0}\dots\dots x_{p-1,p-1})\,. \tag{3}$$

Dalle formule dell'addizione e della moltiplicazione delle amplitudini, abbiamo

$$x_{m,n}=\frac{\operatorname{sn}\frac{m\omega}{p}\operatorname{cn}\frac{n\bar{\omega}i}{p}\operatorname{dn}\frac{n\bar{\omega}i}{p}+\operatorname{sn}\frac{n\bar{\omega}i}{p}\operatorname{cn}\frac{m\omega}{p}\operatorname{dn}\frac{m\omega}{p}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{m\omega}{p}\operatorname{sn}^2\frac{n\bar{\omega}i}{p}} \tag{4}$$

e qualunque sia α, indicando con $\psi_1, \psi_2, \ldots.$ funzioni razionali, se q è pari

$$(5)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn} q\alpha = \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha\, \psi_1(\operatorname{sn}^2\alpha), \\ \operatorname{cn} q\alpha = \psi_2(\operatorname{sn}^2\alpha), \\ \operatorname{dn} q\alpha = \psi_3(\operatorname{sn}^2\alpha); \end{cases}$$

e se q è dispari

$$(6)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn} q\alpha = \operatorname{sn}\alpha\, \psi'\ (\operatorname{sn}^2\alpha), \\ \operatorname{cn} q\alpha = \operatorname{cn}\alpha\, \psi''\ (\operatorname{sn}^2\alpha), \\ \operatorname{dn} q\alpha = \operatorname{dn}\alpha\, \psi'''(\operatorname{sn}^2\alpha). \end{cases}$$

Quando $\alpha = \frac{\omega}{p}, = \frac{\tilde{\omega} i}{p}$, osservando che $p+1$ è pari, si ricava dalla seconda e dalla terza delle (5)

$$(7)\qquad \begin{cases} \operatorname{cn}\alpha = \operatorname{cn}(p+1)\,\alpha = \psi_2(\operatorname{sn}^2\alpha) \\ \operatorname{dn}\alpha = \operatorname{dn}(p+1)\,\alpha = \psi_3(\operatorname{sn}^2\alpha). \end{cases}$$

Sostituendo i valori (7) nei secondi membri delle (5) e delle (6), questi diverranno tutti funzioni razionali di sn α, e quindi, applicando quelle formule alla riduzione della (4), si avrà $x_{m,n}$ dato da una funzione razionale di $\operatorname{sn}\frac{\omega}{p}$ e di $\operatorname{sn}\frac{\tilde{\omega} i}{p}$, qualunque siano i numeri interi m ed n. Dunque il secondo membro della (3) potrà esprimersi per una funzione razionale φ delle medesime quantità, cioè

$$(8)\qquad \mathrm{U} = \varphi\left(\operatorname{sn}\frac{\omega}{p},\ \operatorname{sn}\frac{\tilde{\omega} i}{p}\right).$$

Il prodotto

$$(9)\qquad \Omega = \Pi\varphi\left[\operatorname{sn}\left(\frac{b'\omega + b\tilde{\omega} i}{p}\right), \operatorname{sn}\left(\frac{a'\omega + a\tilde{\omega} i}{p}\right)\right],$$

esteso a tutte le combinazioni dei valori interi di a, b, a' e $b' < p$, sarà evidentemente una funzione razionale e simmetrica delle radici della (1), e quindi razionale dei coefficienti della medesima.

I fattori di Ω sono eguali ai valori che prende U quando nella (3) si pongono $\frac{b'\omega + b\tilde{\omega} i}{p}$ e $\frac{a'\omega + a\tilde{\omega} i}{p}$ rispettivamente in luogo di $\frac{\omega}{p}$ e di $\frac{\tilde{\omega} i}{p}$, e che corrispondono alle permutazioni delle radici che si ottengono nella medesima (3) colle sostituzioni

$$(10)\qquad \begin{Bmatrix} x_{m,n} \\ x_{b'm+a'n,\, bm+an} \end{Bmatrix}.$$

Dunque Ω è una funzione razionale delle radici della (1), invariabile soltanto

per le sostituzioni (10), ed è razionale dei coefficienti, quindi il gruppo G della (1) avrà tutte le sue sostituzioni comprese nel simbolo (10) ([1]).

2. Una qualunque delle sostituzioni (10) cangia contemporaneamente

$$x_{m,n} \text{ in } x_{b'm+a'n,bm+an} = x_{m',n'} ,$$

$$x_{hm,hn} \text{ in } x_{h(b'm+a'n),h(bm+an)} = x_{hm',hn'} ;$$

e questo avviene per i $p-1$ valori di $h<p$: dunque le $p-1$ lettere, gli indici delle quali hanno i loro rapporti geometrici congrui rispetto al modulo p, dalle sostituzioni di G o sono permutate tra loro, o in altre che hanno anch'esse tutte quante congrui i rapporti dei loro indici, e quindi il gruppo G è a lettere congiunte, i sistemi di queste sono $p+1$ e ciascuno è composto di $p-1$ lettere.

Indicando con q un numero qualunque $<p$, i tipi delle lettere dei $p+1$ sistemi saranno

$$x_{q,0} \quad x_{q,q} \quad x_{q,2q} \dots x_{q,(p-1)q} \quad x_{0,q} , \tag{11}$$

o anche ponendo

$$x_{q,iq} = y_{q,i} ,$$

$$y_{q,0} \quad y_{q,1} \quad y_{q,2} \dots \quad y_{q,p-1} \quad y_{q,\frac{1}{0}} ; \tag{12}$$

e le (10) eseguite sulle (12) diverranno della forma

$$\begin{Bmatrix} y_{q,i} \\ y_{\rho q,\frac{ai+b}{a'i+b'}} \end{Bmatrix} , \tag{13}$$

poichè

$$x_{a'qi+b'q,aqi+bq} = y_{(a'i+b')q,\frac{ai+b}{a'i+b'}} .$$

Da ciò è facile dedurre

$$G = HK , \tag{14}$$

rappresentando con H un gruppo le sostituzioni del quale sono date da

$$\begin{Bmatrix} y_{q,i} \\ y_{\rho q,i} \end{Bmatrix} , \tag{15}$$

e K essendo un altro gruppo che ha le sue sostituzioni comprese nella espressione

$$\begin{Bmatrix} y_{q,i} \\ y_{q,\frac{ai+b}{a'i+b'}} \end{Bmatrix} . \tag{16}$$

([1]) Vedi il n. 6 della parte II della mia Memoria, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, nel t. III degli Annali di Sc. mat. e fis. compilati da B. Tortolini, Roma, 1852; (od anche pp. 31-80 di questo volume).

Il gruppo H è il prodotto di altri tutti di prima classe, poichè tutte le sue sostituzioni (15) sono potenze della unica nella quale ϱ è radice primitiva di p [1].

Pertanto la (1) che ha per gruppo G sarà riduttibile in $p+1$ fattori di grado $p-1$, e razionali quando siano aggiunte le radici di una sola equazione di grado $p+1$, il gruppo della quale sia K, e le equazioni che nascono ponendo a zero questi fattori avranno per gruppo H, e quindi saranno tutte risolubili per radicali [2], come già dimostrò l'Abel [3].

3. La equazione di grado $p+1$ e di gruppo K, dalla quale dipende la risoluzione della (1), può avere per radici quali si vogliano funzioni razionali delle radici della (1), basta solo che siano invariabili per le sostituzioni (15) e variabili per le (16): dunque potrà essere la equazione modulare che serve alla trasformazione dell'ordine p^{esimo}, la quale ha le sue $p+1$ radici della forma

$$(17)\qquad \lambda_t = k^p \Pi \left\{ \frac{\operatorname{cn} q \left(\frac{\omega + t\bar{\omega} i}{p} \right)}{\operatorname{dn} q \left(\frac{\omega + t\bar{\omega} i}{p} \right)} \right\}^4 = k^p \Pi \left\{ \psi \left[\operatorname{sn} \alpha \left(\frac{\omega + t\bar{\omega} i}{p} \right) \right] \right\}^4 .$$

Il prodotto Π deve essere esteso ai $\frac{p-1}{2}$ valori di q non $> \frac{p-1}{2}$, ψ è una funzione razionale come si deduce dalle (5), (6) e (7), e t ha i $p+1$ valori

$$(18)\qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1,\ \frac{1}{0}\ [4].$$

Con questi numeri rappresenteremo per brevità le radici stesse (17), e le sostituzioni (16) del gruppo K diverranno

$$(19)\qquad \left\{ \begin{matrix} t \\ \dfrac{at+b}{a't+b'} \end{matrix} \right\}.$$

Non per tutte le combinazioni dei valori di a, b, a' e b' si hanno dalla (19) sostituzioni effettive o *reali*. Quando due o più radici sono con-

---

[1] Vedi la mia Memoria, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, parte I, n. 35.

[2] Vedi la Memoria citata, parte II, n. 18, 2°.

[3] V. Abel, *Oeuvres complètes*, t. I, n. XII dell'edizione di Holmboe (n. XVI della nuova edizione di Sylow e Lie).

[4] V. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, n. 21, 24.

vertite in una medesima radice, la sostituzione che dà una tale permutazione è assurda e la diremo *immaginaria*. Sia

$$\left\{ \begin{matrix} t \\ \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \end{matrix} \right\}$$

una delle (19) immaginaria, e siano t e t' le due radici che rimangono convertite in una stessa radice; avremo

$$\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \equiv \frac{\alpha t' + \beta}{\gamma t' + \delta} \pmod{p},$$

e quindi

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(t - t') \equiv 0:$$

congruenza che è soddisfatta soltanto quando il determinante

$$\mathrm{D} = \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0\,,$$

oppure

$$t \equiv t'\,.$$

Dunque sostituzioni immaginarie sono soltanto quelle, il determinante delle quali è congruo a zero rispetto al modulo p [1].

Le (19) possono ridursi ai tre tipi seguenti:

$$(20)\quad \left\{ \begin{matrix} t \\ \\ at + b \end{matrix} \right\}, \qquad (21)\quad \left\{ \begin{matrix} t \\ \dfrac{1}{at + b} \end{matrix} \right\}, \qquad (22)\quad \left\{ \begin{matrix} t \\ \dfrac{at + b}{t + b'} \end{matrix} \right\}.$$

La (20) e la (21) sono sempre reali, e dànno $p(p-1)$ sostituzioni ciascuna; la (22) contiene $p^2(p-1)$ sostituzioni, poichè a può avere $p-1$ valori differenti, e p ne possono avere b e b'; ma $p(p-1)$ di queste sono immaginarie, altrettante essendo le combinazioni dei valori di a, b e b' per le quali è soddisfatta la congruenza

$$\mathrm{D} \equiv ab' - b \equiv 0.$$

In conseguenza la totalità delle sostituzioni (19) sarà di

$$p\,(p-1)\,(p+1),$$

e questo sarà il grado del gruppo K della equazione modulare.

---

[1] Questa proprietà è generale per tutte le sostituzioni sopra $p^\nu - 1$ lettere, della forma

$$(a)\qquad \left\{ \begin{matrix} x_{m,n,\dots r} \\ x_{a'm+b'n+\cdots\cdots+h'r,\,a''m+b''n+\cdots+h''r,\dots a^{(\nu)}m+b^{(\nu)}n+\cdots+h^{(\nu)}r} \end{matrix} \right\};$$

dove si riguardino al solito eguali gl'indici congrui rispetto al modulo p.

Poniamo

$$\theta = \left\{ \begin{matrix} i \\ \dfrac{ai+b}{a'i+b'} \end{matrix} \right\}, \quad \psi = \left\{ \begin{matrix} i \\ \dfrac{\alpha i+\beta}{\alpha' i+\beta'} \end{matrix} \right\},$$

$$D = ab' - a'b \ , \quad D' = \alpha\beta' - \alpha'\beta \, ,$$

e conveniamo con Legendre, $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$ significhi che m è residuo quadratico di p, $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$, che n è non residuo di p. Facendo il prodotto delle due sostituzioni, avremo

$$\theta\psi = \left\{ \begin{matrix} i \\ \dfrac{a_1 i + b_1}{a'_1 i + b'_1} \end{matrix} \right\}$$

Affinchè due sistemi d'indici differenti $m, n, \ldots, r$; $m', n', \ldots, r'$ siano convertiti in uno stesso sistema è necessario e sufficiente che siano verificate le congruenze

$$\begin{aligned} a' m + b' n + \ldots + h' r &\equiv a' m' + b' n' + \ldots + h' r' \\ a'' m + b'' n + \ldots + h'' r &\equiv a'' m' + b'' n' + \ldots + h'' r' \\ &\ldots \\ a^{(\nu)} m + b^{(\nu)} n + \ldots + h^{(\nu)} r &\equiv a^{(\nu)} m' + b^{(\nu)} n' + \ldots + h^{(\nu)} r' \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} a' (m-m') + b' (n-n') + \ldots + h' (r-r') &\equiv 0 \\ a'' (m-m') + b'' (n-n') + \ldots + h'' (r-r') &\equiv 0 \\ &\ldots \\ a^{(\nu)} (m-m') + b^{(\nu)} (n-n') + \ldots + h^{(\nu)} (r-r') &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ora questo sistema di congruenze non può esser soddisfatto a meno che non sia il determinante

$$D = \left\{ \begin{matrix} a' & b' & \ldots & h' \\ a'' & b'' & \ldots & h'' \\ \ldots & & & \\ a^{(\nu)} & b^{(\nu)} & \ldots & h^{(\nu)} \end{matrix} \right\} \equiv 0$$

oppure

$$m \equiv m', \quad n \equiv n' \ \ldots \ r \equiv r'.$$

Dunque *è necessario e sufficiente, affinchè una sostituzione* (*a*) *sia immaginaria, che il suo determinante sia congruo a zero rispetto al modulo* p.

dove

$$a_1 = a\alpha + a'\beta\ , \qquad b_1 = b\alpha + b'\beta\ ,$$
$$a'_1 = a\alpha' + a'\beta'\ , \qquad b'_1 = b\alpha' + b'\beta'\ ,$$

e il determinante

$$\Delta = a_1 b'_1 - a'_1 b_1 = \mathrm{DD}'\ ;$$

quindi se

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right), \text{ sarà } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1\ ,$$

e se

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) = -\left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right) \quad , \quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1.$$

Da ciò segue che, quando

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) = 1 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right) = -1\ ,$$

la derivata θ_1 di θ per mezzo di ψ avrà anch'essa il determinante D_1 residuo, poichè essendo

$$\theta\psi = \psi\theta_1$$

sarà

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_1}{p}\right) = -1$$

e quindi

$$\left(\frac{\mathrm{D}_1}{p}\right) = 1.$$

Dunque, se si deriva per mezzo di una sostituzione il determinante della quale è non residuo di p, un gruppo M formato con tutte le (19) reali che hanno il determinante residuo, e che sarà di grado $\frac{p(p-1)(p+1)}{2}$, si avrà un derivato eguale al primitivo: e quindi

$$\mathrm{K} = \mathrm{MN}\ , \tag{23}$$

indicando con N il gruppo delle due permutazioni, la cui sostituzione differente dall'unità ha il determinante non residuo di p [1].

Quando $p+1$ è il prodotto di fattori primi differenti, il gruppo M è primo perchè altrimenti dovrebbe essere a lettere congiunte, e quindi il suo

---

[1] Prendo questa occasione per notare la inconvenienza della trasformazione in indici frazionari, che ho fatta nella mia Memoria, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* parte I, n. 38, per dimostrare questa decomposizione nel caso generale: la dimostrazione rimane la stessa, mantenendo gl'indici interi.

grado divisore di 1. 2 . . . α. 1. 2. 3. . . . β, essendo $\alpha\beta = p + 1$; il che è impossibile contenendo nel suo grado il fattore primo $p > \alpha$ e $> \beta$ [1]. D'altronde $p + 1$ ha sempre dei fattori primi differenti, a meno che non sia eguale a una potenza di 2, poichè altrimenti p sarebbe un numero pari e quindi o non primo o eguale a due.

4. Se il gruppo M non si può decomporre in gruppi di prima classe, è però la somma di p gruppi derivati simili nei casi determinati dal seguente

Teorema. *Allorchè le potenze dispari $< p - 2$ di una radice primitiva g del numero primo $p = 4n + 3$, per la quale $\left(\frac{g-1}{p}\right) = 1$, soddisfanno o l'una o l'altra delle due congruenze*

$$(24)\qquad g^2 x^2 - g(g+1)x + 1 \equiv 0\,,$$
$$(25)\qquad g^2 x^2 - (g+1)x + 1 \equiv 0\,,\quad (\text{mod.}\,p)$$

il gruppo M è la somma di p gruppi derivati simili a lettere congiunte.

Sia g^{2i+1} una radice della (24), sostituendo e riducendo, avremo

$$(26)\qquad g^2(g^{2i+1}-1)^2 + g(g-1)(g^{2i+1}-1) - g + 1 \equiv 0.$$

Ora è facile verificare le due identità

$$(27)\quad (g^{2i+2}-1)^2 = g^2(g^{2i+1}-1)^2 + 2g(g-1)(g^{2i+1}-1) + (g-1)^2$$

$$(28)\quad (g^{2i+3}-1)(g^{2i+1}-1) = g^2(g^{2i+1}-1)^2 + (g^2-1)(g^{2i+1}-1).$$

Sottraendo la (27) dalla (28) moltiplicata per g, si ha

$$g(g^{2i+3}-1)(g^{2i+1}-1) - (g^{2i+2}-1)^2$$
$$= (g-1)\Big(g^2(g^{2i+1}-1)^2 + g(g-1)(g^{2i+1}-1) - g + 1\Big) \equiv 0,$$

onde

$$(29)\qquad g\,\frac{g^{2i+3}-1}{g^{2i+2}-1} \equiv \frac{g^{2i+2}-1}{g^{2i+1}-1}\,.$$

Dalla (26) si ricava anche

$$g(g^{2i+1}-1)(g^{2i+2}-1) \equiv g - 1$$

la quale poichè $\left(\frac{g-1}{p}\right) = 1$, dà

$$\left(\frac{g^{2i+2}-1}{p}\right) = -\left(\frac{g^{2i+1}-1}{p}\right):$$

e quindi

$$(30)\qquad \frac{g^{2i+2}-1}{g^{2i+1}-1} \equiv g^{2\gamma+1};$$

---

[1] Vedi la Memoria più volte citata, parte I, cap. 2, § III.

dove γ è un intero $< \frac{p-1}{2}$; e dalle (29) e (30)

$$\frac{g^{2i+3}-1}{g^{2i+2}-1} \equiv g^{2\gamma}. \tag{31}$$

Se g^{2i+1} è una radice della (25), sostituendo si ha

$$g^2(g^{2i+1}-1)^2+(2g+1)(g-1)(g^{2i+1}-1)+g(g-1)\equiv 0, \tag{32}$$

e sottraendo la (27) moltiplicata per g dalla (28)

$$(g^{2i+3}-1)(g^{2i+1}-1)-g(g^{2i+2}-1)^2$$
$$\equiv(1-g)\Big(g^2(g^{2i+1}-1)^2+(2g+1)(g-1)(g^{2i+1}-1)+g(g-1)\Big)\equiv 0,$$

onde

$$\frac{g^{2i+3}-1}{g^{2i+2}-1}\equiv g\,\frac{g^{2i+2}-1}{g^{2i+1}-1}. \tag{33}$$

Dalla (25) si rileva

$$g^{2i+2}(g^{2i+2}-1)\equiv g^{2i+1}-1,$$

e quindi

$$\left(\frac{g^{2i+2}-1}{p}\right)=\left(\frac{g^{2i+1}-1}{p}\right)$$

che dà

$$\frac{g^{2i+2}-1}{g^{2i+1}-1}\equiv g^{2\gamma}, \tag{34}$$

e sostituendo nella (33)

$$\frac{g^{2i+3}-1}{g^{2i+2}-1}\equiv g^{2\gamma+1}. \tag{35}$$

Le sostituzioni

$$(36)\quad \left\{ \begin{matrix} i \\ g^{2\delta}\dfrac{i-g^{2\alpha+1}}{i-g^{2\alpha}} \end{matrix} \right\}, \qquad (37)\quad \left\{ \begin{matrix} i \\ g^{2\delta+1}\dfrac{i-g^{2\alpha}}{i-g^{2\alpha+1}} \end{matrix} \right\}$$

appartengono al gruppo M, poichè i loro rispettivi determinanti

$$g^{2(\delta+\alpha)}(g-1), \qquad g^{2(\delta+\alpha)+1}(1-g)$$

sono ambedue residui quadratici di p, essendo

$$\left(\frac{g-1}{p}\right)=-\left(\frac{1-g}{p}\right)$$

quando p è della forma $4n+3$, e perciò $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$.

Valendosi delle notazioni di Cauchy, adottata anche dal Serret, si può porre la (36) sotto la forma

$$\begin{Bmatrix} 0 & \infty & g^2 & g^3 & \ldots\ldots & g^{2\alpha} & g^{2\alpha+1} & \ldots\ldots & g^{p-1} & g \\ g^{2\delta+1} & g^{2\delta} & g^{\mu_1} & g^{\nu_1} & \ldots\ldots & \infty & 0 & \ldots\ldots & g^{\mu_t} & g^{\nu_t} \end{Bmatrix}$$

dove $t = \frac{p-1}{2}$, e

$$g^{\mu_\beta} \equiv g^{2\delta} \frac{g^{2(\alpha-\beta)+1} - 1}{g^{2(\alpha-\beta)} - 1} = g^{2\delta} \frac{g^{2(\beta-\alpha)-1} - 1}{g^{2(\beta-\alpha)} - 1},$$

$$g^{\nu_\beta} \equiv g^{2\delta} \frac{g^{2(\alpha-\beta)} - 1}{g^{2(\alpha-\beta)-1} - 1} = g^{2\delta} \frac{g^{2(\beta-\alpha)} - 1}{g^{2(\beta-\alpha)+1} - 1}.$$

Se prendiamo il primo dei due valori di g^{μ_β} e di g^{ν_β} quando $\beta < \alpha$, e il secondo quando $\beta > \alpha$, il massimo valore del più piccolo dei tre esponenti di g formati colla differenza di α e di β, che ivi compariscono, sarà $p-3$, perchè $\frac{p-1}{2}$ è il più gran valore che possono avere α e β. Quando g inalzato a questo più piccolo dei tre esponenti sarà radice della (24), si avrà dalle (30) e (31)

$$g^{\mu_\beta} = g^{2\gamma}, \quad g^{\nu_\beta} = g^{2\gamma+1};$$

e quando sarà radice della (25), le (34) e (35) daranno

$$g^{\mu_\beta} = g^{2\gamma+1}, \quad g^{\nu_\beta} = g^{2\gamma}.$$

Anche alla (37) si potrà dar la forma

$$\begin{Bmatrix} 0 & \infty & g^2 & g^3 & \ldots\ldots & g^{2\alpha} & g^{2\alpha+1} & \ldots\ldots & g^{p-1} & g \\ g^{2\delta} & g^{2\delta+1} & g^{\mu_1} & g^{\nu_1} & \ldots\ldots & 0 & \infty & \ldots\ldots & g^{\mu_t} & g^{\nu_t} \end{Bmatrix},$$

dove

$$g^{\mu_\beta} \equiv g^{2\delta+1} \frac{g^{2(\beta-\alpha)} - 1}{g^{2(\beta-\alpha)-1} - 1} = g^{2\delta+1} \frac{g^{2(\alpha-\beta)} - 1}{g^{2(\alpha-\beta)+1} - 1},$$

$$g^{\nu_\beta} \equiv g^{2\delta+1} \frac{g^{2(\beta-\alpha)+1} - 1}{g^{2(\beta-\alpha)} - 1} = g^{2\delta+1} \frac{g^{2(\alpha-\beta)-1} - 1}{g^{2(\alpha-\beta)} - 1};$$

d'onde si deduce analogamente

$$g^{\mu_\beta} = g^{2\gamma+1}, \quad g^{\nu_\beta} = g^{2\gamma},$$

oppure

$$g^{\mu_\beta} = g^{2\gamma}, \quad g^{\nu_\beta} = g^{2\gamma+1}.$$

Dunque le sostituzioni (36) e (37) o permutano tra loro le lettere di ciascuna delle seguenti $\frac{p+1}{2}$ coppie

(38) $\qquad 0\,\infty,\ g^2\,g^3,\ g^4\,g^5,\ \ldots\ldots,\ g^{2\alpha}\,g^{2\alpha+1},\ \ldots\ldots,\ g^{p-1}\,g,$

ossivero permutano le coppie stesse l'una nell'altra.

Questa proprietà non appartiene ad alcuna delle altre sostituzioni del gruppo M, e del tipo (22). Infatti, supponiamo che goda di questa proprietà la seguente

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ a \dfrac{i-b}{i-c} \end{matrix} \right\} : \tag{39}$$

essa avrà anche la forma

$$\left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & bc & \dots \\ \dfrac{ab}{c} & a & 0\ \infty & \dots \end{matrix} \right\};$$

in conseguenza dovrebbe aversi

$$b \equiv g^{2\gamma}, \qquad c \equiv g^{2\gamma+1},$$

ovvero

$$b \equiv g^{2\gamma+1}, \quad c \equiv g^{2\gamma};$$

e affinchè fossero congiunte $\frac{ab}{c}$ e a, nel primo caso dovrebbe aversi $a \equiv g^{2\delta+1}$, e nel secondo $a \equiv g^{2\delta}$, e quindi la (39) o sarebbe una delle (37) o una delle (36).

Quanto alle sostituzioni del gruppo M e dei tipi (20) e (21) è facile a vedersi che godranno la proprietà in quistione soltanto le seguenti

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ g^{2\delta} i \end{matrix} \right\}, \tag{40}$$

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ \dfrac{1}{g^{2\delta+1} i} \end{matrix} \right\}. \tag{41}$$

La (40) si può considerare come un caso particolare della (36), quello cioè in cui invece della coppia $g^{2\alpha+1}\ g^{2\alpha}$ si ponga $0\ \infty$; e la (41) si può dedurre egualmente dalla (37).

Pertanto le uniche sostituzioni (36), (37), (40), (41) del gruppo M saranno a lettere congiunte, cioè o permuteranno tra loro le lettere delle coppie (38) o permuteranno le coppie l'una nell'altra; e poichè i loro prodotti devono godere la stessa proprietà, esse costituiranno un gruppo L. Il grado di questo gruppo si otterrà numerando tutti i valori possibili delle costanti che compariscono nelle espressioni di quelle sostituzioni, perchè sono tutte quante reali. Ora δ può avere $\frac{p-1}{2}$ valori differenti, e α ne può avere $\frac{p+1}{2}$; quindi è facile dedurre che $\frac{(p-1)(p+1)}{2}$ sarà il grado di L.

Derivando L per mezzo delle sostituzioni (19) non comprese nelle espres-

sioni (36), (37), (40), (41) si avranno p gruppi derivati simili, la somma dei quali costituirà il gruppo M di grado

$$\frac{p(p-1)(p+1)}{2}.$$

5. Quando $p = 4n + 1$ non si può, come per $p = 4n + 3$, costruire con alcune sostituzioni di M un gruppo di grado

$$\frac{(p-1)(p+1)}{2},$$

nel quale siano lettere congiunte $0\ \infty$, e le altre coppie di lettere che abbiano un rapporto non residuo quadratico di p: poichè allora se appartengono a M le (36) e (40), non vi apparterranno le (37) e (41), e viceversa (v. n. 4.). Vediamo se per sostituzioni analoghe a quelle potranno esser congiunte oltre 0 e ∞, lettere che abbiano un rapporto residuo. Siano le coppie delle lettere congiunte le seguenti

$$0\ \infty\ ,\ g\ g^3\ ,\ g^4\ g^6\ ,\ \ldots\ldots,\ g^{p-1}\ g^2.$$

Alla sostituzione

$$\begin{pmatrix} i \\ g^2 i \end{pmatrix}$$

può darsi la forma

$$\begin{Bmatrix} 0 & \infty & g & g^3 & g^4 & g^6 & \ldots & g^{p-1} & g^2 \\ 0 & \infty & g^3 & g^5 & g^6 & g^8 & \ldots & g^2 & g^4 \end{Bmatrix}:$$

onde non sarà a lettere congiunte nel modo voluto, a meno che non sia

$$g^4 \equiv 1 \ (\text{mod.}\ p),$$

cioè

$$4 = p - 1,$$

e quindi

$$p = 5.$$

Lo stesso si trova per la sostituzione

$$\begin{Bmatrix} i \\ \dfrac{1}{g^2 i} \end{Bmatrix}.$$

Dunque soltanto per $p = 5$, può tentarsi la decomposizione di M in p gruppi derivati simili e non eguali, nei quali siano congiunte le lettere che hanno un rapporto residuo. Ecco come ha luogo di fatto questa decomposizione.

Le tre sostituzioni

$$\begin{Bmatrix} i \\ \dfrac{1}{i} \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} i \\ \dfrac{1}{4i} \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} i \\ \dfrac{1}{2\dfrac{i-1}{i+1}} \end{Bmatrix},$$

e quelle che si ottengono moltiplicando le medesime tra loro, dànno il gruppo L a lettere congiunte di grado

$$\frac{(5+1)(5-1)}{2}=12:$$

questo derivato per mezzo della sostituzione

$$\begin{Bmatrix} i \\ i+1 \end{Bmatrix},$$

dà i 5 derivati simili che sommati fanno il gruppo M di grado

$$\frac{(5+1)(5-1)5}{2}=60.$$

(M)

	(L)		
∞ 0 2 3 4 1	∞ 0 3 2 4 1	∞ 0 3 2 1 4	∞ 0 2 3 1 4
2 3 4 1 ∞ 0	3 2 4 1 0 ∞	3 2 1 4 ∞ 0	2 3 1 4 0 ∞
4 1 ∞ 0 2 3	4 1 0 ∞ 3 2	1 4 ∞ 0 3 2	1 4 0 ∞ 2 3
	(L_1)		
∞ 1 3 4 0 2	∞ 1 4 3 0 2	∞ 1 4 3 2 0	∞ 1 3 4 2 0
3 4 0 2 ∞ 1	4 3 0 2 1 ∞	4 3 2 0 ∞ 1	3 4 2 0 1 ∞
0 2 ∞ 1 3 4	0 2 1 ∞ 4 3	2 0 ∞ 1 4 3	2 0 1 ∞ 3 4
	(L_2)		
∞ 2 4 0 1 3	∞ 2 0 4 1 3	∞ 2 0 4 3 1	∞ 2 4 0 3 1
4 0 1 3 ∞ 2	0 4 1 3 2 ∞	0 4 3 1 ∞ 2	4 0 3 1 2 ∞
1 3 ∞ 2 4 0	1 3 2 ∞ 0 4	3 1 ∞ 2 0 4	3 1 2 ∞ 4 0
	(L_3)		
∞ 3 0 1 2 4	∞ 3 1 0 2 4	∞ 3 1 0 4 2	∞ 3 0 1 4 2
0 1 2 4 ∞ 3	1 0 2 4 3 ∞	1 0 4 2 ∞ 3	0 1 4 2 3 ∞
2 4 ∞ 3 0 1	2 4 3 ∞ 1 0	4 2 ∞ 3 1 0	4 2 3 ∞ 0 1
	(L_4)		
∞ 4 1 2 3 0	∞ 4 2 1 3 0	∞ 4 2 1 0 3	∞ 4 1 2 0 3
1 2 3 0 ∞ 4	2 1 3 0 4 ∞	2 1 0 3 ∞ 4	1 2 0 3 4 ∞
3 0 ∞ 4 1 2	3 0 1 4 ∞ 2	0 3 ∞ 4 2 1	0 3 4 ∞ 1 2

6. Poichè le due congruenze (24) e (25) sono di secondo grado, e quindi ciascuna non può avere più di due radici incongrue, affinchè abbia luogo la decomposizione dipendente dal teorema del n. 4, non dovranno i numeri dispari $<p-2$ essere in numero >4 ossia dovrà aversi

$$\frac{p-3}{2}\leqq 4:$$

onde p dovendo anch'essere della forma $4n + 3$ e primo, non potrà essere che 7 e 11. In questi due casi però sono verificate tutte le condizioni del teorema.

1.° Caso: $p = 7$; $g = 3$ dà $\left(\frac{g-1}{p}\right) = \left(\frac{2}{7}\right) = 1$; e (25) diviene

$$2x^2 - 4x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

la quale è soddisfatta dalle potenze dispari di 3 minori di 5,

$$x \equiv 3 \ , \ \equiv 3^3 .$$

Le coppie di lettere congiunte del gruppo L saranno

$$0, \infty ; \ 2, 6; \ 4, 5; \ 1, 3;$$

2.° Caso: $p = 11$; $g = 2$ dà $\left(\frac{g-1}{p}\right) = \left(\frac{1}{11}\right) = 1$; e la (24) diviene

$$4x^2 - 6x + 1 \equiv 0 \pmod{11},$$

che ha per radici

$$x \equiv 2^3 \ , \ \equiv 2^5 .$$

La (25) dà

$$4x^2 - 3x + 1 \equiv 0 ,$$

le radici della quale sono

$$x \equiv 2 \ , \ \equiv 2^7 ;$$

e in conseguenza tutte le condizioni del teorema sono sodisfatte; e le coppie di lettere congiunte di L saranno

$$0, \infty ; \ 4, 8; \ 5, 10; \ 9, 7; \ 3, 6; \ 1, 2.$$

Da tutto ciò si raccoglie che per $p = 5, 7, 11$ il gruppo M è la somma di 5, 7, 11 gruppi L derivati simili, a lettere congiunte ciascuno; ma che questo non ha luogo per i numeri primi maggiori di questi.

7. Poichè il gruppo K della equazione modulare per l'ordine p è il prodotto del gruppo M per uno N di secondo grado, aggiunta una funzione delle radici variabile per le sole sostituzioni di M, non rimarrà che da risolversi una equazione di secondo grado [1]. Ora una funzione razionale delle radici, che per le sostituzioni di L sia invariabile, per tutte le sostituzioni M acquista p soli valori, i quali sono per ciò radici di una equazione di p^{esimo} grado; e poichè ciascuno di questi è invariabile per le sostituzioni di un solo dei gruppi derivati simili L, e variabile per quelle degli altri, aggiunti tutti, sarà ridotto il gruppo a N soltanto, e quindi aggiunto anche un radicale di secondo

[1] Vedi la mia Memoria, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, parte II, n. 10.

grado, sarà risoluta la equazione modulare [1]. L'equazione di p^{esimo} grado dalla quale dipende la risoluzione della equazione modulare nei tre casi rammentati, non può risolversi per radicali, poichè è di grado primo, e il suo gruppo, simile a M, è di grado $\frac{p(p-1)(p+1)}{2} > (p-1)$ [2]: laonde si possono stabilire i seguenti teoremi.

Teorema I. *La equazione modulare per la trasformazione dell'ordine* p^{esimo} *non è risolvibile per radicali ma può abbassarsi dal grado* $p+1$ *al grado* p, *nei tre casi di* $p = 5, 7, 11$.

Questo teorema è dovuto a Galois che lo annunziò nella ultima sua lettera a Chevalier.

Teorema II. *La equazione che serve a determinare* $\operatorname{sn} \frac{\omega}{p}$ *è decomponibile in* $p+1$ *fattori di grado* $p-1$ *risolvibili per radicali, quando si aggiungono le radici di una equazione di grado* $p+1$ *la quale non è risolvibile per radicali, ma si può abbassare al grado* p, *quando* $p = 5, 7, 11$.

Pistoia, li 27 novembre 1852.

---

(1) Vedi ivi, parte II, n. 18.

(2) Vedi ivi, parte II, n. 23.

VII.

UN TEOREMA SULLA RISOLUZIONE ANALITICA DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. V, pp. 10-17, Roma, 1854).

Due sono i problemi principali dell'Algebra. Il primo consiste nella determinazione dei valori numerici approssimati delle radici di una equazione, quando sono dati quelli dei coefficienti, e costituisce la *risoluzione numerica delle equazioni*: il secondo nell'esprimere le radici per funzioni analitiche dei coefficienti, delle quali si conoscano e il modo di determinarle numericamente allorchè è dato il valore dell'argomento, e tali proprietà che ci permettano d'introdurle nei calcoli analitici anche quando i cofficienti siano lettere, e debbano ritenersi in tutta la loro generalità; ciò che può chiamarsi la *risoluzione analitica delle equazioni.* La soluzione del primo problema si ottiene in vari modi; quella del secondo non si è potuta avere altro che per i primi quattro gradi e per certe classi di equazioni che hanno determinate relazioni tra le loro radici. Ma essa fu tentata finora soltanto con alcune delle note funzioni analitiche, cioè coi radicali e colle funzioni circolari e iperboliche, che sono insufficienti allo scopo. Anzi Ruffini che il primo dimostrò questa insufficienza, credette impossibile eseguire la risoluzione analitica anche con qualunque altra specie di trascendenti, ma la dimostrazione che volle dare della sua opinione non ha valido appoggio. Allora però non erano cognite nell'analisi molte altre funzioni dotate di nuove e singolari proprietà. Con una specie di queste, cioè colle inverse degl'integrali ultraellittici che si debbono all'Abel, io ho trovata la risoluzione analitica effettiva di qualunque equazione algebrica generale. Queste funzioni sono quelle stesse delle quali Jacobi scoprì una singolar proprietà che dà loro un aspetto d'indeterminatezza che lo indusse a trascurarle, e a introdurre invece nell'analisi le funzioni inverse a più argomenti (1). Egli trovò che gl'integrali ultraellittici hanno per i medesimi limiti un numero infinito di valori differenti tra loro tanto poco quanto

---

(1) *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis* etc., auct. C. G. J. Jacobi. Crelle, V, 13.

si vuole; ma questi valori dipendono, come il primo ha osservato Cauchy ([1]), dalla linea percorsa nella integrazione dal punto che rappresenta in un piano il valore *complesso* della variabile. Laonde, sebbene, finchè questa linea rimane indeterminata, un limite, ossia la funzione inversa può non variare col variare in un modo qualunque del valore dell'integrale, e quindi non può riguardarsi come una vera funzione del medesimo; pure quando è determinata la linea percorsa nella integrazione, la funzione inversa ritorna a variare col valore dell'integrale, ed è una vera e propria funzione analitica del medesimo. Ora negl'integrali che compariscono nelle formule dalle quali fo dipendere la risoluzione analitica delle equazioni, le linee essenzialmente distinte percorse nella integrazione dal punto corrispondente al valor *complesso* della variabile si riducono in ogni caso a un numero eguale al grado della equazione, onde risultano tutte le radici completamente determinate. Mi limiterò ora ad esporre il teorema fondamentale da cui dipende questa risoluzione; lo sviluppo e la discussione delle formule, e ciò che ho trovato intorno alla determinazione delle specie di trascendenti che occorrono per le equazioni dei differenti gradi, e per quelle classi di equazioni, che indipendentemente dal loro grado richiedono le funzioni abeliane più semplici, lo riserverò ad altri articoli che pubblicherò nei prossimi fascicoli di questi Annali.

Le radici di ogni equazione algebrica, se si riguardano i coefficienti di essa, come funzioni lineari intiere di una variabile y, soddisfano sempre una equazione differenziale della forma

$$\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = \frac{\theta(x)dx}{\sqrt{\psi(x)}},$$

dove $\varphi(y)$ è la funzione che deve annullarsi affinchè la proposta abbia radici eguali, e $\theta(x)$ e $\psi(x)$ sono funzioni razionali ed intiere di x, che non contengono y.

Sia la equazione data

$$F(x) + yf(x) = 0\,; \tag{1}$$

e

$$\varphi(y) = 0 \tag{2}$$

la equazione finale risultante dalla eliminazione di x tra la (1) e la sua derivata. Ambedue abbiano il coefficiente della più alta potenza della incognita eguale alla unità. Sia m il grado della (1), n quello della (2). Indichiamo con

$$y_1\,,\, y_2\,,\, y_3\,,\, \ldots\,,\, y_n \tag{3}$$

([1]) *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, par A. Cauchy. Paris, 1825.

le radici della (2), cioè tutti i valori di y per i quali la (1) ha radici eguali. Per $y = y_i$ la (1) abbia t'_i radici eguali a x'_i, t''_i eguali a x''_i ecc.; avremo

$$F(x) + y_i f(x) = \lambda_i(x)(x - x'_i)^{t'_i}(x - x''_i)^{t''_i} \ldots\ldots \tag{4}$$

Se deriviamo la (1), considerandovi y come funzione di x, otteniamo

$$\frac{dy}{dx} f^2(x) = F(x)f'(x) - F'(x)f(x). \tag{5}$$

Ora poichè i valori $x_i^{(v)}$ annullano la (4) e le sue $t_i^{(v)} - 1$ derivate, annulleranno anche

$$\left\{\begin{aligned}
&F(x)f'(x) - F'(x)f(x) = f'(x)\big(F(x) + y_i f(x)\big) \\
&\qquad - f(x)\big(F'(x) + y_i f'(x)\big), \\
&F(x)f''(x) - F''(x)f(x) = f''(x)\big(F(x) + y_i f(x)\big) \\
&\qquad - f(x)\big(F''(x) + y_i f''(x)\big), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F(x)f^{(t_i^{(v)}-1)}(x) - F^{(t_i^{(v)}-1)}(x)f(x) = f^{(t_i^{(v)}-1)}(x)\big(F(x) + y_i f(x)\big) \\
&\qquad - f(x)\big(F^{(t_i^{(v)}-1)}(x) + y_i f^{(t_i^{(v)}-1)}(x)\big),
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

e viceversa a ogni valore $x_i^{(s)}$ che annulla i primi membri delle (6), corrisponde un valore

$$y = -\frac{F(x_i^{(s)})}{f(x_i^{(s)})}$$

per cui da $x_i^{(s)}$ sono annullate la (1) e le sue $t_i^{(s)} - 1$ derivate. Onde, chiamando p il grado di $f(x)$ e a il coefficiente della più alta potenza di x nella medesima, avremo

$$\frac{dy}{dx} f(x)^2 = -a(m - p) \prod_1^n{}_i \prod_1^v{}_s (x - x_i^{(s)})^{t_i^{(s)}-1}, \tag{7}$$

indicando col segno Π il prodotto, come si suole, di tutti i fattori che si ottengono dando all'indice delle quantità sotto il segno tutti i valori numerici compresi tra i limiti.

Quando x è una radice qualunque della (1), abbiamo

$$F(x) + yf(x) = F(x) + y_i f(x) + (y - y_i) f(x) = 0;$$

onde

$$F(x) + y_i f(x) = -(y - y_i) f(x),$$

e anche

$$\prod_{1}^{n} {}_i \Big(\mathrm{F}(x) + y_i f(x) \Big) = (-1)^n f^n(x) \prod_{1}^{n} {}_i (y - y_i).$$

Sostituendo i valori dati dalla (4), ponendo

$$\varDelta(x) = \prod_{1}^{n} {}_i \lambda_i(x),$$

e osservando che (1)

$$\prod_{1}^{n} {}_i (y - y_i) = \varphi(y),$$

avremo

$$\varDelta(x) \prod_{1}^{n} {}_i \prod_{1}^{v} {}_s (x - x_{i^{(s)}})^{t_i^{(s)}} = (-1)^n f^n(x) \varphi(y);$$

e ricavando dalla (7) il valore del doppio prodotto,

$$\varDelta(x) \frac{dy^2}{dx^2} = a^2 (m-p)^2 (-1)^n \varphi(y) f^{n-4}(x) \prod_{1}^{n} {}_i \prod_{1}^{v} {}_s (x - x_{i^{(s)}})^{t_i^{(s)} - 2}$$

e quindi

$$(8) \qquad \frac{dy}{a(m-p)\sqrt{(-1)^n \varphi(y)}} = \frac{f^{\frac{n-4}{2}}(x) \prod_{1}^{n} {}_i \prod_{1}^{v} {}_s (x - x_{i^{(s)}})^{\frac{1}{2}(t_i^{(s)} - 2)} dx}{\sqrt{\varDelta(x)}}$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore del secondo membro per i fattori irrazionali che possono comparire nel numeratore si ottiene la equazione differenziale della forma che volevasi dimostrare.

La equazione (8) si potrebbe anche ottenere eliminando x tra la (1) e la sua derivata presa considerandovi y come funzione di x, e riducendo convenientemente la equazione finale risultante per mezzo dei valori di y e $\frac{dy}{dx}$ espressi per x. Con questo metodo che in generale è assai laborioso, pervenne Christmann alla equazione differenziale in alcuni pochi casi particolari (2).

La funzione $\varphi(y)$ ha varie proprietà degne di esser notate.

1°. Essa è eguale al prodotto dei quadrati di tutte le differenze delle radici della (1).

---

(1) Ciò nel caso che $\varphi(y) = 0$ non abbia radici multiple: altrimenti $\Pi_i(y - y_i)$ è uguale semplicemente al prodotto de' fattori di primo grado distinti della $\varphi(y)$.

V. C.

(2) *Cabbala algebraica*, auctore G. L. Christmann, Stuttgardiae, 1827. Opuscolo assai raro la conoscenza del quale la debbo alla amicizia del prof. B. Tortolini.

2°. Se s'indica con s_t la somma della potenza t^{esime} delle medesime radici, essa è eguale al determinante

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & s_{m+1} & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix} .$$

3°. È un *invariante* della funzione omogenea che si deduce dalla (1) ponendovi $x = \frac{u}{v}$ e moltiplicandola per v^m.

4°. Tutte le funzioni razionali delle radici che hanno due soli valori sono della forma $A + B\sqrt{\varphi(y)}$, dove A e B sono funzioni razionali dei coefficienti.

5°. La sua radice quadrata è la prima irrazionale che bisogna *aggiungere*, se si vuole ridurre il gruppo della equazione e risolverla per radicali. Infatti, o il gruppo non conterrà altre sostituzioni che quelle che risultano dal prodotto di un numero pari di trasposizioni e $\sqrt{\varphi(y)}$, che per queste è invariabile, sarà esprimibile razionalmente per i coefficienti, $\varphi(y)$ sarà un quadrato perfetto; ovvero il gruppo potrà decomporsi in due *eguali* che non contengano altre sostituzioni che quelle che risultano di un numero pari di trasposizioni, e che siano *derivati* uno dall'altro per mezzo di una delle sostituzioni che risultano da un numero dispari di trasposizioni; per ridurre il gruppo sarà necessario e sufficiente *aggiungere una funzione* razionale delle radici che abbia due soli valori, cioè $\sqrt{\varphi(y)}$ o una funzione razionale di $\sqrt{\varphi(y)}$

Il grado di $\varphi(y)$ non potrà essere maggiore di $m(m-1)$; potrà però ottenersi eguale ad $m-1$ riguardando nella (1) tutti i coefficienti, tranne quello di x^0, indipendenti da y.

Esempio. — Le radici di una equazione algebrica generale di quinto grado possono esprimersi algebricamente in funzione di quelle di una equazione trinomia dello stesso grado. La risoluzione analitica di queste equazioni dipende dunque da quella di una trinomia, e che può prendersi della forma

$$x^5 + 5x^3 = y .$$

Avremo in questo caso

$$F(x) = x^5 + 5x^3 ,$$
$$f(x) = -1 ,$$
$$\varphi(y) = y^2(y^2 + 108) ,$$

quindi $m = 5$, $n = 4$. I valori (3) saranno [1]

$$y_1 = 0,\ y_2 = 6i\sqrt{3},\ y_3 = -6i\sqrt{3}.$$

Le radici eguali corrispondenti a questi

$$x'_1 = 0,\ x'_2 = i\sqrt{3},\ x'_3 = i\sqrt{3};$$

i numeri delle medesime

$$t'_1 = 3,\ t'_2 = 2,\ t'_3 = 2.$$

Per mezzo di questi valori si ottiene facilmente

$$\Pi_i^{n}{}_{1}\ \Pi_s^{v}{}_{1}\,(x - x_i^{(s)})^{\frac{t_i^{(s)}-2}{2}} = \sqrt{x},$$

$$\varDelta(x) = (x^6 + 4x^4 - 8x^2 + 12)(x^2 + 5);$$

onde la (8) diviene

$$\frac{dy}{5\sqrt{y(y^2+108)}} = \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(x^2+5)(x^6+4x^4-8x^2+12)}}.$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore del secondo membro per $x^{\frac{3}{2}}$, e moltiplicando il primo membro per $\sqrt{y}$, il secondo per $\sqrt{x^5+5x^3}$, si ha

$$\frac{dy}{5\sqrt{y^2+108}} = \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+4x^4-8x^2+12}}:$$

ponendo

$$x^2 = z,$$

si ottiene finalmente

$$\frac{2dy}{5\sqrt{y^2+108}} = \frac{z\,dz}{\sqrt{z^4+4z^3-8z^2+12z}}:$$

la quale s'integra con funzioni ellittiche di terza specie a parametro logaritmico.

Pistoia, li 13 gennaio 1854.

---

[1] Nel caso presente $\varphi(y) = 0$ ha due radici nulle: quindi $\Pi_i(y - y_i) = y\,(y^2 + 108)$.
V. C.

VIII.

SOPRA LA TEORICA DELLE SOSTITUZIONI

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. VI, pp. 5-34, Roma, 1855).

Io mi propongo di pubblicare alcune Note sopra varii punti della Memoria: *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, che pubblicai negli *Annali* per l'anno 1852, per isvolgere con maggiore estensione e chiarezza i più importanti teoremi della medesima, e per dedurne alcune delle molte conseguenze delle quali sono fecondi; a ciò consigliato da un illustre geometra, che mi onora della sua amicizia. Nella Nota presente svolgerò in un modo nuovo la risoluzione dei due principali problemi relativi ai gruppi ai quali appartengono soltanto tutte le potenze di una sostituzione circolare sopra un numero di simboli non primo; dai quali, in gran parte, dipende ciò che riguarda la risolvibilità delle equazioni che servono alla divisione delle funzioni iperellittiche e dei loro periodi.

Comincierò dal richiamare le definizioni principali, modificando alcune denominazioni.

Chiamerò *disposizione* di più simboli dati, l'ordine col quale si succedono: *disposizioni incomplete* quelle che ne contengono alcuni soltanto: *disposizioni complete* quelle che li contengono tutti. Per esempio, se i simboli sono a, b, c, d; sarà una disposizione incompleta $abab$; una completa $abcd$.

Si dirà *sostituzione propria*, o semplicemente *sostituzione*, il passaggio da una disposizione completa a un' altra pure completa; le altre si diranno *sostituzioni improprie*. Così: $\binom{cdcd}{abcd}$ sarà impropria; $\binom{bcda}{abcd}$ sarà propria.

Più disposizioni costituiscono un *gruppo*, quando ogni sostituzione che serve a passare da una ad un'altra di esse, le permuta tutte quante tra loro. Le sostituzioni che servono a passare da una a tutte le altre disposizioni si dicono *appartenenti al gruppo*, e formano quel che chiama Cauchy un *sistema di sostituzioni coniugate* (1). Chiameremo *grado* del gruppo il numero delle sue disposizioni.

Diconsi *eguali* due gruppi, quando le sostituzioni appartenenti ai medesimi sono eguali.

---

(1) V. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 15 sept. 1845.

Due gruppi si dicono *derivati* uno dell'altro, quando si ottiene uno di essi, eseguendo una stessa sostituzione sulle disposizioni dell'altro. È evidente che le sostituzioni appartenenti a uno son derivate di quelle appartenenti all'altro, per rapporto a una medesima sostituzione ([1]).

Quando tutte le disposizioni di più gruppi derivati eguali formano un gruppo, le sostituzioni per mezzo delle quali si passa da uno a tutti gli altri, si dicono *sostituzioni del moltiplicatore* di uno dei derivati; e si dà il nome di *moltiplicatore* all'insieme di disposizioni che si ottiene, prendendone una da ciascuno dei derivati. Se un gruppo Γ risulta da più gruppi derivati di G e ad esso eguali e s'indica con g il moltiplicatore, si dice che è verificata la equazione simbolica

$$\Gamma = g\mathrm{G}. \tag{1}$$

Per esempio sia il gruppo Γ il seguente:

01234	02413	04321	03142
12340	24130	43210	31420
23401	41302	32104	14203
34012	13024	21043	42031
40123	30241	10432	20314

Prendendo per G uno qualunque dei quattro gruppi parziali di quinto grado, per il moltiplicatore g si potrà prendere una qualunque delle riunioni di disposizioni

01234	01234	. . . . .
02413	24130	. . . . .
04321	43210	. . . . .
03142	31420	. . . . .

e si avrà $\Gamma = g\mathrm{G}$.

Rappresentiamo le ν sostituzioni appartenenti a un gruppo Γ, con i simboli

$$1\ \theta_1\,\theta_2 \ldots \theta_{\nu-1}\,,$$

sia $\nu = mn$, e vi siano tra queste, n sostituzioni

$$1\ \theta_{\alpha_1}\,\theta_{\alpha_2} \ldots \theta_{\alpha_{n-1}}$$

appartenenti a un gruppo G; se la equazione simbolica

$$\theta_r\,\theta_{\alpha_i} = \theta_{\alpha_t}\,\theta_r \tag{2}$$

è soddisfatta qualunque siano i ed r, il gruppo Γ risulterà da m gruppi

---

[1] Vedi i capitoli I, II della parte I della mia Memoria, *Sulla risoluzione dell'equazioni algebriche* nel t. III degli Ann. di Sc. mat. e fis. compilati da B. Tortolini, Roma, 1852 (od anche pp. 31-80 di questo volume).

derivati eguali a G, e chiamando g il moltiplicatore, avremo $\Gamma = g\mathrm{G}$, come abbiamo veduto nella Memoria sopra citata ([1]).

Nell'esempio di sopra le sostituzioni appartenenti a Γ sono le 20 comprese nella notazione

$$\begin{pmatrix} ai+b \\ i \end{pmatrix}$$

dove a può avere i valori 1, 2, 3, 4; e b i valori 0, 1, 2, 3, 4, e si riguardano eguali i numeri congrui rapporto al modulo 5. Appartengono a un gruppo G tutte le sostituzioni comprese nella espressione

$$\begin{pmatrix} i+b \\ i \end{pmatrix},$$

e si ha

$$\begin{pmatrix} ai \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i+b \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+ab \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ai \\ i \end{pmatrix}.$$

Onde chiamando g il gruppo cui appartengono le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} ai \\ i \end{pmatrix};$$

avremo

$$\Gamma = g\mathrm{G}.$$

Chiameremo *gruppo complesso* un gruppo, quando i simboli delle sue disposizioni possono dividersi in più sistemi composti di uno stesso numero di simboli differenti, in modo che le sostituzioni che gli appartengono o permutano soltanto i simboli di uno stesso sistema tra loro, o permutano tutti i simboli di uno stesso sistema in quelli di un altro. Diremo *simboli congiunti* quelli di uno stesso sistema; *intransitive rapporto a questa divisione in sistemi*, le sostituzioni che permutano soltanto i simboli congiunti tra loro, e *transitive complesse* quelle che permutano i sistemi tra loro. Indichiamo con

$$1\ s_1\ s_2 \ldots s_{n-1}$$

le sostituzioni *intransitive* di un gruppo *complesso* Γ; con

$$1\ \sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_{m-1}$$

le *transitive complesse*; con G il gruppo cui appartengono le s, con g quello cui appartengono le σ. Poichè σ e s sono permutabili tra loro, avremo

$$\sigma s = s\sigma;$$

e quindi sarà soddisfatta la equazione simbolica

$$\Gamma = g\mathrm{G},$$

e anche

$$\Gamma = \mathrm{G}g.$$

(1) Parte I, n. 23.

Esempio:

$$\Gamma = \begin{cases} G = \begin{cases} 012345 \\ 120453 \\ 201534 \end{cases} \\ \\ G = \begin{cases} 345012 \\ 453120 \\ 534201 \end{cases} \end{cases} \quad g = \begin{cases} 012345 \\ 345012 \end{cases}, \qquad \Gamma = \begin{cases} g = \begin{cases} 031425 \\ 304152 \end{cases} \\ g = \begin{cases} 142503 \\ 415230 \end{cases} \\ g = \begin{cases} 250314 \\ 523041 \end{cases} \end{cases} \quad G = \begin{cases} 031425 \\ 142503 \\ 250314 \end{cases}$$

$$\Gamma = gG \qquad\qquad \Gamma = Gg$$

Dalla equazione simbolica (2) dipende la soluzione dei due problemi seguenti:

1°. Dato un gruppo, trovare i gruppi derivati eguali dai quali risulta.

2°. Dato un gruppo, trovarne tutti i moltiplicatori, ossia il massimo moltiplicatore.

Nel primo è dato nella equazione simbolica (1) Γ, e si cercano G e g; nel secondo è dato G e si cercano g e Γ.

Ci limiteremo, nel risolvere il primo problema, a quei gruppi ai quali appartengono soltanto tutte le potenze di una sostituzione circolare sopra un numero di simboli non primo.

Considereremo separatamente i due casi: 1° che il numero dei simboli sia una potenza di un numero primo; 2° che sia il prodotto di potenze di numeri primi differenti.

1° Caso. Il numero dei simboli sia una potenza ν di un numero primo p; e siano questi rappresentati dai numeri

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, p^\nu - 2, p^\nu - 1 .$$

Indichiamo con Γ il gruppo cui appartengono soltanto tutte le potenze della sostituzione circolare

$$S = \begin{pmatrix} i+1 \\ i \end{pmatrix} .$$

Poichè un numero l qualunque può porsi sempre sotto la forma

$$l = mp^\nu + m_1 p^{\nu-1} + m_2 p^{\nu-2} + \ldots + m_{\nu-1} p + m_\nu ,$$

dove $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu$ sono $< p$; e poichè

$$S^{p^\nu} = 1 ,$$

avremo

$$S^l = (S^{p^{\nu-1}})^{m_1} (S^{p^{\nu-2}})^{m_2} \ldots (S^p)^{m_{\nu-1}} S^{m_\nu} ;$$

e ponendo

$$S^{p^{\nu-t}} = S_t ;$$

anche

(3) $$S^t = S_1^{m_1} S_2^{m_2} S_3^{m_3} \dots S^{m_\nu};$$

e si avrà la relazione

$$S_t^{p^n} = S_{t-n}.$$

Indichiamo rispettivamente con $G_1, G_2, \dots, G_\nu$ il gruppo al quale appartengono tutte e sole le potenze di S_1 e le riunioni di p disposizioni ciascuna, che si ottengono colle potenze $< p$ delle $S_2, S_3, \dots, S_\nu$. Dividiamo i simboli in $p^{\nu-1}$ sistemi composti ciascuno di p simboli che formino una progressione aritmetica la cui ragione sia $p^{\nu-1}$, cioè della forma

$$a, a + p^{\nu-1}, a + 2p^{\nu-1}, \dots, a + (p-1)p^{\nu-1},$$

dove sia $a < p^{\nu-1}$; le potenze di S_1 saranno intransitive rispetto a questi sistemi di simboli congiunti, e le potenze $< p$ di S_2 transitive complesse. Questi sistemi li diremo di primo ordine, e indicando con Γ' il gruppo cui appartengono tutte le potenze di S_2, avremo

$$\Gamma' = G_2 G_1.$$

Dividiamo questi sistemi in $p^{\nu-2}$ sistemi di second'ordine, composti ciascuno di p sistemi di primo ordine, nei quali i valori di a formino una progressione aritmetica la cui ragione sia $p^{\nu-2}$. Le potenze di S_2 e di S_1 saranno intransitive rispetto a questi sistemi di second'ordine, e le potenze $< p$ di S_3 transitive complesse; onde, indicando con Γ'' il gruppo cui appartengono tutte le potenze di S_3, sarà

$$\Gamma'' = G_3 \Gamma' = G_3 G_2 G_1.$$

Così seguitando si arriva facilmente a stabilire la equazione

(4) $$\Gamma = G_\nu G_{\nu-1} \dots G_2 G_1.$$

Se le $S_2, S_3, \dots, S_\nu$ si riguardano come rispettivamente eseguibili sopra i sistemi di secondo, terzo,... ordine, sono tutte di ordine p; e $G_1, G_2, \dots, G_\nu$ sono tutti gruppi di ordine p, e perciò *primi* [1]. Con ciò rimane stabilito il seguente

Teorema. *Un gruppo a cui appartengono soltanto tutte le potenze di una sostituzione circolare sopra un numero di simboli che è potenza di un numero primo, è un gruppo complesso, e può riguardarsi come il prodotto di tanti gruppi primi, quante sono le unità contenute nell'esponente del numero dei simboli.*

Esempio

Sia $p = 2$, $\nu = 3$. Sia Γ il gruppo di ottavo grado, cui appartengono tutte

---

[1] Vedi la mia Memoria, *Sulla risoluzione dell'equazioni algebriche*, Parte I, n. 21.

e sole le potenze di $S = \begin{pmatrix} i+1 \\ i \end{pmatrix}$; G_1, G_2, G_3 quelli ai quali rispettivamente appartengono le sostituzioni

$$S_1 = \begin{pmatrix} i+2^2 \\ i \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} i+2 \\ i \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} i+1 \\ i \end{pmatrix};$$

$$\Gamma = \begin{cases} G_2 = \begin{cases} G_1 = \begin{cases} 04\ 62\ 15\ 73 \\ 40\ 26\ 51\ 37 \end{cases} \\ G_1 = \begin{cases} 26\ 04\ 37\ 15 \\ 62\ 40\ 73\ 51 \end{cases} \end{cases} \\ G_2 = \begin{cases} G_1 = \begin{cases} 15\ 73\ 26\ 04 \\ 51\ 37\ 62\ 40 \end{cases} \\ G_1 = \begin{cases} 37\ 15\ 40\ 26 \\ 73\ 51\ 04\ 62 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Il sistema di ν gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ dal prodotto dei quali risulta il gruppo Γ, non è unico. Passiamo ora a determinare tutti i sistemi differenti che dànno Γ col loro prodotto.

Un simbolo qualunque h, essendo un numero $< p^\nu$, ha la forma

$$h = xp^{\nu-1} + x_1 p^{\nu-2} + \ldots + x_{\nu-2}\, p + x_{\nu-1},$$

dove $x, x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$ sono numeri $< p$. Sostituiamo in questa espressione i^{n-1} a $p^{\nu-n}$, essendo i una radice di una congruenza irriduttibile di grado ν, per rapporto al modulo p; avremo

$$h = x + x_1 i + x_2 i^2 + \ldots + x_{\nu-1} i^{\nu-1}.$$

Così i simboli diverranno eguali alle p^ν radici della congruenza

$$z^{p^\nu} \equiv z \ (\text{mod.}\ p). \ (^1) \tag{5}$$

Poniamo

$$S'_t = \begin{pmatrix} h + i^{t-1} \\ h \end{pmatrix},$$

finchè $m < p$, avremo

$$S_t^m = S'^m_t,$$

e quindi

$$S^l = S'^{m_1}_1 S'^{m_2}_2 \ldots . S'^{m_\nu}_\nu. \tag{6}$$

---

(1) V. Serret, *Cours d'Alg. sup.*, 2ᵉ. édition, Leçon XXV.

Poichè, qualunque sia t,

$$S'^{p}_{t} = \binom{h + p i^{t-1}}{h} = \binom{h}{h} = 1 ,$$

tutti i fattori di S^t sono di ordine p.

Formeranno un sistema di simboli congiunti di primo ordine, quelli che non differiscono altro che per i valori di x, un sistema di second'ordine quelli che differiscono soltanto per i valori di x e di x_1, e così discorrendo.

Nell'esempio di sopra prendiamo per congruenza irriduttibile di terzo grado,

$$i^3 + i + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Facendo le opportune sostituzioni, avremo

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} G_2 = \left\{ \begin{array}{l} G_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0,1;\, i, i+1;\, i^2, i^2+1;\, i^2+i, i^2+i+1 \\ 1,0;\, i+1, i;\, i^2+1, i^2;\, i^2+i+1, i^2+i \end{array} \right. \\ \\ G_1 = \left\{ \begin{array}{l} i, i+1;\, 0,1;\, i^2+i, i^2+i+1;\, i^2, i^2+1 \\ i+1, i;\, 1,0;\, i^2+i+1, i^2+i;\, i^2+1, i^2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ G_2 = \left\{ \begin{array}{l} G_1 = \left\{ \begin{array}{l} i^2, i^2+1;\, i^2+i, i^2+i+1;\, 0,1;\, i, i+1 \\ i^2+1, i^2;\, i^2+i+1, i^2+i;\, 1,0;\, i+1, i \end{array} \right. \\ \\ G_1 = \left\{ \begin{array}{l} i^2+i, i^2+i+1;\, i^2, i^2+1;\, i, i+1;\, 0,1 \\ i^2+i+1, i^2+i;\, i^2+1, i^2;\, i+1, i;\, 1,0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Siano $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, ν radici differenti della congruenza (5), e non sia verificata nessuna relazione lineare

$$(7) \qquad u_1 k_1 + u_2 k_2 + u_3 k_3 + \ldots u_\nu k_\nu \equiv 0 \pmod{p},$$

dove $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sono numeri qualunque $< p$, escluso il caso che tutti siano congrui a zero: io dico che i p^ν valori della espressione

$$(a) \qquad h \equiv x k_1 + x_1 k_2 + \ldots + x_{\nu-1} k_\nu ,$$

dove $x, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ sono numeri $< p$, dànno tutte le p^ν radici della congruenza (5). Infatti, le p^ν espressioni di questa forma sono tutte radici della (5); poichè

$$(x k_1 + x_1 k_2 + \ldots + x_{\nu-1} k_\nu)^{p^\nu} \equiv x k_1^{p^\nu} + x_2 k_2^{p^\nu} + \cdots + x_{\nu-1} k_\nu^{p^\nu}$$
$$\equiv x k_1 + x_1 k_2 + \ldots + x_{\nu-1} k_\nu \pmod{p} :$$

e due che non hanno congrui i loro coefficienti numerici, non possono esser congrue; poichè se

$$x k_1 + x_1 k_2 \ldots + x_{\nu-1} k_\nu \equiv y k_1 + y_1 k_2 + \ldots + y_{\nu-1} k_\nu ,$$

e $x, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ non fossero tutti rispettivamente congrui a $y, y_1, \ldots, y_{\nu-1}$, sarebbe soddisfatta la congruenza lineare

$$(x-y)\,k_1 + (x_1 - y_1)k_2 + \ldots + (x_{\nu-1} - y_{\nu-1})\,k_\nu \equiv 0\,,$$

dove i coefficienti numerici non sarebbero tutti congrui a zero, contro il supposto.

È evidente la reciproca; che non si possono esprimere linearmente tutti i simboli per mezzo di ν radici tra le quali esista una congruenza lineare.

Sostituiamo nella formula (6) a S'^m_t il suo valore $\binom{h+mi^{t-1}}{h}$ e riduciamo; avremo

$$S^l = \binom{h+m_1+m_2 i + \ldots + m_\nu i^{\nu-1}}{h} = \binom{h+\mathrm{H}}{h}\,,$$

ponendo

$$\mathrm{H} \equiv m_1 + m_2 i \ldots + m_\nu\, i^{\nu-1}\,.$$

Ora per ciò che abbiamo dimostrato, H si può esprimere linearmente per $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$; cioè si può porre

$$\mathrm{H} \equiv \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots + \mu_\nu k_\nu\,;$$

e quindi

$$S^l = \binom{h+\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots + \mu_\nu k_\nu}{h}\,;$$

e ponendo

$$\Sigma_t = \binom{h+k_t}{h}\,,$$

avremo

$$S^l = \Sigma_1^{\mu_1}\,\Sigma_2^{\mu_2} \ldots \Sigma_{\nu-1}^{\mu_{\nu-1}}\,\Sigma_\nu^{\mu_\nu}\,. \tag{8}$$

Come nel caso precedente potremo riguardare come formanti parte di sistemi di t^{esimo} ordine tutti quei simboli h dati dalla (a) che non differiscono altro che per i valori di $x, x_1, \ldots, x_{t-1}$ e chiamando Γ_t il gruppo cui appartengono soltanto le p potenze di Σ_t, si otterrà

$$\Gamma = \Gamma_\nu\,\Gamma_{\nu-1} \ldots \Gamma_3\,\Gamma_2\,\Gamma_1\,. \tag{9}$$

Le decomposizioni in gruppi primi sono identiche, quando si ottengono prendendo per $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ i due sistemi di valori

$$k_1\,,\; k_2\,, \ldots,\, k_\nu$$

$$n_1 k_1\,,\; n_2 k_2\,, \ldots,\, n_\nu k_\nu$$

dove $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sono numeri qualunque. Infatti i simboli che appartengono

a un sistema di ordine qualunque t nel primo caso, sono i p^t che differiscono solo per il valore della espressione

$$(10) \qquad xk_1 + x_1k_1 + \ldots + x_{t-1}k_t,$$

e quelli che appartengono a un sistema dello stesso ordine nel secondo caso, sono quelli che differiscono solo nella parte del loro valore:

$$(11) \qquad n_1xk_1 + n_2x_1k_2 + \ldots + n_tx_{t-1}k_1.$$

Ora i valori dati dalle due espressioni (10) (11) sono eguali quando siano presi in ordine differente, ossia servendosi di una locuzione del sig. Sylvester, sono disgiuntivamente eguali; dunque le corrispondenti divisioni in sistemi, e quindi le rispettive decomposizioni in gruppi primi, sono identiche nei due casi.

Per ottenere una decomposizione non si potrà prendere per nessuna delle radici $k_1 k_2, \ldots, k_\nu$ un valore $\equiv 0$; perchè altrimenti sarebbe soddisfatta una congruenza lineare tra le medesime. Così, se fosse $k_1 \equiv 0$, sarebbe verificata la (7), quando si ponesse $u_1 \equiv 1$, $u_2 \equiv 0$, $u_3 \equiv 0, \ldots, u_\nu \equiv 0$. Onde per k_1 si potranno prendere $p^\nu - 1$ valori differenti, e questi a $p-1$ a $p-1$ hanno dei rapporti numerici, e quindi dànno decomposizioni identiche. Dunque per la differenza dei valori di k_1 si hanno $\dfrac{p^\nu - 1}{p-1}$ modi diversi di decomposizione.

Con ciascuno dei $p^\nu - 1$ valori di k_1, non si potranno prendere che $p^\nu - p$ valori per k_2; poichè dai $p^\nu - 1$ si debbono escludere i $p-1$ dati da $k_2 \equiv mk_1$, dove m è un numero $< p$ escluso zero, i quali soddisfanno la congruenza lineare (7), quando in essa si faccia

$$u_1 \equiv m,\ u_2 \equiv 1,\ u_3 \equiv 0, \ldots, u_\nu \equiv 0.$$

Per ciascuno di questi $p^\nu - p$ valori di k_2, se ne hanno $p^2 - p$ che dànno decomposizioni eguali, e sono quelli compresi nella forma

$$mk_2 + nk_1$$

dove m è un numero $< p$, escluso zero, e n è un numero qualunque $< p$, compreso zero, che sono precisamente in tutto

$$p(p-1) = p^2 - p.$$

Dunque i modi di decomposizione differenti che si possono avere per la diversità dei valori di k_2 e k_1 saranno

$$\frac{p^\nu - 1}{p-1} \cdot \frac{p^\nu - p}{p^2 - p} = \frac{(p^\nu - 1)(p^{\nu-1} - 1)}{(p-1)^2}.$$

Così seguitando per determinare i numeri dei valori differenti di $k_3, k_4, \ldots, k_\nu$, si arriva facilmente al seguente

Teorema. *Il numero dei modi differenti di decomporre nel prodotto di gruppi primi, un gruppo cui appartengono soltanto le potenze di una sostituzione circolare sopra un numero di simboli che è potenza di un numero primo, è uguale a*

$$\frac{(p^\nu-1)(p^{\nu-1}-1)(p^{\nu-2}-1)\dots(p^2-1)}{(p-1)^{\nu-1}}.$$

Per dividere effettivamente, in tutti i modi possibili, i simboli in sistemi, si può procedere col metodo seguente. Siano $1, i, i^2, \dots, i^{\nu-1}$ i rispettivi valori di $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ che dànno una prima divisione: tutte le $\frac{p^\nu-1}{p-1}$ differenti divisioni in sistemi di simboli congiunti di primo ordine si otterranno prendendo per $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ rispettivamente i valori

$$\varrho^t, \varrho^t i, \varrho^t i^2, \dots, \varrho^t i^{\nu-1},$$

essendo ϱ una radice primitiva della equazione (5), e $t < \frac{p^\nu-1}{p-1}$. Infatti, tra queste quantità non può aver luogo nessuna congruenza lineare, poichè se fosse verificata una congruenza

$$\varrho^s(u+u_1 i+u_2 i^2+\dots+u_{\nu-1} i^{\nu-1}) \equiv 0,$$

non essendo $\varrho \equiv 0$, dovrebbe i essere radice di una congruenza di grado $\nu-1$, e quindi la congruenza di grado ν di cui l'abbiamo presa radice non sarebbe irriduttibile, contro il supposto. Inoltre due sistemi qualunque di questi valori di $k_1, k_2, \dots, k_\nu$, come

$$\varrho^t, \varrho^t i, \varrho^t i^2, \dots, \varrho^t i^{\nu-1}$$
$$\varrho^s, \varrho^s i, \varrho^s i^2, \dots, \varrho^s i^{\nu-1}$$

hanno per rapporto dei loro termini rispettivi ϱ^{t-s}, e poichè $t-s < \frac{p^\nu-1}{p-1}$, ϱ^{t-s} non è una quantità numerica; e quindi le $\frac{p^\nu-1}{p-1}$ divisioni in sistemi corrispondenti a questi valori, sono tutte differenti.

Per dividere i $p^{\nu-1}$ sistemi di primo ordine di ciascuna delle precedenti divisioni in sistemi di second'ordine nei $\frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}$ differenti modi corrispondenti a tutti i valori diversi di k_2, si rappresenteranno questi sistemi colle $p^{\nu-1}$ radici della congruenza

$$z^{p^{\nu-1}} \equiv z \pmod{p}, \tag{12}$$

e chiamando i' la radice di una congruenza irriduttibile di grado $\nu-1$, si prenderanno per le radici della (12) per le quali si possono esprimere

linearmente tutte le altre, i valori $1, i', i'^2 \dots i'^{\nu-2}$; e questi daranno una prima divisione: si moltiplicheranno per i $\frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}$ valori $\varrho_1{}^t$, dove ϱ_1 è radice primitiva delle (12) e $t < \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}$, e si avranno come nel caso precedente tutte le $\frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}$ divisioni in sistemi di second'ordine, corrispondenti a una delle divisioni in sistemi di primo ordine.

Analogamente si procederà per ottenere tutte le possibili divisioni in sistemi di terzo, quarto, ... , $(\nu-1)^{esimo}$ ordine.

Esempio

Sia al solito $p=2$, $\nu=3$: avremo per una divisione dei simboli in sistemi di primo ordine

$$0, 1; i, i+1; i^2, i^2+1; i^2+i, i^2+i+1$$

o anche

$$0\ i^7; i\ i^3; i^2\ i^6; i^4\ i^5$$

Quindi, moltiplicando per le sei potenze di i le quali sono $< \frac{2^3-1}{2-1}$, poichè i è radice primitiva della congruenza $z^7 \equiv 1$ (mod. 2), avremo le sette differenti divisioni in sistemi di primo ordine:

$$\begin{array}{l}
0\ i^7;\ i\ i^3;\ i^2\ i^6;\ i^4\ i^5\\
0\ i\ ;\ i^2\ i^4;\ i^3\ i^7;\ i^5\ i^6\\
0\ i^2;\ i^3\ i^5;\ i^4\ i\ ;\ i^6\ i^7\\
0\ i^3;\ i^4\ i^6;\ i^5\ i^2;\ i^7\ i\\
0\ i^4;\ i^5\ i^7;\ i^6\ i^3;\ i\ i^2\\
0\ i^5;\ i^6\ i\ ;\ i^7\ i^4;\ i^2\ i^3\\
0\ i^6;\ i^7\ i^2;\ i\ i^5;\ i^3\ i^4
\end{array}$$

Chiamando G_t il gruppo primo di ordine 2, cui appartengono soltanto le potenze della sostituzione $S_t = \binom{h+i^{t-1}}{h}$; a queste divisioni in sistemi di simboli congiunti corrisponderanno rispettivamente le seguenti decomposizioni in gruppi primi

$$\Gamma = G_3G_2G_1 = G_4G_3G_2 = G_5G_4G_3 = G_6G_5G_4 = G_7G_6G_5 = G_1G_7G_6 = G_2G_1G_7$$

Prendiamo ora

$$i'^2 + i' + 1 \equiv 0 \text{ (mod. 2)};$$

0, 1, $i', i'+1$ saranno radici delle $z^{2^2} \equiv z$ (mod. 2), e potranno rappresentare i quattro sistemi di primo ordine di una qualunque delle sette precedenti

divisioni. Moltiplicandole per le potenze della i' radice primitiva della congruenza $z^{2^3-1}-1\equiv 0$; abbiamo le tre divisioni in sistemi di second'ordine corrispondenti a ciascuna divisione in sistemi di primo ordine, cioè

$$0,\ 1\ ;\ i',\ i'^2$$
$$0,\ i'\ ;\ i'^2,\ 1,$$
$$0,\ i'^2;\ 1\ ,\ i'.$$

Con ciò le altre 14 decomposizioni saranno

$$\begin{aligned}\Gamma &= G_2G_3G_1 = G_3G_4G_2 = G_4G_5G_3 = G_5G_6G_4 = G_6G_7G_5\\ &= G_7G_1G_6 = G_1G_2G_7 = G_3G_5G_1 = G_4G_6G_2 = G_5G_7G_3\\ &= G_6G_1G_4 = G_7G_2G_5 = G_1G_3G_6 = G_2G_4G_7\,.\end{aligned}$$

Quel che avviene nel caso di $p=2$ e $\nu=3$, vale in generale qualunque siano p e ν, cioè: *i gruppi primi col prodotto di* ν *dei quali può ottenersi* Γ, *sono* $\frac{p^\nu-1}{p-1}$ *di grado* p, *a ciascuno dei quali appartengono tutte e sole le potenze di una sostituzione della forma* $\binom{h+\varrho^t}{h}$ *dove* ϱ *è radice primitiva di* $z^{p^\nu-1}-1\equiv 0$ e $t<\frac{p^\nu-1}{p-1}$.

Lascerò al lettore la dimostrazione di questo teorema, che è molto semplice.

2° Caso. Se il numero N dei simboli è il prodotto di ν potenze di numeri primi differenti, tutte le potenze di una sostituzione circolare di ordine N, sono il prodotto di ν potenze di sostituzioni di ordini rispettivamente eguali alle potenze dei numeri primi differenti, che sono fattori di N.

Sia

$$N = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2}\, p_3^{\alpha_3} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu}\ ;$$

e $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ siano tutti numeri primi differenti. Rappresentiamo i simboli con i numeri

$$0, 1, 2, 3, \ldots . N-2, N-1$$

e riguardiamo al solito eguali a zero i multipli di N. Chiamiamo S la sostituzione circolare di ordine N, $\binom{i+1}{i}$; sarà evidentemente $S^l=\binom{i+l}{i}$.

Qualunque sia l, per un teorema aritmetico dovuto a Cauchy [1] abbiamo

$$l\equiv\frac{m_1 N}{p_1^{\alpha_1}}+\frac{m_2 N}{p_2^{\alpha_2}}+\ldots+\frac{m_\nu N}{p_\nu^{\alpha_\nu}}\quad (\text{mod. } N)$$

---

[1] V. Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Phys. math.*, vol. III.

dove $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ sono numeri rispettivamente minori di $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$; onde essendo

$$S^N = 1$$

avremo

$$S = S^{\frac{m_1 N}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{m_2 N}{p_2^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{m_\nu N}{p_\nu^{\alpha_\nu}}}$$

$$= \left\{ S^{\frac{N}{p_1^{\alpha_1}}} \right\}^{m_1} \left\{ S^{\frac{N}{p_2^{\alpha_2}}} \right\}^{m_2} \ldots \left\{ S^{\frac{N}{p_\nu^{\alpha_\nu}}} \right\}^{m_\nu}$$

e ponendo

$$S^{\frac{N}{p_t^{\alpha_t}}} = S_t ,$$

$$S^t = S_1^{m_1} S_2^{m_2} \ldots S_\nu^{m_\nu} . \tag{13}$$

Poichè

$$S_t^{p_t^{\alpha_t}} = 1 ,$$

le sostituzioni $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ sono rispettivamente degli ordini $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$.

Le sostituzioni S_1 sono *intransitive* rispetto ai sistemi di $p_1^{\alpha_1}$ simboli

$$h, h + \frac{N}{p_1^{\alpha_1}}, h + \frac{2N}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots h + \frac{(p_1^{\alpha_1} - 1)N}{p_1^{\alpha_1}}$$

dove h non è divisibile per $p_1^{\alpha_1}$.

Le sostituzioni S_2 sono *transitive complesse* rispetto ai sistemi precedenti, e *intransitive* rispetto ai sistemi composti di $p_2^{\alpha_2}$ dei precedenti sistemi nei quali i valori di h formano delle progressioni aritmetiche di cui il primo termine non è divisibile nè per $\frac{N}{p_2^{\alpha_2}}$ nè per $\frac{N}{p_1^{\alpha_1}}$, e la ragione è $\frac{N}{p_2^{\alpha_2}}$. Analoghe proprietà hanno le S_3, le $S_4, \ldots$, le S_ν. Onde indicando con C il gruppo cui appartengono tutte e sole le S^t, con G_t quello cui appartengono soltanto tutte le S_t, avremo

$$C = G_\nu G_{\nu-1} \ldots G_2 G_1 . \tag{14}$$

Poichè non abbiamo fatta nessuna ipotesi sulla grandezza relativa dei fattori $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$, l'ordine dei gruppi primi nel prodotto C sarà indifferente.

Esempio

Sia $N = 2.3.5 = 30$, e al gruppo C appartengano tutte le sostituzioni $S = \binom{i+1}{i}$; e a G_1 le

$$S_1 = \binom{i+15}{i}; \text{ a } G_2 \text{ le } S_2 = \binom{i+10}{i}; \text{ a } G_3 \text{ le } S_3 = \binom{i+6}{i}.$$

I 30 simboli si possono dividere in sistemi congiunti in sei modi, uno dei quali è il seguente:

0	15	6	21	12	27	18	3	24	9
10	25	16	27	22	7	28	13	4	19
20	5	26	11	2	17	8	23	14	29.

Le S_1 sono intransitive rispetto ai sistemi del tipo h, $h + 15$; le S_2 transitive complesse rispetto ai precedenti e intransitive rispetto ai sistemi composti di tre dei precedenti nei quali h è della forma h_1, $h_1 + 6$, $h_1 + 12$: e le S_3 transitive complesse rispetto a questi ultimi; onde

$$C = G_3 G_2 G_1.$$

Si potrebbero dividere i simboli anche nel modo seguente:

0	6	12	18	24	15	21	27	3	9
10	16	22	28	4	25	1	7	13	19
20	26	2	8	14	5	11	17	23	29;

e questa decomposizione darebbe luogo alla equazione simbolica

$$C = G_1 G_2 G_3.$$

Altre quattro divisioni differenti darebbero le quattro equazioni simboliche

$$C = G_3 G_1 G_2 = G_2 G_3 G_1 = G_1 G_3 G_2 = G_2 G_1 G_3.$$

Teorema. *Un gruppo* C *cui appartengono soltanto tutte le potenze di una sostituzione circolare sopra un numero* N *di simboli, se* $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\nu^{\alpha_\nu}$, *e* $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ *sono numeri primi differenti, non può ammettere per fattori altro che un solo sistema di gruppi i gradi dei quali siano* $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_\nu^{\alpha_\nu}$.

Infatti: supponiamo possibili due divisioni dei simboli in sistemi composti ciascuno di $p_1^{\alpha_1}$ simboli, e sia il tipo dei primi

$$h, h + \frac{N}{p_1^{\alpha_1}}, \quad h + \frac{2N}{p_1^{\alpha_1}}, \dots, h + \frac{(p_1^{\alpha_1} - 1) N}{p_1^{\alpha_1}},$$

quello dei secondi

$$h_1, h_1 + \alpha, h_2 + 2\alpha, \dots, h_1 + (p_1^{\alpha_1} - 1)\alpha.$$

I termini di ambedue debbono formare delle progressioni aritmetiche, perchè alcune sostituzioni di C, e quindi della forma $\binom{i+a}{i}$, devono essere intransitive rispetto ai medesimi.

Due simboli di uno qualunque dei primi sistemi non potranno essere eguali a due di uno dei secondi, senza che tutti i primi sistemi non siano identici coi secondi. Poichè, supponiamo

$$h + \frac{mN}{p_1^{\alpha_1}} \equiv h_1 + m'\alpha \pmod{N}$$

$$h + \frac{nN}{p_1^{\alpha_1}} \equiv h_1 + n'\alpha \pmod{N},$$

sottraendo avremo

$$(m - n)\frac{N}{p_1^{\alpha_1}} \equiv (m' - n')\alpha \pmod{N},$$

ed essendo

$$s(m' - n') \equiv 1 \pmod{N},$$

si otterrà

$$\alpha \equiv s(m - n)\frac{N}{p_1^{\alpha_1}} \pmod{N},$$

e quindi tutti i simboli di ciascuno dei secondi sistemi disgiuntivamente eguali a quelli di uno dei primi.

La sostituzione $S_1 = \begin{pmatrix} i + \frac{N}{p_1^{\alpha_1}} \\ i \end{pmatrix}$ intransitiva rispetto alla prima divisione, sarà transitiva complessa rispetto alla seconda: onde se abbiamo nella seconda divisione un sistema

$$h_1,\ h_1 + \alpha,\ h_1 + 2\alpha, \ldots h_1 + (p_1^{\alpha_1} - 1)\alpha,$$

ne avremo altri $p_1^{\alpha_1} - 1$, della forma

$$h_1 + \frac{mN}{p_1^{\alpha_1}},\ h_1 + \frac{mN}{p_1^{\alpha_1}} + \alpha, \ldots h_1 + \frac{mN}{p_1^{\alpha_1}} + (p_1^{\alpha_1} - 1)\alpha,$$

e se questi non li esauriscono tutti, altri $p_1^{\alpha_1}$ della stessa forma, e così discorrendo; onde il numero totale dei sistemi dovrebbe esser multiplo di $p_1^{\alpha_1}$, ed essendo ciascuno composto di $p_1^{\alpha_1}$ simboli differenti, i simboli dovrebbero essere un numero N divisibile per $p_1^{2\alpha_1}$, mentre la più alta potenza di p_1 che divide N è $p_1^{\alpha_1}$. Dunque l'unica divisione in sistemi di primo ordine composti di $p_1^{\alpha_1}$ simboli è quella per cui sono intransitive le sostituzioni della forma

$$S_t = \begin{pmatrix} i + \frac{N}{p_t^{\alpha_t}} \\ i \end{pmatrix},$$

e quindi un sol sistema di gruppi di grado $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$ può dare per prodotto il gruppo C.

Passiamo ora alla soluzione del secondo problema, cioè determiniamo il massimo moltiplicatore dei gruppi che abbiamo considerati fin qui. Anche in questo sarà necessario studiare separatamente i due casi.

1.° Caso. Quando il numero dei simboli è una potenza ν di un numero primo p, conservando tutte le denominazioni stabilite, e indicando con P le sostituzioni del moltiplicatore del gruppo Γ, per determinarle si dovrà risolvere la equazione simbolica

$$PS^l = S^{l'}P, \tag{15}$$

nella quale i valori di l e di l' sono disgiuntivamente eguali. Poniamo

$$P = \begin{pmatrix} \varphi(h) \\ h \end{pmatrix};$$

poichè

$$S^l = \begin{pmatrix} h + k_l \\ h \end{pmatrix}, \quad S^{l'} = \begin{pmatrix} h + k_{l'} \\ h \end{pmatrix},$$

dove k_l e k_l' sono radici della congruenza (5), la equazione simbolica (15) si trasforma nella congruenza funzionale

$$\varphi(h + k_l) \equiv \varphi(h) + k_{l'} \pmod{p}. \tag{16}$$

L'integrale più generale che io ho trovato della (16), è

$$\varphi(h) \equiv A + A_1 h + A_2 h^p + \dots A_\nu h^{\nu-1} \pmod{p}:$$

dove $A, A_1, A_2, \dots, A_\nu$ sono radici della (5), e

$$A_1 k_l + A_2 k_l^p + \dots . A_\nu k_l^{p^{\nu-1}} \equiv k_{l'}.$$

Onde avremo

$$P = \begin{pmatrix} A + A_1 h + A_2 h^p + \dots + A_\nu k^{p^{\nu-1}} \\ h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 h + A_1 h^p + \dots + A_\nu h^{p^{\nu-1}} \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h + A \\ h \end{pmatrix}$$

e poichè il secondo fattore è una sostituzione appartenente a Γ, si può stabilire il seguente

Teorema. *Tutte le sostituzioni appartenenti al massimo moltiplicatore di* Γ *sono comprese nella espressione*

$$P = \begin{pmatrix} A_1 h + A_2 h^p + \dots A_\nu h^{p^{\nu-1}} \\ h \end{pmatrix}, \tag{17}$$

dove $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ *sono radici della* (5).

Alle sostituzioni P si può dare anche un'altra forma. Sia

$$h \equiv x + x_1 i + x_2 i^2 + \dots + x_{\nu-1} i^{\nu-1},$$

dove $x, x_1, \dots, x_{\nu-1}$ sono numeri $< p$: poichè $x_n^p \equiv x$, sarà

$$h^{p^t} \equiv x + x_1 i^{p^t} + x_2 i^{2p^t} + \dots + x_{\nu-1} i^{(\nu-1)p^t},$$

e quindi ponendo

$$\begin{aligned} A_1 &+ A_2 &+ \dots\dots &+ A_\nu &\equiv k_1 \\ A_1 i &+ A_2 i^p &+ \dots\dots &+ A_\nu i^{p^{\nu-1}} &\equiv k_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ A_1 i^{\nu-1} &+ A_2 i^{(\nu-1)p} &+ \dots\dots &+ A_\nu i^{(\nu-1)p^{\nu-1}} &\equiv k_\nu, \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned}&A_1 h + A_2 h^p + \cdots A_\nu h^{p^{\nu-1}}\\ &\equiv x k_1 + x_1 k_2 + x_3 k_3 + \cdots + x_{\nu-1} k_\nu ,\end{aligned}$$

e

$$P = \begin{pmatrix} x k_1 + x_1 k_2 + x_2 k_3 + \cdots + x_{\nu-1} k_\nu \\ x \;\; + x_1 i \;\; + x_2 i^2 \;\; + \cdots + x_{\nu-1} i^{\nu-1} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Le sostituzioni P sono in numero di p^{ν^2}, poichè ciascuna delle k può avere p^ν valori. Alcune di esse sono proprie, altre improprie. Sono improprie quelle soltanto per le quali sono eguali due almeno dei valori della linea superiore nella espressione (18), differenti nei loro coefficienti numerici. Abbiamo già veduto che questo non avviene altro che quando è soddisfatta una congruenza lineare tra $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, nella quale tutti i coefficienti non sono contemporaneamente congrui a zero. Dunque

Affinchè una delle sostituzioni (18) *sia propria è necessario e sufficiente che non sia verificata nessuna congruenza lineare*

$$u k_1 + u_1 k_2 + u_2 k_3 + \cdots + u_\nu k_\nu \equiv 0, \tag{19}$$

dove $u, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ *non sono tutti contemporaneamente* $\equiv 0$.

I valori che potrà aver k_1 senza che sia soddisfatta la (19) saranno $p^\nu - 1$, perchè dovrà escludersi zero che la soddisfa quando si faccia

$$u \equiv 1, u_1 \equiv u_2 \equiv \cdots \equiv u_\nu \equiv 0.$$

Con ciascuno dei $p^\nu - 1$ valori di k_1, k_2 potrà averne $p^\nu - p$, poichè dovremo escludere i p della forma $k_2 \equiv m k_1$ dove m è un numero $< p$, essendo per questi verificata la (19), quando si ponga in essa

$$u \equiv m,\; u_1 \equiv 1,\; u_2 \equiv u_3 \equiv \cdots \equiv u_\nu \equiv 0.$$

Con ciascuno dei $(p^\nu - 1)(p^\nu - p)$ valori di k_1 e k_2, k_3 potrà avere $p^\nu - p^2$ valori, dovendosi escludere i p^2 valori della forma $k_3 \equiv m k_2 + n k_1$ dove m e n sono numeri $< p$, per i quali è verificata la (19), quando si ponga

$$u \equiv n,\; u_1 \equiv m,\; u_2 \equiv 1,\; u_3 \equiv u_4 \equiv \ldots \equiv u_\nu \equiv 0.$$

Così seguitando si arriva a stabilire il seguente

Teorema. *Il numero delle sostituzioni proprie del massimo moltiplicatore di* Γ *è*

$$(p^\nu - 1)(p^\nu - p)(p^\nu - p^2) \ldots (p^\nu - p^{\nu-1}).$$

Alle sostituzioni P si può dare anche un'altra forma. Siano

$$\begin{cases} k_1 \equiv m \;\; + m_1 i \;\; + m_2 i^2 \;\; + \cdots + m_{\nu-1} i^{\nu-1} \\ h_k \equiv m' \;\; + m_1{}^1 i \;\; + m_2{}^1 i^2 \;\; + \cdots + m^1{}_{\nu-1} i^{\nu-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_\nu \equiv m^{(\nu-1)} + m_1{}^{(\nu-1)} i + m_2{}^{(\nu-1)} i^2 + \cdots + m_{\nu-1}^{(\nu-1)} i^{\nu-1} \end{cases} \tag{20}$$

Sostituendo questi valori nella espressione (18) avremo

$$(21)\quad P = \left\{ \begin{array}{l} [mx + m^1 x_1 + \cdots + m^{(\nu-1)} x_{\nu-1} \\ \quad + (m_1 x + m_1{}^1 x_1 + \dots + m_1{}^{(\nu-1)} x_{\nu-1})\, i \\ \quad + \cdots + (m_{\nu-1} x + m^1{}_{\nu-1} x_1 + \cdots + m_{\nu-1}^{(\nu-1)} x_{\nu-1})\, i^{\nu-1}] \\ \hline x + x_1 i + x_2 i^2 + \cdots + x_{\nu-1} i^{\nu-1} \end{array} \right\}$$

Abbiamo veduto che affinchè una sostituzione sia impropria è necessario e sufficiente che sia soddisfatta una congruenza lineare

$$uk_1 + u_1 k_2 + u_2 k_3 + \cdots + u_{\nu-1} k_\nu \equiv 0.$$

Ponendo in luogo di $k_1\, k_2 \dots k_\nu$ i loro rispettivi valori dati dalle (20), si deducono da essa le ν seguenti congruenze, eguagliando a zero i coefficienti delle ν potenze di i;

$$\begin{array}{l} mu \quad + m^1 u_1 + \cdots + m^{(\nu-1)}\ u_{\nu-1} \equiv 0 \\ m_1 u \quad + m_1{}^1 u_1 + \cdots + m_1{}^{(\nu-1)}\ u_{\nu-1} \equiv 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_{\nu-1} u + m^1{}_{\nu-1} + \cdots + m_{\nu-1}^{(\nu-1)}\ u_{\nu-1} \equiv 0, \end{array}$$

le quali non possono esser soddisfatte da nessun valore numerico di u, $u_1, \dots, u_{\nu-1}$, se non è congruo a zero il determinante D che ha per elementi i ν^2 coefficienti m, m_1, ... vale a dire se non è

$$D = \begin{vmatrix} m & m^1 & m^{(2)} & \dots & m^{(\nu-1)} \\ m_1 & m_1{}^1 & m_1{}^{(2)} & \dots & m_1{}^{(\nu-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{\nu-1} & m_{\nu-1}^1 & m_{\nu-1}^{(2)} & \dots & m_{\nu-1}^{(\nu-1)} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Quando poi $D \equiv 0$ vi sono dei valori numerici di u, $u_1, \dots, u_{\nu-1}$ che soddisfano la (19), quindi la sostituzione corrispondente è impropria. Dunque

Affinchè una sostituzione P *sia propria, è necessario e sufficiente che il determinante* D *fatto con i coefficienti* m, m_1, ... *quando essa è data dalla forma* (21), *non sia congruo a zero.*

Chiamiamo M il gruppo cui appartengono soltanto tutte le sostituzioni proprie date dalla espressione (17). Esso sarà di grado

$$\mu = (p^\nu - 1)(p^\nu - p)(p^\nu - p^2) \dots (p^\nu - p^{\nu-1}).$$

I simboli delle disposizioni di M possono ridursi a $p^\nu - 1$, perchè il simbolo zero non rimane permutato da nessuna delle sostituzioni P. Questi $p^\nu - 1$ simboli possono dividersi in $\dfrac{p^\nu - 1}{p - 1}$ sistemi composti ciascuno di $p - 1$

simboli congiunti che hanno tra loro dei rapporti numerici, e rispetto ai quali sono intransitive le sostituzioni

$$S = \begin{pmatrix} g^t h \\ h \end{pmatrix}$$

dove g è una radice primitiva di p, e t un numero qualunque $< p$; e tutte le altre sostituzioni P sono transitive complesse. Infatti prendiamo uno di questi sistemi

$$H, gH, g^2H \dots g^{p-2} H,$$

dove H è una radice della (5). La sostituzione S convertirà questi simboli negli altri

$$g^t H, g^{t+1} H, g^{t+2} H, \dots, g^{t+p-2} H,$$

che sono disgiuntivamente eguali a loro.

Un'altra sostituzione qualunque P differente da S, li converte nei seguenti

$$H_1, g H_1, g^2 H_2, \dots, g^{p-2} H_1$$

quando sia posto

$$H_1 \equiv A_1 H + A_2 H^p + \dots + A_\nu H^{p^{\nu-1}}.$$

e questi simboli formano un altro sistema di simboli congiunti, perchè hanno tra loro anche essi dei rapporti numerici.

Chiamiamo M_1 il gruppo cui appartengono soltanto tutte le S; m quello cui appartengono tutte le altre P, avremo, in conseguenza della precedente divisibilità in sistemi di simboli congiunti,

$$M = m M_1,$$

e M_1 sarà di grado $p-1$, e m di grado $\frac{\mu}{p-1}$.

Tutte le sostituzioni σ di M che hanno il determinante residuo di ν^{esima} potenza rispetto al modulo p (tra le quali sono comprese tutte le sostituzioni appartenenti a M_1 che hanno il determinante $= g^{t\nu}$), formano un sistema di sostituzioni coniugate. Infatti; siano σ_1 σ_2 due sostituzioni σ, e sia

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma'.$$

Poichè σ_1 e σ_2 hanno la forma (21), il loro prodotto σ' ha il suo determinante congruo al prodotto dei determinanti dei due fattori σ_1, σ_2; ed essendo questi residui di ν^{esima} potenza, lo sarà anche quello del prodotto σ', e quindi σ' apparterrà allo stesso sistema di sostituzioni coniugate.

Chiameremo M' il gruppo cui appartengono soltanto le sostituzioni σ, e ω una sostituzione il cui determinante non è residuo di ν^{esima} potenza

di p. Deriviamo M' per mezzo di ω; avremo due derivati eguali. Infatti siano θ le sostituzioni del derivato di M' per mezzo di ω, avremo

$$\omega\sigma = \theta\omega$$

Ora i determinanti dei due membri di questa equazione simbolica dovranno essere eguali, e quindi congrui i prodotti dei determinanti dei loro fattori. Dunque i determinanti delle σ e delle θ saranno congrui e residui di ν^{esima} potenza per ambedue. Dunque le σ saranno disgiuntivamente eguali alle θ, e i due derivati eguali.

Chiamando M_3 il gruppo cui appartengono soltanto 1 e ω, avremo

$$m = M_3 M';$$

e quindi, indicando con M_2 il gruppo cui appartengono soltanto le sostituzioni appartenenti a m che hanno il determinante residuo di ν^{esima} potenza sarà

$$M' = M_2 M_1:$$

onde finalmente

$$M = M_3 M_2 M_1 . \tag{22}$$

Dunque potrà stabilirsi il seguente

Teorema. *Il massimo moltiplicatore del gruppo Γ si può sempre riguardare come il prodotto di tre gruppi uno di grado $p-1$, uno di grado $\frac{\mu}{2(p-1)}$ e l'altro di grado 2.*

2.° Caso. Indichiamo con C il gruppo cui appartengono tutte e sole le potenze di una sostituzione circolare sopra un numero N di simboli, essendo $N \equiv p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\nu^{\alpha_\nu}$, e $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ numeri primi differenti. Primieramente le sostituzioni del massimo moltiplicatore di C saranno tutte intransitive o transitive complesse rispetto a una divisione dei simboli in sistemi congiunti rispetto alle sostituzioni di C. Infatti; supponiamo che una sostituzione Σ del moltiplicatore di C non sia nè intransitiva nè transitiva complessa rispetto alla divisione dei simboli in $\frac{N}{p_1^{\alpha_1}}$ sistemi composti di $p_1^{\alpha_1}$ simboli congiunti ciascuno. Siano congiunti i simboli delle seguenti linee orizzontali

$$\begin{array}{c} a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_{p_1^{\alpha_1}} \\ b_1\ b_2\ b_3\ \dots\ b_{p_1^{\alpha_1}} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ h_1\ h_2\ h_3\ \dots\ h_{p_1^{\alpha_1}} \end{array} \tag{23}$$

La sostituzione Σ convertirà questi simboli rispettivamente negli altri, che saranno eguali a loro soltanto disgiuntivamente,

$$
(24) \qquad \begin{array}{l}
a'_1 \; a'_2 \; a'_3 \; . \; . \; . \; a'_{p_1^{\alpha_1}} \\
b'_1 \; b'_2 \; b'_3 \; . \; . \; . \; b'_{p_1^{\alpha_1}} \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
h'_1 \; h'_2 \; h'_3 \; . \; . \; . \; h'_{p_1^{\alpha_1}}
\end{array}
$$

Ora eseguendo la sostituzione Σ su tutte le disposizioni di C, si otterrà un gruppo C′ di disposizioni che avranno i simboli (24) rispettivamente in luogo dei (23): e quindi, come le sostituzioni di C erano intransitive o transitive complesse rispetto alle linee orizzontali della divisione (23) lo saranno anche rispetto a quelle della (24). Ma essendo Σ una sostituzione del moltiplicatore, C e C′ sono eguali; dunque le sostituzioni di C sarebbero tutte intransitive o transitive complesse rispetto alle due divisioni differenti in $\frac{N}{p_1^{\alpha_1}}$ sistemi diversi di $p_1^{\alpha_1}$ simboli congiunti ciascuno; il che è impossibile, perchè abbiamo dimostrato possibile soltanto un modo di divisione in sistemi di questa specie. Onde si può stabilire il seguente

Teorema. *Tutte le sostituzioni del massimo moltiplicatore del gruppo C, a cui appartengono tutte le potenze di una sostituzione circolare sopra un numero di simboli che ha dei fattori primi differenti, sono intransitive o transitive complesse rispetto a una divisione in sistemi di simboli congiunti, e il prodotto di C per il suo massimo moltiplicatore, è un gruppo complesso.*

Riprendiamo la equazione simbolica (14)

$$C = G_\nu G_{\nu-1} \; . \; . \; . \; G_2 G_1 \, .$$

Dovendo tutte le sostituzioni del moltiplicatore essere intransitive o transitive complesse come quelle dei gruppi $G_\nu, G_{\nu-1}, \ldots, G_2, G_1$, per avere il massimo moltiplicatore basterà determinare i massimi moltiplicatori dei rispettivi gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$: problema già risoluto, poichè essi sono rispettivamente di grado $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$. Chiamiamo $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ i massimi moltiplicatori di C sarà

$$M = M_\nu M_{\nu-1} \; . \; . \; . \; M_2 M_1 \, ,$$

e il prodotto di C per M, sarà un gruppo complesso, e chiamandolo G, avremo

$$(25) \qquad G = M_\nu G_\nu M_{\nu-1} G_{\nu-1} \; . \; . \; . \; M_2 G_2 M_1 G_1 \, .$$

Qui mi par conveniente distinguere ciò che in questa Nota mi appartiene, da quello che è dovuto ad altri. La decomposizione di una potenza qualunque di una sostituzione, l'ordine della quale ammette fattori primi differenti, in sostituzioni che siano ciascuna di ordine potenza di un sol numero primo, fu data da Cauchy nei *Comptes rendus* del 1845; io ho ottenuta, mercè la considerazione dei sistemi di simboli congiunti, la ulteriore decomposizione di queste ultime in sostituzioni di ordine primo, e quindi assolutamente indecomponibili. La decomposizione dei gruppi complessi di grado non primo forma la sostanza del metodo di Gauss per le equazioni binomie; io ho mostrato come essa deriva direttamente dalla decomposizione delle sostituzioni che loro appartengono, e ho aggiunto la determinazione del numero di tutte le possibili decomposizioni differenti, e della forma delle sostituzioni che appartengono ai gruppi primi nei quali si decompongono i gruppi complessi, tanto nel caso che il loro grado sia potenza di un numero primo, quanto in quello che ammetta fattori primi differenti. Le sostituzioni del massimo moltiplicatore di un gruppo di grado p^ν furono date da Galois, senza dimostrazione, sotto una forma analoga alla (21): ma la congruenza funzionale, e il suo integrale generale, d'onde deriva la necessità di quella forma, la detti io per la prima volta nella Memoria, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*. La decomposizione del massimo moltiplicatore in tre gruppi, Galois la dette soltanto per $\nu = 2$; io l'ho estesa per un valore qualunque di ν. Che i gruppi complessi, nel caso che il numero dei simboli ammetta fattori primi differenti, non possano avere che moltiplicatori complessi, fu scoperto da Galois: ma la semplice dimostrazione che qui ne ho data, è forse la prima veramente completa.

IX.

ESTRATTO DI UNA LETTERA AL PROF. J. J. SYLVESTER

(Dal *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, t. I, pp. 91-92, London, 1857).

Mr. Kronecker, dans une communication faite par Mr. Dirichlet à l'Académie de Berlin le 20 juin 1853, s'est proposé de nouveau le problème d'Abel: « *Trouver la fonction algébrique la plus générale qui puisse satisfaire à une équation de degré donné* », et l'a résolu complétement dans le cas que le degré soit un nombre premier. J'ai poussé un peu plus loin la solution du problème général, en l'etendant au degré puissance quelconque d'un nombre premier. Voici en peu de mots l'enoncé du problème et sa solution. La démonstration sera publiée prochainement dans les *Annali di Scienze matematiche e fisiche* de Mr. Tortolini.

« Trouver la fonction algébrique la plus générale de plusieurs quantités « quelconques A, B, C, ... qui ait p^ν valeurs (p est un nombre premier), « racines d'une équation irréductible de degré p, dont les coefficients soient « fonctions rationnelles de A, B, C, ..., et qui soit primitive, c'est à dire « indécomposable en $p^{\nu-\beta}$ équations de degré p^β, dont les coefficients soient « fonctions rationnelles des racines d'une équation de degré $p^{\nu-\beta}$ ».

Je commence par résoudre le problème arithmétique suivant:

« Trouver un système de ν^2 nombres $< p$:

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} q'_1, & q'_2, & q'_3 & \dots q'_\nu \\ q''_1, & q''_2, & q''_3 & \dots q''_\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(\nu)}, & q_2^{(\nu)}, & q_3^{(\nu)} & \dots q_\nu^{(\nu)} \end{matrix}\right.$$

« qui jouissent de la propriété, que les $p^\nu - 1$ systèmes des nombres $< p$

$$(2)\qquad \left\{\begin{matrix} \nu'_1 & , \nu'_2 & , \nu'_3 & \dots \nu'_\nu \\ \nu''_1 & , \nu''_2 & , \nu''_3 & \dots \nu''_\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_1^{(p^\nu-1)}, & \nu_2^{(p^\nu-1)}, & \nu_3^{(p^\nu-1)} & \dots \nu_\nu^{(p^\nu-1)} \end{matrix}\right.$$

dont chacun se déduit du précédent per les congruences

$$(3)\quad \begin{cases} \nu_1^{(i+1)} \equiv \nu_1^{(i)} q'_1 + \nu_2^{(i)} q'_2 + \ldots + \nu_\nu^{(i)} q'_\nu , \\ \nu_2^{(i+1)} \equiv \nu_1^{(i)} q''_1 + \nu_2^{(i)} q''_2 + \ldots + \nu_\nu^{(i)} q''_\nu , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{mod. } p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_\nu^{(i+1)} \equiv \nu_1^{(i)} q^{(\nu)} + \nu_2^{(i)} q_2^{(\nu)} + \ldots + \nu_\nu^{(i)} q_\nu^{(\nu)} , \end{cases}$$

« soient tous différents; c'est à dire soient les $p^\nu - 1$ systèmes, que l'on « obtient en donnant à chaque nombre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$, et « en négligeant le cas dans lequel tous les nombres sont nuls. Les systèmes (1) « jouent, par rapport à un système de ν nombres, le rôle des racines primi- « tives par rapport à un seul nombre ».

Maintenant voici la solution du problème algébrique.

« La fonction algébrique la plus générale de plusieurs quantités A, B, C, ..., « qui puisse satisfaire à une équation de degré p^ν irréductible et primitive, « dont les coefficients sont fonctions rationnelles de A, B, C, ..., est

$$(4)\qquad x_{m_1, m_2, \ldots m_\nu} = \mathrm{P} + \sum e^{-\nu_1^{(i)} m_1 - \nu_2^{(i)} m_2 - \ldots - \nu_\nu^{(i)} m_\nu} \sqrt[p]{\mathrm{R}_i} ,$$

« P étant une fonction rationnelle de A, B, C, ...; $\nu_1^{(i)}, \nu_2^{(i)}, \ldots, \nu_\nu^{(i)}$, les « nombres du système i^{me} dans les (2); les R_i des quantités qui doivent sa- « tisfaire aux équations

$$\mathrm{R}_2 = \theta(\mathrm{R}_1), \mathrm{R}_3 = \theta(\mathrm{R}_2), \ldots, \mathrm{R}_{p^\nu - 1} = \theta(\mathrm{R}_{p^\nu - 2}),$$

« où θ représente une fonction rationnelle de A, B, C ... et des racines d'une « équation abélienne de degré ν. Pour obtenir toutes les racines par la for- « mule (3), il suffit de prendre pour $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ toutes les valeurs entières « inférieures à p ».

Florence, le 15 mars 1855.

X.

SOPRA LA PIÙ GENERALE FUNZIONE ALGEBRICA CHE PUÒ SODDISFARE UNA EQUAZIONE IL GRADO DELLA QUALE È POTENZA DI UN NUMERO PRIMO

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. VI, pp. 260-272, Roma, 1855).

Abel in una lettera a Crelle pubblicata nella collezione delle sue Opere (¹) ha data la più generale funzione algebrica che può soddisfare una equazione irriduttibile di quinto grado. Kronecker, in una comunicazione fatta per mezzo di Dirichlet all'Accademia di Berlino il 20 giugno 1853, ha risoluto lo stesso problema per tutte le equazioni di grado primo. Quanto alle equazioni il grado delle quali è potenza di un numero primo si trova nei frammenti della Memoria di Abel, *Sur la résolution algébrique des équations*, il seguente teorema:

Se una equazione irriduttibile il grado della quale è potenza di un numero primo μ^α, è risolvibile algebricamente, deve avvenire uno di questi due casi: o la equazione è decomponibile in $\mu^{\alpha-\beta}$ equazioni, ciascuna di grado μ^β, i coefficienti delle quali dipendono da equazioni di grado $\mu^{\alpha-\beta}$ (in questo caso soltanto diremo con Galois che non è *primitiva*); *o si potrà esprimere una qualunque delle sue radici per la formula*

$$x = \mathrm{A} + \sqrt[\mu]{\mathrm{R}_1} + \sqrt[\mu]{\mathrm{R}_2} + \ldots + \sqrt[\mu]{\mathrm{R}_\nu}\,, \tag{1}$$

ove A *è una quantità razionale e* $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots \mathrm{R}_\nu$ *sono radici di una stessa equazione di grado* ν, *essendo* ν *al più eguale a* $\mu^\alpha - 1$.

La espressione (1) ha almeno μ^ν valori, poichè ciascuno dei radicali ne ha μ: quali di questi bisognerà scegliere per avere i μ^α che sono radici della equazione di grado μ^α? Ogni funzione algebrica che è radice di una equazione di grado μ^α ha la forma (1), ma non tutte le funzioni che hanno la forma (1) soddisfano una equazione di grado μ^α: quali sono quelle che godono questa proprietà? Io ho risoluto questi due problemi e con ciò ho ottenuto

---

(¹) Vol. II, p. 253 (dell'edizione di Holmboe, p. 266 dell'edizione di Sylow e Lie).

la compiuta risoluzione del problema che fa il soggetto di questa Memoria, e che può enunciarsi così:

Determinare la più generale funzione algebrica di più quantità qualunque $a, b, c, \dots$, la quale ha μ^α valori che soddisfano una equazione di grado μ^α irriduttibile, primitiva e che ha i coefficienti funzioni razionali di $a, b, c \dots$.

Cominciamo dallo stabilire due Lemmi che appartengono alla teorica dei numeri.

Lemma I. *Esiste sempre un sistema di α^2 numeri interi $< \mu$*

$$(2)\qquad \begin{cases} q'_1 & q'_2 & q'_3 & \dots q'_\alpha \\ q''_1 & q''_2 & q''_3 & \dots q''_\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(\alpha)} & q_2^{(\alpha)} & q_3^{(\alpha)} & \dots q_\alpha^{(\alpha)} \end{cases}$$

che gode la proprietà di render differenti tra loro tutti i $\mu^\alpha - 1$ sistemi di numeri interi $< \mu$

$$(3)\qquad \begin{cases} r'_1 & r'_2 & r'_3 & \dots r'_\alpha \\ r''_1 & r''_2 & r''_3 & \dots r''_\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{(\mu^\alpha-1)} & r_2^{(\mu^\alpha-1)} & r_3^{(\mu^\alpha-1)} & \dots r_\alpha^{(\mu^\alpha-1)} \end{cases}$$

ciascuno dei quali si deduce dal precedente per mezzo delle congruenze

$$(4)\qquad \begin{cases} r_1^{(t+1)} \equiv q'_1\ r_1^{(t)} + q'_2\ r_2^{(t)} + \dots + q'_\alpha\ r_\alpha^{(t)} \\ r_2^{(t+1)} \equiv q''_1\ r_1^{(t)} + q''_2\ r_2^{(t)} + \dots + q''_\alpha\ r_\alpha^{(t)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (\text{mod. } \mu) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_\alpha^{(t+1)} \equiv q_1^{(\alpha)}\ r_1^{(t)} + q_2^{(\alpha)}\ r_2^{(t)} + \dots + q_\alpha^{(\alpha)}\ r_\alpha^{(\ )} \end{cases}$$

In tal modo i $\mu^\alpha - 1$ sistemi sono precisamente tutti quelli che si ottengono prendendo per ciascuno degli α numeri dei quali sono composti, tutti i valori $0, 1, 2, \dots \mu - 1$; *ed escludendo il caso in cui tutti gli α numeri sono congrui a zero.*

Sia i una radice di una congruenza irriduttibile di grado α, rapporto al modulo μ: la espressione

$$h \equiv r'_1 + r'_2\ i + r'_3\ i^2 + \dots + r'_\alpha\ i^{\alpha-1} \ (\text{mod. } \mu)$$

sarà radice della congruenza

$$z^{\mu^\alpha - 1} \equiv 1 \pmod{\mu}; \quad (5)$$ [1]

e

$$k \equiv u_1 + u_2\, i + u_3\, i^2 + \ldots + u_\alpha\, i^{\alpha-1}$$

sia una radice primitiva della (5). Eseguiamo i prodotti

$$h\,,\; kh\,,\; k^2 h\,,\; k^3 h\,, \ldots\, k^{\mu^\alpha - 1} h\,; \quad (6)$$

ed eliminando da ciascuno le potenze di i superiori ad $\alpha - 1$, per mezzo della congruenza irriduttibile di grado α, avremo qualunque sia t

$$k^t h \equiv r_1^{(t+1)} + r_2^{(t+1)}\, i + r_3^{(t+1)}\, i^2 + \ldots + r_\alpha^{(t+1)}\, i^{\alpha-1}\,,$$

ove

$$\begin{aligned}
r_1^{(t+1)} &\equiv r_1^{(t)}\, q'_1 + r_2^{(t)}\, q'_2 + \ldots + r_\alpha^{(t)}\, q'_\alpha \\
r_2^{(t+1)} &\equiv r_1^{(t)}\, q''_1 + r_2^{(t)}\, q''_2 + \ldots + r_\alpha^{(t)}\, q''_\alpha \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_\alpha^{(t+1)} &\equiv r_1^{(t)}\, q_1^{(\alpha)} + r_2^{(t)}\, q_2^{(\alpha)} + \ldots + r_\alpha^{(t)}\, q_\alpha^{(\alpha)}\,,
\end{aligned}$$

e i numeri $q'_1, q'_2 \ldots$ dipendono soltanto dai valori di $u_1, u_2 \ldots$.

Ora le quantità (6) debbono essere tutte incongrue tra loro, perchè se fosse

$$k^s h \equiv k^v h$$

si avrebbe

$$k^{s-v} \equiv 1\,;$$

ed essendo s e $v < \mu^\alpha - 1$, una potenza di k, minore di $\mu^\alpha - 1$ sarebbe congrua alla unità, e quindi k non sarebbe radice primitiva. Dunque anche i sistemi dei loro coefficienti, che sono dedotti l'uno dall'altro per mezzo di un sistema di α^2 numeri come nell'enunciato del Lemma, saranno tutti differenti tra loro.

Il sistema (2) che rispetto a α numeri fa lo stesso ufficio che una radice primitiva rispetto a un sol numero, lo chiameremo *sistema primitivo, dell'ordine α, del numero μ.*

---

[1] V. Serret, *Cours d'Alg. sup.*, 2ᵉ. édition, Leçon XXV.

Lemma II. *Se il sistema* (2) *è primitivo, lo sarà anche il sistema*

$$(7)\qquad \begin{cases} \varpi'_1 & \varpi'_2 & \varpi'_3 & \dots & \varpi'_\alpha \\ \varpi''_1 & \varpi''_2 & \varpi''_3 & \dots & \varpi''_\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varpi_1^{(\alpha)} & \varpi_2^{(\alpha)} & \varpi_3^{(\alpha)} & \dots & \varpi_\alpha^{(\alpha)} \end{cases}$$

dove chiamando D *il determinante di cui sono elementi le quantità* (2) *nell'ordine con cui sono scritte, si ha*

$$(8)\qquad D\varpi_r^{(s)} \equiv \frac{dD}{dq_r^{(s)}} \ (\text{mod. } \mu).$$

Prendiamo due dei prodotti (6) che siano consecutivi

$$k^{t-1}\, h\,,\ k^t\, h\,.$$

Poichè $k^{\mu^\alpha-1} \equiv 1$, avremo

$$k^{t-1}\, h \equiv k^{\mu^\alpha-2}\, k^t\, h$$

ed essendo $\mu^\alpha - 2$ primo con $\mu^\alpha - 1$, anche $k^{\mu^\alpha-2}$ sarà radice primitiva della (5), e i coefficienti di $k^{t-1}\, h$ saranno dati per quelli di $k^t\, h$ per mezzo delle congruenze

$$(9)\qquad \begin{cases} r_1^{(t)} \equiv \varpi'_1\ r_1^{(t+1)} + \varpi'_2\ r_2^{(t+1)} + \dots + \varpi'_\alpha\ r_\alpha^{(t+1)} \\ r_2^{(t)} \equiv \varpi''_1\ r_1^{(t+1)} + \varpi''_2\ r_2^{(t+1)} + \dots + \varpi''_\alpha\ r_\alpha^{(t+1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_\alpha^{(t)} \equiv \varpi_1^{(\alpha)}\, r_1^{(t+1)} + \varpi_2^{(\alpha)}\, r_2^{(t+1)} + \dots + \varpi_\alpha^{(\alpha)}\, r_\alpha^{(t+1)}\ ; \end{cases}$$

dove il sistema degli α^2 numeri $\varpi'_1, \varpi'_2 \dots$ che dipende soltanto dai coefficienti di $k^{\mu^\alpha-2}$, dà tutti i sistemi (3) in ordine inverso ed è primitivo.

Ora risolvendo le congruenze (4) si ricava

$$(10)\qquad \begin{cases} Dr_1^{(t)} \equiv r_1^{(t+1)}\ \dfrac{dD}{dq'_1} + r_2^{(t+1)}\ \dfrac{dD}{dq'_2} + \dots + r_\alpha^{(t+1)}\ \dfrac{dD}{dq'_\alpha} \\ Dr_2^{(t)} \equiv r_1^{(t+1)}\ \dfrac{dD}{dq''_1} + r_2^{(t+1)}\ \dfrac{dD}{dq''_2} + \dots + r_\alpha^{(t+1)}\ \dfrac{dD}{dq''_\alpha} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dr_\alpha^{(t)} \equiv r_1^{(t+1)}\, \dfrac{dD}{dq_1^{(\alpha)}} + r_2^{(t+1)}\, \dfrac{dD}{dq_2^{(\alpha)}} + \dots + r_\alpha^{(t+1)}\, \dfrac{dD}{dq_\alpha^{(\alpha)}}\ . \end{cases}$$

Le congruenze (10) debbono essere identiche colle (9): dunque il sistema (7) gli elementi del quale sono definiti dalla (8), è primitivo.

Teorema. *La più generale funzione algebrica di più quantità qualunque $a, b, c \ldots$, che può soddisfare una equazione irriduttibile e primitiva di grado μ^α, di cui i coefficienti sono funzioni razionali di $a, b, c \ldots$, è*

$$x_{m_1+m_2 i+m_3 i^2+\ldots+m_\alpha i^{\alpha-1}} = \mathrm{P} + \sum_{t=1}^{t=\mu^\alpha-1} \varrho^{-r_1^{(t)} m_1 - r_2^{(t)} m_2 - \ldots - r_\alpha^{(t)} m_\alpha} \sqrt[\mu]{\mathrm{R}_t}$$

dove P *è una funzione razionale di $a, b, c \ldots$; ϱ è radice immaginaria μ^{esima} dell'unità; $r_1^{(t)}, r_2^{(t)}, \ldots r_\alpha^{(t)}$ sono i numeri del sistema t^{esimo} dei* (3) *e* $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_{\mu^\alpha-1}$ *quantità che soddisfano le equazioni*

$$\mathrm{R}_2 = \theta(\mathrm{R}_1), \mathrm{R}_3 = \theta(\mathrm{R}_2), \ldots \mathrm{R}_{\mu^\alpha-1} = \theta(\mathrm{R}_{\mu^\alpha-2}), \mathrm{R}_1 = \theta(\mathrm{R}_{\mu^\alpha-1});$$

rappresentando θ una funzione razionale di $a, b, c \ldots$ e delle radici di una equazione Abeliana di grado α. Per ottenere tutte le radici basta prendere per $m_1, m_2, \ldots m_\alpha$ tutti i numeri intieri $< \mu$, compreso zero.

Affinchè una equazione irriduttibile e primitiva di grado μ^α possa esser soddisfatta da funzioni algebriche di più quantità $a, b, c, \ldots$ delle quali sono funzioni razionali i coefficienti, è necessario che tutte le funzioni razionali delle radici invariabili per le sostituzioni fatte sugl'indici, quando questi sono le radici della (5), che sono della forma

$$(11) \qquad \left\{ \begin{matrix} m_1 + a_1 + (m_2 + a_2) i + \ldots + (m_\alpha + a_\alpha) i^{\alpha-1} \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_\alpha i^{\alpha-1} \end{matrix} \right\}$$

e

$$(12) \qquad \left\{ \begin{matrix} m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots + m_\alpha k_\alpha \\ m_1 + m_2 i + \ldots + m_\alpha i^{\alpha-1} \end{matrix} \right\}$$

dove $k_1, k_2, \ldots, k_\alpha$ sono radici della (5) che non soddisfano nessuna congruenza lineare, siano funzioni razionali di $a, b, c, \ldots$ [1].

La funzione

$$(13) \qquad \mathrm{R}_t = \left\{ \Sigma \varrho^{r_1^{(t)} m_1 + r_2^{(t)} m_2 + \ldots + r_\alpha^{(t)} m_\alpha} x_{m_1+m_2 i+\ldots+m_\alpha i^{\alpha-1}} \right\}^\mu$$

dove il segno Σ deve esser esteso a tutti i valori di $m_1, m_2, \ldots m_\alpha$ intieri

---

[1] V. la mia Memoria, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, parte II, n. 28 negli Ann. di Sc. mat. e fis., t. III (od anche pp. 31-80 di questo volume) e la mia Nota, *Sulla teorica delle sostituzioni* ne' medesimi Annali, t. IV (od anche pp. 102-122 di questo volume).

e $<\mu$, è invariabile per le sostituzioni della forma (11). Infatti eseguita una di queste sostituzioni, essa diviene

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \Sigma \varrho^{r_1^{(t)} m_1 + r_2^{(t)} m_2 + \ldots + r_\alpha^{(t)} m_\alpha} x_{m_1 + a_1 + (m_2 + a_2) i + \ldots + (m_\alpha + a_\alpha) i^{\alpha-1}} \right\}^\mu \\
= &\left\{ \varrho^{-r_1^{(t)} a_1 - \ldots - r_\alpha^{(t)} a_\alpha} \Sigma \varrho^{r_1^{(t)} (m_1 + a_1) + \ldots + r_\alpha^{(t)} (m_\alpha + a_\alpha)} x_{m_1 + a_1 + \ldots + (m_\alpha + a_\alpha) i^{\alpha-1}} \right\}^\mu \\
= &\left\{ \Sigma \varrho^{r_1^{(t)} m_1 + r_2^{(t)} m_2 + \ldots + r_\alpha^{(t)} m_\alpha} x_{m_1 + m_2 i + \ldots + m_\alpha i^{\alpha-1}} \right\}^\mu,
\end{aligned}
$$

cioè non cangia valore.

I $\mu^\alpha - 1$ valori di R che si ottengono prendendo per i numeri $r_1, r_2, \ldots, r_\alpha$ successivamente tutti i sistemi (3), si cangiano uno nell'altro per le sostituzioni della forma (12). Infatti per una qualunque di esse, R_t diviene

$$
\left\{ \Sigma \varrho^{r_1^{(t)} m_1 + r_2^{(t)} m_2 + \ldots + r_\alpha^{(t)} m_\alpha} x_{m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots + m_\alpha k_\alpha} \right\}^\mu . \tag{14}
$$

Siano

$$
\left\{
\begin{aligned}
k_1 &\equiv a'_1 + a'_2 i + \ldots + a'_\alpha i^{\alpha-1} \\
k_2 &\equiv a''_1 + a''_2 i + \ldots + a''_\alpha i^{\alpha-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_\alpha &\equiv a_1^{(\alpha)} + a_2^{(\alpha)} i + \ldots + a_\alpha^{(\alpha)} i^{\alpha-1} :
\end{aligned}
\right. \tag{15}
$$

e poniamo

$$
\left\{
\begin{aligned}
m_1 a'_1 + m_2 a''_1 + \ldots + m_\alpha a_1^{(\alpha)} &\equiv M_1 \\
m_1 a'_2 + m_2 a''_2 + \ldots + m_\alpha a_2^{(\alpha)} &\equiv M_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
m_1 a'_\alpha + m_2 a''_\alpha + \ldots + m_\alpha a_\alpha^{(\alpha)} &\equiv M_\alpha .
\end{aligned}
\right. \tag{16}
$$

Sostituendo i valori dati dalle (15) nella (14), e riducendo colle (16) si ha

$$
\left\{ \Sigma \varrho^{r_1^{(t)} m_1 + \ldots + r_\alpha^{(t)} m_\alpha} x_{M_1 + M_2 i + \ldots + M_\alpha i^{\alpha-1}} \right\}^\mu . \tag{17}
$$

Poichè il determinante dei coefficienti delle (16) non è congruo a zero [1], potremo, risolvendole, ottenere i valori

$$
\left\{
\begin{aligned}
m_1 &\equiv p'_1 M_1 + p'_2 M_2 + \ldots + p'_\alpha M_\alpha \\
m_2 &\equiv p''_1 M_1 + p''_2 M_2 + \ldots + p''_\alpha M_\alpha \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m_\alpha &\equiv p_1^{(\alpha)} M_1 + p_2^{(\alpha)} M_2 + \ldots + p_\alpha^{(\alpha)} M_\alpha .
\end{aligned}
\right. \tag{18}
$$

---

[1] V. la mia Nota già citata, *Sulla teorica delle sostituzioni.*

Sostituendo i valori (18) nella (17), ponendo

$$
\begin{array}{l}
r_1^{(l)} p'_1 + r^{(l)}_2 p''_1 + \ldots + r_\alpha^{(l)} p_1^{(\alpha)} \equiv r_1^{(s)} \\
r_1^{(l)} p'_2 + r_2^{(l)} p''_2 + \ldots + r_\alpha^{(l)} p_2^{(\alpha)} \equiv r_2^{(s)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r_1^{(l)} p'_\alpha + r_2^{(l)} p''_\alpha + \ldots + r_\alpha^{(l)} p_\alpha^{(\alpha)} \equiv r_\alpha^{(s)}
\end{array}
$$

e osservando che il sistema $r_1^{(s)}, r_2^{(s)}, \ldots, r_\alpha^{(s)}$ è necessariamente uno dei (3), avremo

$$
\left\{ \Sigma \varrho^{r_1^{(s)} M_1 + r_2^{(s)} M_2 + \ldots + r_\alpha^{(s)} M_\alpha} x_{M_1 + M_2 i + \ldots + M_\alpha i^{\alpha-1}} \right\}^\mu = R_s \; .
$$

Onde le funzioni simmetriche di $R_1, R_2, \ldots, R_{\mu^\alpha-1}$ saranno invariabili per le sostituzioni (11) e (12), e quindi affinchè la equazione di grado μ^α sia risolvibile algebricamente, dovranno esser funzioni razionali dei coefficienti, e quindi di $a, b, c, \ldots$; e $R_1, R_2, \ldots, R_{\mu^\alpha-1}$ dovranno esser radici di una equazione di grado $\mu^\alpha - 1$, che ha i coefficienti funzioni razionali di $a, b, c, \ldots$

Ora prendiamo le equazioni

$$
\begin{array}{ll}
P & = \Sigma x_{m_1 + m_2 i + \ldots + m_\alpha i^{\alpha-1}} \\
\sqrt[\mu]{R_1} & = \Sigma \varrho^{r'_1 m_1 + \ldots + r'_\alpha m_\alpha} x_{m_1 + m_2 i + \ldots + m_\alpha i^{\alpha-1}} \\
\sqrt[\mu]{R_2} & = \Sigma \varrho^{r''_1 m_1 + \ldots + r''_\alpha m_\alpha} x_{m_1 + m_2 i + \ldots + m_\alpha i^{\alpha-1}} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sqrt[\mu]{R_{\mu^\alpha-1}} & = \Sigma \varrho^{r_1^{(\mu^\alpha-1)} m_1 + \ldots + r_\alpha^{(\mu^\alpha-1)} m_\alpha} x_{m_1 + m_2 i + \ldots + m_\alpha i^{\alpha-1}} \, .
\end{array}
$$

Moltiplicandole rispettivamente per

$$
\begin{array}{l}
\varrho^{-r'_1 n_1 - \ldots - r'_\alpha n_\alpha} \\
\varrho^{-r''_1 n_1 - \ldots - r''_\alpha n_\alpha} \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \; ;
\end{array}
$$

sommandole, e osservando che la radice

$$
x_{n_1 + n_2 i + \ldots + n_\alpha i^{\alpha-1}}
$$

risulta nella somma moltiplicata per μ^α, e le altre per espressioni della forma

$$\sum_{t=1}^{t=\mu^\alpha-1} \varrho^{-r_1^{(t)}(m_1-n_1)-\dots-r_\alpha^{(t)}(m_\alpha-n_\alpha)} =$$

$$= \sum_{r_1=0}^{r_1=\mu-1} \varrho^{-r_1^{(t)}(m_1-n_1)} \sum \varrho^{-r_2^{(t)}(m_2-n_2)-\dots-r_\alpha^{(t)}(m_\alpha-n_\alpha)} = 0\,,$$

si ricava

$$x_{n_1+n_2 i+\dots+n_\alpha i^{\alpha-1}} = \frac{1}{\mu^\alpha}\left\{ \mathrm{P} + \sum_{t=1}^{t=\mu^\alpha-1} \varrho^{-r_1^{(t)}n_1-\dots-r_\alpha^{(t)}n_\alpha} \sqrt[\mu]{\mathrm{R}_t} \right\}. \tag{19}$$

Per determinare compiutamente le R_1 rammentiamo che sono risolvibili algebricamente soltanto quelle equazioni che hanno il gruppo decomponibile in gruppi primi. Ora il gruppo più generale di una equazione irriduttibile e primitiva di grado μ^α, che gode questa proprietà, Galois ha trovato esser quello a cui soltanto appartengono le sostituzioni della forma (11), le $\mu^\alpha - 1$ potenze della

$$\begin{pmatrix} kh \\ h \end{pmatrix} \tag{20}$$

dove k è radice primitiva della (5), e le α potenze della

$$\begin{pmatrix} h^\mu \\ h \end{pmatrix}. \quad (1) \tag{21}$$

Dunque perchè le funzioni algebriche date dalla (19) siano radici di una equazione primitiva di grado μ^α sarà necessario e sufficiente che le funzioni invariabili per le sostituzioni (11), (20) e (21) siano funzioni razionali dei coefficienti, e quindi di $a, b, c \dots$

Le sostituzioni (20) sugl'indici delle radici equivalgono alle sostituzioni sulle R date dalle $\mu^\alpha - 1$ potenze della

$$\begin{pmatrix} \mathrm{R}_{t+1} \\ \mathrm{R}_t \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Infatti: eseguendo le (20) sulle x_1, la R_t diviene

$$\left\{ \Sigma \varrho^{r_1^{(t)}m_1+r_2^{(t)}(m_2+\dots+r_\alpha^{(t)}m_\alpha)} x_{(m_1q'_1+\dots+m_\alpha q'_\alpha)+\dots+(m_1q_1^{(\alpha)}+\dots+m_\alpha q_\alpha^{(\alpha)})i^{\alpha-1}} \right\}^\mu. \tag{23}$$

---

(1) V. la mia Memoria già citata, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, parte I, n. 39, e *Journal de Liouville*, 1ère série, t. XI, p. 406.

Ponendo

$$(24)\qquad \begin{cases} m_1 q'_1 + m_2 q'_2 + \ldots + m_\alpha q'_\alpha \equiv M_1 \\ m_1 q''_1 + m_2 q''_2 + \ldots + m_\alpha q''_\alpha \equiv M_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1 q_1^{(\alpha)} + m_2 q_2^{(\alpha)} + \ldots + m_\alpha q_\alpha^{(\alpha)} \equiv M_\alpha , \end{cases}$$

si avrà

$$(25)\qquad \begin{cases} m_1 \equiv \varpi'_1 \; M_1 + \varpi'_2 \; M_2 + \ldots + \varpi'_\alpha \; M_\alpha \\ m_2 \equiv \varpi''_1 \; M_1 + \varpi''_2 \, M_2 + \ldots + \varpi''_\alpha \; M_\alpha \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_\alpha \equiv \varpi_1^{(\alpha)} M_1 + \varpi_2^{(\alpha)} M_2 + \ldots + \varpi_\alpha^{(\alpha)} M_\alpha . \end{cases}$$

Sostituendo nella (23), negl'indici di x i valori dati dalle (24), negli esponenti delle ϱ i valori dati dalle (25), ed osservando che è primitivo il sistema dei coefficienti delle (24), e quindi per il Lemma II anche quello dei coefficienti delle (25), e che in conseguenza per qualunque valore di t

$$\begin{aligned} r_1^{(t)} \varpi'_1 + r_2^{(t)} \varpi''_1 + \ldots + r_\alpha^{(t)} \varpi_1^{(\alpha)} &\equiv r_1^{(t+1)} \\ r_1^{(t)} \varpi'_2 + r_2^{(t)} \varpi''_2 + \ldots + r_\alpha^{(t)} \varpi_2^{(\alpha)} &\equiv r_2^{(t+1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^{(t)} \varpi'_\alpha + r_2^{(t)} \varpi''_\alpha + \ldots + r_\alpha^{(t)} \varpi_\alpha^{(\alpha)} &\equiv r_\alpha^{(t+1)} ; \end{aligned}$$

avremo

$$\left\{ \Sigma \varrho^{r_1^{(t+1)} M_1 + \ldots + r_\alpha^{(t+1)} M_\alpha} \, x_{M_1 + M_1 i + \ldots + M_\alpha i^{\alpha-1}} \right\}^\mu = R_{t+1} .$$

Le sostituzioni (21) equivarranno anch'esse ad α potenze di una sostituzione sulle R_t; poichè ogni sostituzione (12) eseguita sulle x_h corrisponde a una dello stesso ordine sulle R_t.

Da ciò si deduce che le funzioni razionali delle R_t invariabili per le sostituzioni (22), e per le α equivalenti alle (21) (le stesse R_t non cangiando valore per le (11)), saranno invariabili per le (11), (20) e (21), e quindi dovranno esser funzioni razionali di $a, b, c, \ldots$, e il gruppo della equazione di grado $\mu^\alpha - 1$ che ha per radici le R_t dovrà essere il prodotto di un gruppo a cui appartengono le $\mu^\alpha - 1$ potenze della sostituzione circolare (22), per un gruppo cui appartengono soltanto le α potenze della sostituzione corrispondente alla (21). Dunque per la teoria del Galois che io ho svolta nella

mia Memoria, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* (Parte II), aggiungendo le radici di una equazione abeliana di grado α [1] la equazione di grado $\mu^\alpha - 1$ che ha per radici le R_t dovrà divenire una equazione abeliana, e richiamando la forma delle sostituzioni circolari (22) si dedurrà che fra le radici R_t, dovranno aver luogo le equazioni

$$R_2 = \theta(R_1)\,,\, R_3 = \theta(R_2)\,,\ldots,\, R_1 = \theta(R_{\mu^\alpha - 1})\,,$$

dove θ sarà una funzione razionale di $a, b, c \ldots$ e delle radici di una equazione abeliana di grado α.

Firenze, nel marzo 1855.

---

[1] Kronecker ha chiamato abeliane le equazioni, al gruppo delle quali appartengono soltanto le potenze di una sostituzione circolare, e ha trovato la forma delle funzioni algebriche che possono soddisfarle.

XI.

SOPRA LE FORME OMOGENEE A DUE INDETERMINATE

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. VII, pp. 60-63, Roma, 1856).

Sia una forma omogenea di grado dispari:

$$(1)\qquad F(x, y) = a_0 x^{2m+1} + (2m+1) a_1 x^{2m} y + \frac{2m+1 \,.\, 2m}{1 \,.\, 2} a_2 x^{2m-1} y^2 + \ldots + a_{2m+1} y.^{2m+1}$$

Ponendo

$$(2)\qquad \begin{cases} a_0 = p_0 + p_1 + \ldots + p_m\,, \\ a_1 = p_0 \alpha_0 + p_1 \alpha_1 + \ldots + p_m \alpha_m\,, \\ a_2 = p_0 \alpha_0^2 + p_1 \alpha_1^2 + \ldots + p_m \alpha^2_m\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2m+1} = p_0 \alpha_0^{2m+1} + p_1 \alpha_1^{2m+1} + \ldots + p_m \alpha_m^{2m+1}\,, \end{cases}$$

avremo identicamente

$$(3)\quad F(x, y) = p_0 (x + \alpha_0 y)^{2m+1} + p_1 (x + \alpha_1 y)^{2m+1} + \ldots + p_m (x + \alpha_m y).^{2m+1}$$

Il sig. Sylvester ha trovato che $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono radici di una equazione di grado $m+1$, che ha i coefficienti funzioni razionali di quelli della forma (1). Questa equazione può determinarsi nel modo seguente.

Sia la equazione, che ha per radici $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$,

$$(4)\qquad \alpha^{m+1} + B_1 \alpha^m + B_2 \alpha^{m-1} + \ldots + B_{m+1} = 0\,.$$

Moltiplichiamo rispettivamente la prima, la seconda, la terza, ..., la $(m+2)^{esima}$ delle equazioni (2), per $B_{m+1}, B_m, B_{m-1}, \ldots B_1, 1$, e poi sommiamole; moltiplichiamo la seconda, la terza, ..., la $(m+3)^{esima}$, per le

stesse quantità, e poi sommiamole, e così di seguito fino alle ultime $m+2$; osservando che $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sono radici della (4), avremo

$$(5)\quad \begin{cases} B_{m+1} a_0 + B_m a_1 + B_{m-1} a_2 + \ldots + B_1 a_m + a_{m+1} = 0, \\ B_{m+1} a_1 + B_m a_2 + B_{m-1} a_3 + \ldots + B_1 a_{m+1} + a_{m+2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{m+1} a_m + B_m a_{m+1} + B_{m-1} a_{m+2} + \ldots + B_1 a_{2m} + a_{2m+1} = 0. \end{cases}$$

Ricavando da queste i valori di $B_{m+1}, B_m, \ldots, B_1$ espressi per determinanti, sostituendoli nella (4), e moltiplicando per il denominatore comune, si ottiene facilmente la equazione

$$(6)\quad \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_m \\ \alpha & a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{m+1} \\ \alpha^2 & a_2 & a_3 & a_4 \ldots a_{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{m+1} & a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots\ldots a_{2m+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Facciamo nella (3) la sostituzione lineare

$$(7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[2m+1]{p_0}}{\alpha_1 - \alpha_2}\Big(\alpha_0(\alpha_1-\alpha_2)x' + \alpha_2(\alpha_0-\alpha_1)y'\Big), \\ y = \dfrac{\sqrt[2m+1]{p_0}}{\alpha_1 - \alpha_2}\Big((\alpha_2-\alpha_1)x' + (\alpha_1-\alpha_0)y'\Big). \end{cases}$$

Ponendo

$$(8)\quad \begin{cases} q_0 = p_0^2\left(\dfrac{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_0)}{\alpha_1-\alpha_2}\right)^{2m+1}, \\ q_t = p_0\, p_t\, (\alpha_0-\alpha_t)^{2m+1}, \\ B_t = \dfrac{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_t)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_0-\alpha_t)}, \end{cases}$$

con facilissime riduzioni si ottiene

$$(9)\qquad F(x, y) = F_1(x', y') = q_0\, y'^{2m+1} + \sum_{t=1}^{t=m} q_t (x' + B_t y')^{2m+1}.$$

Le funzioni q_t e B_t sono tutte invarianti. Infatti, poniamo

$$\eta_1 = \sum_{t=1}^{t=2m+1} t a_{t-1} \frac{d}{da_t}, \quad \eta_2 = \sum_{t=0}^{t=2m} (2m+1-t)\, a_{t+1} \frac{d}{da_t},$$

e applichiamo questi simboli di operazioni differenziali alle equazioni (2), avremo

$$
(10)\left\{\begin{array}{l}
0 \;=\; \eta_1 p_0 + \eta_1 p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \eta_1 p_m\,,\\
a_0 = \alpha_0 \eta_1 p_0 + \alpha_1 \eta_1 p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_m \eta_1 p_m\\
\quad + p_0 \eta_1 \alpha_0 + p_1 \eta_1 \alpha_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_m \eta_1 \alpha_m\,,\\
2a_1 = \alpha_0^2 \eta_1 p_0 + \alpha_1^2 \eta_1 p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_m^2 \eta_1 p_m\\
\quad + 2p_0\alpha_0\eta_1\alpha_0 + 2p_1\alpha_1\eta_1\alpha_1 + \ldots\ldots\ldots + 2p_m\alpha_m\eta_1\alpha_m\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(2m+1)a_{2m} = \alpha_0^{2m+1}\eta_1 p_0 + \alpha_1^{2m+1}\eta_1 p_1 + \ldots\ldots + \alpha_m^{2m+1}\eta_1 p_m\\
\quad + (2m+1)p_0\alpha_0^{2m}\eta_1\alpha_0 + (2m+1)p_1\alpha_1^{2m}\eta_1\alpha_1 \ldots + (2m+1)p_m\alpha_m^{2m}\eta_1\alpha_m
\end{array}\right.
$$

$$
(11)\left\{\begin{array}{l}
(2m+1)\,a_1 = \eta_2 p_0 + \eta_2 p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \eta_2 p_m\,,\\
\quad 2ma_2 = \alpha_0 \eta_2 p_0 + \alpha_1 \eta_2 p_1 + \ldots\ldots + \alpha_m \eta_2 p_m\\
\quad\quad + p_0 \eta_2 \alpha_0 + p_1 \eta_2 \alpha_1 + \ldots\ldots + p_m \eta_2 \alpha_m\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 = \alpha_0^{2m+1}\eta_2 p_0 + \alpha_1^{2m+1}\eta_2 p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_m^{2m+1}\eta_2 p_m\\
+ (2m+1)p_0\alpha_0^{2m}\eta_2\alpha_0 + (2m+1)p_1\alpha_1^{2m}\eta_2\alpha_1 + \ldots + (2m+1)p_m\alpha_m^{2m}\eta_2\alpha_m.
\end{array}\right.
$$

Dalle (10) si ottiene

$$(12)\qquad \eta_1 p_t = 0\,,\ \eta_2 \alpha_t = 1\,,$$

come è facile a verificarsi, richiamando le formule (2). Dalle (11) si ricava egualmente

$$(13)\qquad \eta_2 p_t = (2m+1)\, p_t\, \alpha_t\,,\ \eta_2 \alpha_t = -\alpha_t^2\,.$$

Tutte le funzioni I che soddisfano alle due equazioni

$$\eta_1\, \mathrm{I} = 0\,,\ \eta_2\, \mathrm{I} = 0\,,$$

sono invarianti. Applicando i simboli η_1 e η_2 alle funzioni (8), e sostituendo nei risultati i valori dati dalle equazioni (12) e (13), si ha facilmente

$$\eta_1 q_0 = 0\,,\ \eta_2 q_0 = 0\,,$$
$$\eta_1 q_t = 0\,,\ \eta_2 q_t = 0\,,$$
$$\eta_1 \mathrm{B}_t = 0\,,\ \eta_2 \mathrm{B}_t = 0\,.$$

Dunque i coefficienti della forma (9) sono tutti invarianti, che evidentemente, quando li avremo ottenuti espressi per coefficienti della forma (1), non risulteranno razionali, ma funzioni di soli invarianti razionali.

Nel caso di $m = 2$, questa proprietà si trova verificata, in questi Annali, in una Memoria del sig. cav. Faà di Bruno.

Firenze, 15 gennaio 1856.

XII.

SOPRA LE SERIE DOPPIE RICORRENTI

(Dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. VIII, pp. 48-61, Roma, 1857).

1. Una serie doppia

$$\sum_{m,n=0}^{m,n=\infty} u_{m,n} = u_{0,0} + u_{1,0} + u_{2,0} + u_{3,0} + \dots \tag{1}$$
$$+ u_{0,1} + u_{1,1} + u_{2,1} + u_{3,1} + \dots$$
$$+ u_{0,2} + u_{1,2} + u_{2,2} + u_{3,2} + \dots$$
$$+ u_{0,3} + u_{1,3} + u_{2,3} + u_{3,3} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

la quale abbia i termini sottoposti a verificare l'equazioni

$$\sum_{s=0}^{s=\mu} \sum_{r=0}^{r=\mu-s} a_{r,s}\, u_{m+\mu-r-s,n+r} = 0\,, \tag{2}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \sum_{r=0}^{r=\nu-s} b_{r,s}\, u_{m+\nu-r-s,n+r} = 0\,, \tag{3}$$

si potrà chiamare *ricorrente* per l'analogia che ha colle serie ricorrenti ordinarie.

2. In generale, dati i $\mu\nu$ termini nei quali il primo indice è minore di μ e il secondo minore di ν, o viceversa, l'equazioni (2) e (3) determineranno compiutamente tutta quanta la serie.

Infatti gli altri termini o avranno la somma degl'indici maggiore di $\nu - 1$ e minore di μ; o maggiore di $\mu - 1$ e minore di $\mu + \nu - 1$; o maggiore di $\mu + \nu - 2$.

1°. I termini che hanno la somma degl'indici eguale $\varrho > \nu - 1$ e $< \mu$ sono $\varrho + 1$, ν dei quali, cioè

$$u_{\varrho,0}\,,\ u_{\varrho-1,1}\,,\ \dots,\ u_{\varrho-\nu+1,\nu-1}\,,$$

sono dati, e gli altri $\varrho - \nu + 1$ si esprimono linearmente per i termini che hanno la somma degl'indici $< \varrho$, risolvendo le $\varrho - \nu + 1$ equazioni di primo grado, che si ottengono dall'equazione (3), ponendovi successivamente

$$m = 0\,,\, n = \varrho - \nu\,;\; m = 1\,,\, n = \varrho - \nu - 1\,;\; \ldots;\; m = \varrho - \nu\,,\, n = 0\,.$$

2°. Dei $\varrho + 1$ termini che hanno la somma degl'indici eguale a $\varrho > \mu - 1$ e $< \mu + \nu - 1$ ne sono dati $\mu + \nu - \varrho + 1$, cioè $u_{\mu-1,\varrho-\mu+1}\,,\, u_{\mu-2,\varrho-\mu+2}\,, \ldots,$ $u_{\varrho-\nu+1,\nu-1}$, e gli altri $\varrho - \nu + 1 + \varrho - \mu + 1$ si esprimono linearmente in funzione di quelli che hanno l'indice $< \varrho$, mediante le $\varrho - \nu + 1$ equazioni che si deducono dall'equazione (3), facendovi successivamente

$$m = 0\,,\, n = \varrho - \nu\,;\; m = 1\,,\, n = \varrho - \nu - 1\,;\; \ldots;\; m = \varrho - \nu\,,\, n = 0\,,$$

e mediante le $\varrho - \mu + 1$ equazioni che si ottengono dall'equazione (2), ponendovi successivamente

$$m = 0\,,\, n = \varrho - \mu\,;\; m = 1\,,\, n = \varrho - \mu - 1\,;\; \ldots;\; m = \varrho - \mu\,,\, n = 0.$$

3°. Dei $\varrho + 1$ termini che hanno la somma degl'indici eguale a $\varrho > \mu + \nu - 2$ non n'è dato alcuno; ma si determinano in funzione dei termini che hanno la somma degl'indici $< \varrho$, mediante le $\varrho - \mu + 1$ equazioni dedotte dall'equazioni (2), dando a m e a n successivamente tutti i valori interi la somma dei quali è $\varrho - \mu$, e mediante le $\varrho - \nu + 1$ equazioni dedotte dall'equazione (3), ponendovi successivamente invece di m e di n tutti i valori interi la somma dei quali è $\varrho - \nu$. Se $\varrho = \mu + \nu - 2 + s$ abbiamo $\mu + \nu - 1 + s$ incognite e $\varrho - \mu + 1 + \varrho - \nu + 1 = \mu + \nu + 2s - 2$ equazioni; quindi $s - 1$ equazioni di più dell'incognite; ma, come vedremo, queste $s - 1$ equazioni, in generale, rientrano nell'altre.

3. Se poniamo

$$f_1(x\,,y) = \sum_{s=0}^{s=\mu} \sum_{r=0}^{r=\mu-s} a_{r,s}\, x^{\mu-r-s}\, y^r = 0\,, \tag{4}$$

$$f_2(x\,,y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \sum_{r=0}^{r=\nu-s} b_{r,s}\, x^{\nu-r-s}\, y^r = 0\,, \tag{5}$$

e indichiamo con

$$x_1\,,\, y_1\,;\; x_2\,,\, y_2\,;\; x_3\,,\, y_3\,;\; \ldots;\; x_{\mu\nu}\,,\, y_{\mu\nu}\,,$$

le radici simultanee dell'equazioni (4) e (5), il termine generale della serie (1) sarà

$$u_{m,n} = \sum_{t=1}^{t=\mu\nu} c_t\, x_t^m\, y_t^n\,, \tag{6}$$

dove i $\mu\nu$ coefficienti $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\mu\nu}$ devono determinarsi in modo che sodisfacciano alle $\mu\nu$ equazioni di primo grado che si ottengono ponendo nell'equazione (6) successivamente, per m tutti i valori interi minori di μ e per n tutti i valori interi minori di ν, e invece dei termini $u_{m,n}$ i loro $\mu\nu$ valori che abbiamo supposto esser dati.

È facile a verificarsi che dai valori (6) di $u_{m,n}$ saranno sodisfatte le equazioni (2) e (3) per tutti i possibili valori di m e n; e quindi i $\mu+\nu+s-1$ valori di $u_{m,n}$ che hanno la somma degl'indici eguale a $\mu+\nu-2+s$, sodisferanno alle $\mu+\nu+2s-2$ equazioni di sopra notate (n[i]. 2°, 3°), e perciò $s-1$ di queste dovranno essere una conseguenza delle altre, come avevamo avanzato.

Tutto questo vale quando l'equazioni (4) e (5) hanno $\mu\nu$ radici simultanee, come è in generale. Molte volte però le radici medesime sono in numero minore; e allora sono anche in numero minore i termini che nella serie (1) si possono prendere a piacere.

4. Passiamo ora a determinare la funzione generatrice della serie (1). Siano

$$X = \alpha_0 x^{\mu\nu} + \alpha_1 x^{\mu\nu-1} + \alpha_2 x^{\mu\nu-2} \ldots + \alpha_{\mu\nu} = 0, \tag{7}$$

$$Y = \beta_0 y^{\mu\nu} + \beta_1 y^{\mu\nu-1} + \beta_1 y^{\mu\nu-2} \cdots + \beta_{\mu\nu} = 0, \tag{8}$$

l'equazioni finali, la prima risultante dall'eliminazione di y, la seconda dall'eliminazione di x tra l'equazioni (4) e (5). È noto che si possono prendere quattro funzioni razionali intere di x e di y, M_1', M_2', M_1'', M_2'', in modo che si abbia

$$M_1' f_1 + M_2' f_2 = X, \tag{9}$$

$$M_1'' f_1 + M_2'' f_2 = Y. \tag{10}$$

Jacobi ha osservato ([1]) che ponendo

$$V = M_1' M_2'' - M_2' M_1''; \qquad R = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x},$$

e distinguendo con due indici r e s posti in basso a V, i valori che prende V per $x = x_r$, ed $y = y_s$; e con la lettera m posta in basso a V, R, X e Y i valori che prendono queste funzioni per $x = x_m$ ed $y = y_m$, si hanno dall'equazioni (9) e (10) le due

$$V f_1 = M_2'' X - M_2' Y; \quad V f_2 = M_1' Y - M_1'' X,$$

delle quali, poichè per $x = x_r$ e $y = y_s$ non si annullano contemporaneamente f_1 e f_2, si deduce che deve essere necessariamente

$$V_{r,s} = 0; \tag{11}$$

([1]) Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, B. 14.

e derivando successivamente rispetto a x e a y le due equazioni (9) e (10). sostituendo nelle derivate $x = x_m$ e $y = y_m$, e formando il determinante

$$\begin{vmatrix} X'_m & 0 \\ 0 & Y'_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1' \frac{df_1}{dx} + M_2' \frac{df_2}{dx} & M_1' \frac{df_1}{dy} + M_2' \frac{df_2}{dy} \\ M_1'' \frac{df_1}{dx} + M_2'' \frac{df_2}{dx} & M_1'' \frac{df_1}{dy} + M_2'' \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = V_m R_m ,$$

si ottiene

$$V_m R_m = X'_m Y'_m . \tag{12}$$

5. L'equazioni (11) e (12) servono a dimostrare il seguente teorema:

Se svolgiamo in serie ordinata per le potenze decrescenti delle variabili x e y la frazione razionale

$$\frac{PV + QX + SY}{XY} \tag{13}$$

dove P, Q *ed* S *sono polinomi presi in modo che* $PV + QX + SY$ *non contenga nè x nè y inalzate a potenze superiori a $\mu\nu - 1$, i coefficienti della serie che otterremo, saranno i termini di una serie doppia ricorrente.*

Infatti, decomponendo in frazioni semplici la frazione razionale (13), poichè il numeratore è di grado inferiore al denominatore tanto rispetto ad x che ad y, avremo

$$\frac{PV + QX + SY}{XY} = \sum \frac{P_{r,s} V_{r,s}}{X'_r Y'_s (x - x_r)(y - y_s)}$$

e ponendo mente all'equazioni (11) e (12), si otterrà

$$\frac{PV + QX + SY}{XY} = \sum \frac{P_m}{R_m (x - x_m)(y - y_m)} ,$$

e svolgendo il secondo membro in serie ordinata secondo le potenze discendenti delle variabili,

$$\frac{PV + QX + SY}{XY} = \sum \left\{ \Sigma \frac{P_m}{R_m} x^\alpha_m y^\beta_m \right\} x^{-(\alpha+1)} y^{-(\beta+1)} . \tag{14}$$

È chiaro che i coefficienti delle differenti potenze di x e di y sono della forma (6), e quindi sono i termini di una serie doppia ricorrente, come volevamo dimostrare.

Ora osserviamo che il polinomio $PV + QX + SY$ è di grado inferiore a $\mu\nu$ rispetto a ciascuna delle due variabili x e y; quindi contiene $\mu^2\nu^2$ coefficienti; deve annullarsi per le sostituzioni, $x = x_r$, $y = y_s$ quando r ed s sono differenti; in conseguenza deve soddisfare a $\mu\nu\,(\mu\nu - 1)$ condizioni. Dunque non potrà contenere più di $\mu\nu$ coefficienti arbitrarî. Per ottenere questo polinomio, potremo prendere una funzione P razionale e intera di x e di y che non contenga più di $\mu\nu$ coefficienti arbitrarî, per esempio, che non contenga potenze di x superiori a $\mu - 1$ e potenze di y superiori a $\nu - 1$, o vice-

versa; moltiplicarla per V, ed eliminare dal prodotto le potenze di x e di y maggiori di $\mu\nu - 1$, valendosi dell'equazioni (7) e (8), dalle quali abbiamo

$$x^{\mu\nu+s} = p_s X + q_s\,,\ y^{\mu\nu+s} = p'_s Y + q'_s\,,$$

dove q_s è un polinomio in x di grado $< \mu\nu$, e q'_s è un polinomio in y di grado $< \mu\nu$.

6. Data una serie doppia ricorrente (1), si potranno sempre determinare i $\mu\nu$ coefficienti arbitrarî di P in modo che i coefficienti della serie, della quale è funzione generatrice la frazione razionale $\dfrac{PV + QX + SY}{XY}$, siano i termini della serie (1) medesima. Basterà determinare i $\mu\nu$ coefficienti di P per mezzo delle $\mu\nu$ equazioni di primo grado:

$$P_1 = c_1 R_1\,;\ P_2 = c_2 R_2\,; P_3 = c_3 R_3\,;\ \ldots; P_{\mu\nu} = c_{\mu\nu} R_{\mu\nu}\,;$$

così avremo

$$\frac{PV + QX + SY}{XY} = \Sigma\,(\Sigma c_i\, x_i^{\alpha}\, y_i^{\beta})\, x^{-(\alpha+1)}\, y^{-(\beta+1)}\,.$$

7. Se $P = 1$, sarà $Q = 0$, $S = 0$, perchè V è di grado $\mu\nu - 1$ rispetto a ciascuna delle due variabili x e y; e, come ha osservato Jacobi ([1]), avremo nel secondo membro dell'equazione (14) eguali a zero i coefficienti di tutti i termini nei quali $\alpha + \beta < \mu + \nu - 2$, perchè V è di grado non maggiore di $2\mu\nu - \mu - \nu$. Se dunque nella serie doppia ricorrente si prendono eguali a zero tutti i $\mu\nu$ termini arbitrarî fuori che $u_{\mu-1,\,\nu-1}$, saranno eguali a zero anche tutti gli altri termini, nei quali la somma degli indici è minore di $\mu + \nu - 2r$, la serie avrà per termine generale $\sum \dfrac{x^{\alpha}_m\, y^{\beta}_m}{R_m}$ e avrà per funzione generatrice la frazione razionale $\dfrac{V}{XY}$ · Questa è la più semplice delle serie doppie ricorrenti che hanno una medesima legge di progressione.

8. Tra le relazioni più notevoli che le serie doppie ricorrenti hanno colla teorica di due equazioni con due incognite, merita di essere accennato l'uso che può farsene nei due problemi principali; cioè nella determinazione delle funzioni simmetriche delle radici simultanee, e nella risoluzione numerica delle due equazioni medesime.

Se nell'equazione (14) si fa $P = R$, i coefficienti del secondo membro divengono della forma $\Sigma x^{\alpha}_m y^{\beta}_m$, ossia sono le funzioni simmetriche semplici delle radici simultanee dell'equazioni (4) e (5). Determinati i coefficienti dei termini nei quali $\alpha < \mu$, $\beta < \nu$ ([2]) i $\mu\nu$ termini della serie (1) che hanno

([1]) Crelle, l. c.

([2]) Effettuando lo svolgimento in serie ordinata per le potenze decrescenti di x e di y, del primo membro dell'equazione (14), quando $P = R$, e determinando il termine generale

gl'indici rispettivamente eguali ai due esponenti delle radici simultanee, si potranno, per mezzo delle equazioni (2) e (3), determinare tutti gli altri termini della serie medesima, che saranno i valori di tutte le possibili funzioni simmetriche semplici delle radici simultanee dell'equazioni (4) e (5).

9. Il metodo di Daniele Bernoulli per la risoluzione numerica di una equazione, può estendersi, per mezzo delle serie doppie ricorrenti, a due equazioni con due incognite, e si ha il seguente teorema:

Se x e y sono due radici reali simultanee dell'equazioni (4) *e* (5), *tali che il loro prodotto sia maggiore di tutti i prodotti dei moduli delle altre radici simultanee, sarà*

$$x_1 = \lim \frac{u_{t,t}}{u_{t-1,t}}, \qquad y_1 = \lim \frac{u_{t,t}}{u_{t,t-1}} \cdot$$

Infatti, abbiamo

$$u_{t,t} = \sum_{m=1}^{m=\mu\nu} c_m\, x^t_m\, y^t_m\,, \quad u_{t-1,t} = \sum_{m=1}^{m=\mu\nu} c_m\, x_m^{t-1}\, y^t_m\,, \quad u_{t,t-1} = \sum_{m=1}^{m=\mu\nu} c_m\, x^t_m\, y_m^{t-1};$$

onde, facendo i due rapporti della prima espressione colla seconda e colla terza, e dividendo sopra e sotto per $x_1^{t-1}\, y_1^{t-1}$, si trae

$$\frac{u_{t,t}}{u_{t-1,t}} = \frac{c_1\, x_1\, y_1 + \sum\limits_{m=2}^{m=\mu\nu} c_m\, x_m\, y_m \left(\frac{x_m\, y_m}{x_1\, y_1}\right)^{t-1}}{c_1\, y_1 + \sum\limits_{m=2}^{m=\mu\nu} c_m\, y_m \left(\frac{x_m\, y_m}{x_1\, y_1}\right)^{t-1}}\,,$$

$$\frac{u_{t,t}}{u_{t,t-1}} = \frac{c_1\, x_1\, y_1 + \sum\limits_{m=2}^{m=\mu\nu} c_m\, x_m\, y_m \left(\frac{x_m\, y_m}{x_1\, y_1}\right)^{t-1}}{c_1\, x_1 + \sum\limits_{m=2}^{m=\mu\nu} c_m\, x_m \left(\frac{x_m\, y_m}{x_1\, y_1}\right)^{t-1}}\,.$$

Ora le quantità sotto il segno Σ contengono le potenze $(t-1)^{esime}$ di quantità < 1, perchè $x_1\, y_1$ è maggiore dei prodotti dei moduli di tutte le altre radici simultanee; dunque convergeranno verso zero col crescer di t, e avremo

$$x_1 = \lim \frac{u_{t,t}}{u_{t-1,t}}\,, \quad y_1 = \lim \frac{u_{t,t}}{u_{t,t-1}} \cdot$$

---

di questa serie, si ottiene una formula che esprime in funzione razionale dei coefficienti delle due equazioni le funzioni simmetriche semplici delle loro radici, la quale, come mostrerò in altra occasione, è analoga a quella di Waring che dà le somme delle potenze simili delle radici di una sola equazione.

10. Abbiamo anche il seguente teorema, che è analogo a quello che ha trovato Fourier [1] per le serie ricorrenti semplici:

Se $x_1, y_1;\ x_2, y_2; \ldots; x_r, y_r$, *sono le radici simultanee dell'equazioni* (4) *e* (5), *che hanno i prodotti dei rispettivi moduli maggiori di tutte le altre, ponendo*

$$A_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+1,n} & \cdots & u_{m+r-2,n} & u_{m+r-1,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+1,n+1} & \cdots & u_{m+r-2,n+1} & u_{m+r-1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,n+r-1} & u_{m+1,n+r-1} & \cdots & u_{m+r-2,n+r-1} & u_{m+r-1,n+r-1} \end{vmatrix}$$

$$A'_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+1,n} & \cdots & u_{m+r-2,n} & u_{m+r,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+1,n+1} & \cdots & u_{m+r-2,n+1} & u_{m+r,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,n+r-1} & u_{m+1,n+r-1} & \cdots & u_{m+r-2,n+r-1} & u_{m+r,n+r-1} \end{vmatrix}$$

$$A^{(r-1)}_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+2,n} & \cdots & u_{m+r-1,n} & u_{m+r,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+2,n+1} & \cdots & u_{m+r-1,n+1} & u_{m+r,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,n+r-1} & u_{m+2,n+r-1} & \cdots & u_{m+r-1,n+r-1} & u_{m+r,n+r-1} \end{vmatrix}$$

$$'A_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+1,n} & \cdots & u_{m+r-2,n} & u_{m+r-1,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+1,n+1} & \cdots & u_{m+r-2,n+1} & u_{m+r-1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,n+r-2} & u_{m+1,n+r} & \cdots & u_{m+r+2,n+1} & u_{m+r-1,n+r-2} \\ u_{m,n+r} & u_{m+1,n+r} & \cdots & u_{m+r-2,n+r} & u_{m+r-2,n+r} \end{vmatrix}$$

$$''A_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+1,n} & \cdots & u_{m+r-2,n} & u_{m+r-1,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+1,n+1} & \cdots & u_{m+r-2,n+1} & u_{m+r-1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,n-r-3} & u_{m+1,n+r-3} & \cdots & u_{m+r-2,n+r-3} & u_{m+r-1,n+r-3} \\ u_{m,n+r-1} & u_{m+1,n+r-1} & \cdots & u_{m+r-2,n+r-1} & u_{m+r-1,n+r-1} \\ u_{m,n+r} & u_{m+1,n+r} & \cdots & u_{m+r-2,n+r} & u_{m+r-1,n+r} \end{vmatrix}$$

$$^{(r-1)}A_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+1,n} & \cdots & u_{m+r-2,n} & u_{m+r-1,n} \\ u_{m,n+2} & u_{m+1,n+2} & \cdots & u_{m+r-2,n+2} & u_{m+r-1,n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,n+r} & u_{m+1,n+r} & \cdots & u_{m+r-2,n+r} & u_{m+r-1,n+r} \end{vmatrix},$$

[1] L'enunciato di Fourier nell'*Analyse des équations*, p. 72, è inesatto, come fu avvertito dal prof. Tardy (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, an. 1854, janv.); ma è stato corretto dal prof. Brioschi nei medesimi Annali, an. 1855, p. 21.

le $2r - 1$ *serie doppie,*

$$\Sigma A_{m,n}\,,\ \Sigma A'_{m,n}\,,\ \Sigma A''_{m,n}\,,\ \dots\,,\ \Sigma A^{(r-1)}_{m,n}$$
$$\Sigma' A_{m,n},\ \Sigma'' A_{m,n}\,,\ \dots\,,\ \Sigma^{(r-1)} A_{m,n}\,,$$

saranno ricorrenti e l'equazioni

$$x^r - \lim \frac{A'_{m,m}}{A_{m,m}}\, x^{r-1} + \lim \frac{A''_{m,m}}{A_{m,m}}\, x^{r-2} - \dots$$
$$\pm \lim \frac{A^{(r-1)}_{m,m}}{A_{m,m}}\, x \quad \mp \lim \frac{A_{m,m}}{A_{m-1.m}} = 0\,,$$
$$y^r - \lim \frac{'A_{m,m}}{A_{m,m}}\, y^{r-1} + \lim \frac{''A_{m,m}}{A_{m,m}}\, y^{r-2} - \dots$$
$$\pm \lim \frac{^{(r-1)}A_{m,m}}{A_{m,m}} \quad \mp \lim \frac{A_{m,m}}{A_{m,m-1}} = 0$$

avranno rispettivamente per radici

$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ \dots\,,\ x_r\,;$$
$$y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ \dots\,,\ y_r\,.$$

Per dimostrare questo teorema, basta osservare che valendosi di alcune proprietà note dei determinanti, ponendo

$$\Delta'_{t_1,t_2,\dots,t_r} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ x_{t_1} & x_{t_2} & x_{t_3} & \dots x_{t_r} \\ x_{t_1}^2 & x_{t_2}^2 & x_{t_3}^2 & \dots x_{t_r}^2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{t_1}^{r-1} & x_{t_2}^{r-1} & x_{t_3}^{r-1} & \dots x_{t_r}^{r-1} \end{vmatrix}$$

$$'\Delta_{t_1,t_2,\dots,t_r} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ y_{t_1} & y_{t_2} & y_{t_3} & \dots y_{t_r} \\ y_{t_1}^2 & y_{t_2}^2 & y_{t_3}^2 & \dots y_{t_r}^2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ y_{t_1}^{r-1} & y_{t_2}^{r-1} & y_{t_3}^{r-1} & \dots y_{t_r}^{r-1} \end{vmatrix}$$

e sostituendo i valori di $u_{m,n}$ dati dalle formule (6) si ottiene facilmente

$$A_{m,n} = \Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2,\dots,t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2,\dots,t_r} x_{t_1}{}^m x_{t_2}{}^m \dots x_{t_r} y_{t_1}{}^n y_{t_2}{}^n \dots y_{t_r}{}^n,$$

$$A'_{m,m} = \Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2,\dots,t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2,\dots,t_r} H_t^{(1)} x_{t_1}{}^m x_{t_2}{}^m \dots x_{t_r}{}^m y_{t_1}{}^m y_{t_2}{}^m \dots y_{t_r}{}^m,$$

$$A''_{m,m} = \Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2,\dots,t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2,\dots,t_r} H_t^{(2)} x_{t_1}{}^m x_{t_2}{}^m \dots x_{t_r}{}^m y_{t_1}{}^m y_{t_2}{}^m \dots y_{t_r}{}^m,$$

. . . .

$${}'A_{m,m} = \Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2,\dots,t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2,\dots,t_r} K_t^{(1)} x_{t_1}{}^m x_{t_2}{}^m \dots x_{t_r}{}^m y_{t_1}{}^m y_{t_2}{}^m \dots y_{t_r}{}^m,$$

$${}'A_{m,m} = \Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2,\dots,t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2,\dots,t_r} K_t^{(2)} x_{t_1}{}^m x_{t_2}{}^m \dots x_{t_r}{}^m y_{t_1}{}^m y_{t_2}{}^m \dots y_{t_r}{}^m,$$

. . . .

dove

$$H_t^{(1)} = x_{t_1} + x_{t_2} + \dots + x_{t_r}, \quad H_t^{(2)} = x_{t_1} x_{t_2} + x_{t_1} x_{t_3} + \dots + x_{t_{r-1}} x_{t_r}, \dots\dots,$$

$$K_t^{(2)} = y_{t_1} + y_{t_2} + \dots + y_{t_r}, \quad K_t^{(2)} = y_{t_1} y_{t_2} + y_{t_1} y_{t_3} + \dots + y_{t_{r-1}} y_{t_r}, \dots\dots,$$

onde,

$$\lim \frac{A'_{mm}}{A_{m,m}} = x_1 + x_2 + \dots + x_r,$$

$$\lim \frac{A''_{m,m}}{A_{m,m}} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{r-1} x_r,$$

. . . .

. . . .

$$\lim \frac{{}'A_{m,m}}{A_{m,m}} = y_1 + y_2 + \dots + y_r,$$

$$\lim \frac{{}''A_{m,m}}{A_{m,m}} = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_{r-1} y_r,$$

. . . .

. . . .

Tutto quello che abbiamo detto intorno alle serie doppie ricorrenti e alle relazioni che esse hanno colle radici dell'equazioni a due incognite, si estende facilmente alle serie triple, quadruple,... ricorrenti, e ai sistemi di tre, di quattro,... equazioni con altrettante incognite.

Firenze, 26 aprile 1857.

XIII.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DES RACINES DES ÉQUATIONS

(Dal *Journal für die reine und ungewandte Mathematik*, t. 54, pp. 98-100, Berlin, 1857).

La considération des fonctions génératrices des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique conduit à une expression remarquable du produit des carrés des différences de toutes les racines.

M. Borchardt a trouvé (vol. LIII, p. 193 de ce Journal) que la fonction symétrique

(1) $$\Sigma x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

où

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \dots x_n$$

sont les racines d'une équation

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots A_n = 0,$$

est le coefficient du terme

$$t_1^{-(a_1+1)}\, t_2^{-(a_2+1)} \dots t_n^{-(a_n+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression suivante

$$\theta(t_1, t_2, \dots, t_n) = (-1)^n \frac{f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)}{\Pi(t_1, t_2, \dots, t_n)} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} \left(\frac{\Pi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)} \right),$$

où $\Pi(t_1, \dots, t_n)$ désigne le produit des différences des variables $t_1, t_2, \dots, t_n$.

J'ai remarqué que la fonction symétrique (1) est aussi le coefficient du terme

$$t_1^{-(a_1+1)}\, t_2^{-(a_2+1)} \dots t_n^{-(a_n+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression

$$\frac{\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\Pi^2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f'(t_1) f'(t_2) \dots f'(t_n)\, \Pi^2(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\Pi^2(x_1, x_2, \dots, x_n)\, f(t_1)\, f(t_2) \dots f(t_n)}.$$

Donc, on a deux expressions de la même quantité (1), et en les comparant on obtient une équation, d'où l'on déduit, pour toutes les valeurs positives

et entières de $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\Pi^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}_{t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \ldots t_n^{-(a_n+1)}}}{\{\theta(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}_{t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \ldots t_n^{-(a_n+1)}}},$$

si l'on désigne, avec Jacobi, par

$$\{F(t_1, \ldots, t_n)\}_{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \ldots t_n^{m_n}}$$

le coefficient di terme $t_1^{m_1}\, t_2^{m_2} \ldots t_n^{m_n}$ dans le développement de

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

2. La fonction génératrice de toutes les fonctions symétriques des solutions communes à deux équations algébriques est donnée par le théorème suivant:

Si l'on désigne par

$$(x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),\quad (x_3, y_3), \ldots, (x_\mu, y_\mu)$$

les systèmes des solutions communes aux deux équations

$$f_1(x, y) = 0, \qquad f_2(x, y) = 0\,;$$

si

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(y) = 0$$

sont les deux équations finales résultantes et M_1', M_2', M_1'', M_2'' *les polynomes multiplicateurs qui donnent*

$$M_1' f_1 + M_1'' f_2 = \varphi(x),$$

$$M_2' f_1 + M_2'' f_2 = \psi(y),$$

et que l'on pose

$$\theta(x, y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(M_1' M_2'' - M_1'' M_2')\,;$$

la fonction symétrique

$$\Sigma x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_\mu^{a_\mu} y_1^{b_1} y_2^{b_2} \ldots y_\mu^{b_\mu}$$

est le coefficient du terme

$$u_1^{-(a_1+1)} u_2^{-(a_2+1)} \ldots u_\mu^{-(a_\mu+1)} v_1^{-(b_1+1)} v_2^{-(b_2+1)} \ldots v_\mu^{-(b_\mu+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression suivante:

$$\frac{\theta(u_1, v_1)\,\theta(u_2, v_2) \ldots \theta(u_\mu, v_\mu)\,\Pi^2(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)\,\Pi^2(v_1, v_2, \ldots, v_\mu)}{\Pi^2(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\,\Pi^2(y_1, y_2, \ldots, y_\mu)\,\varphi(u_1)\,\varphi(u_2) \ldots \varphi(u_\mu)\,\psi(v_1)\,\psi(v_2) \ldots \psi(v_\mu)}.$$

On peut étendre aisément ces résultats à un plus grand nombre d'équations.

Florence, 12 juin 1857.

XIV.

SOPRA L'EQUAZIONI ALGEBRICHE CON PIÙ INCOGNITE

(Dagli *Annali di matematica pura ed applicata*, ser. I, t. I, pp. 1-8, Roma, 1858).

Dato un sistema di n equazioni algebriche con n incognite, dopo avere determinata l'equazione finale risultante dall'eliminazione di tutte le incognite meno una sola, e trovati tutti i valori di questa incognita, per risolvere compiutamente il sistema proposto, è necessario di determinare in funzione di questi i valori corrispondenti delle altre incognite, cioè rimane da sciogliersi il seguente problema:

Date n equazioni con $n-1$ incognite, che hanno uno o più sistemi di soluzioni comuni, determinare questi sistemi.

Il ch. sig. Liouville, nel vol. XII del suo Giornale, ha dato un metodo per risolvere questo problema. Abel, nel vol. XVII degli Annali di Gergonne lo aveva trattato con maggior generalità, ma soltanto nel caso di due sole equazioni con una incognita. Come può vedersi anche nel *Cours d'Algèbre supérieure* del ch. sig. Serret, egli aveva determinato, per mezzo delle funzioni simmetriche, una funzione razionale qualunque di una sola radice comune a due equazioni algebriche. I principî, sopra i quali è fondato il metodo di Abel, sono stati dimostrati finora soltanto per il caso di una sola equazione con una incognita; quindi la generalità, di cui esso è capace, non è stata finora provata. Dare tutta la possibile generalità al metodo di Abel e ai principî, sopra i quali si fonda, è lo scopo di questa breve Memoria.

Siano proposte le $n+1$ equazioni algebriche con n incognite

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_0(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)=0, \\ f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)=0, \end{array}\right.$$

le quali siano rispettivamente di grado $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$. Rappresentiamo i sistemi di soluzioni comuni a tutte l'equazioni (1), meno la prima, con

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} {}'\alpha_1,\ {}'\alpha_2,\ \ldots\ldots,\ {}'\alpha_n;\\ {}''\alpha_1,\ {}''\alpha_2,\ \ldots\ldots,\ {}''\alpha_n;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ {}^{\mu}\alpha_1,\ {}^{\mu}\alpha_2,\ \ldots\ldots,\ {}^{\mu}\alpha_n; \end{array}\right.$$

il primo dei quali sia comune a tutte.

È noto che si possono determinare sempre n^2 polinomi moltiplicatori $M_1', M_2', \ldots, M_n'$; $M_1'', M_2'' \ldots M_n''$; ...; $M_1^{(n)}, M_2^{(n)}, \ldots, M_n^{(n)}$, in modo che si abbia identicamente

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} M'_1\ f_1 + M'_2\ f_2 + \cdots + M'_n\ f_n = \varphi_1(x_1),\\ M''_1\ f_1 + M''_2\ f_2 + \cdots + M''_n\ f_n = \varphi_2(x_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ M_1^{(n)} f_1 + M_2^{(n)} f_2 + \cdots + M_n^{(n)} f_n = \varphi_n(x_n), \end{array}\right.$$

indicando un $\varphi_r(x_r)$ l'equazione finale risultante dall'eliminazione di tutte le incognite meno x_r. Rappresentando con D il determinante

$$\sum \pm M'_1\, M''_2\, M'''_3 \ldots M^{(n)}_n,$$

con Δ il determinante funzionale

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

e con $\theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$ il prodotto dei due determinanti D e Δ, si dimostrano facilmente [1] le due equazioni

$$(4)\qquad \theta({}^{r_1}\alpha_1,\ {}^{r_2}\alpha_2, \ldots, {}^{r_n}\alpha_n) = 0,$$

$$(5)\qquad \theta({}^{r}\alpha_1,\ {}^{r}\alpha_2, \ldots, {}^{r}\alpha_n) = \varphi'_1({}^{r}\alpha_1)\,\varphi'_2({}^{r}\alpha_2) \ldots \varphi'_n({}^{r}\alpha_n);$$

---

[1] Vedi la Memoria di Jacobi, *Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum* nel Crelle, vol. XIV, pp. 281-288, e la mia Memoria, *Sopra le serie doppie ricorrenti* negli Annali di Scienze matematiche e fisiche, t. VIII, pp. 48-61 (od anche pp. 139-147 di questo volume).

nella prima delle quali i valori numerici degl'indici superiori $r_1, r_2, \dots, r_n$ sono tutti differenti.

Ammesse queste notazioni e richiamati questi principî, passiamo ad estendere alcuni teoremi dal caso di una sola equazione a quello generale di un sistema di un numero qualunque di equazioni.

Teorema I. *Una funzione razionale e simmetrica di tutti i sistemi* (2) *meno uno, per esempio meno il primo, equivale a una funzione razionale e intera delle quantità di questo stesso sistema.*

Poniamo

$$(6) \qquad \Pi(a_1, a_2, \dots, a_r) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_r)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_r) \dots (a_{r-1} - a_r);$$

e

$$\frac{\varphi_1(x_1)}{x_1 - {}'\alpha_1} = \Psi_1(x_1, {}'\alpha_1), \ \frac{\varphi_2(x_2)}{x_2 - {}'\alpha_2} = \Psi_2(x_2, {}'\alpha_2), \dots, \frac{\varphi_n(x_n)}{x_n - {}'\alpha_n} = \Psi_n(x_n, {}'\alpha_n);$$

$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ saranno rispettivamente funzioni razionali e intere di x_1 e ${}'\alpha_1$, di x_2 e ${}'\alpha_2, \dots$, di x_n e ${}'\alpha_n$.

La funzione generatrice delle funzioni razionali, intere e simmetriche di tutti i sistemi (2) meno il primo, sarà

$$(7) \qquad G = \mathop{\mathrm{P}}_{m=2}^{m=\mu} \frac{\theta({}^m u_1, {}^m u_2, \dots, {}^m u_n)}{\Psi_1({}^m u_1)\, \Psi_2({}^m u_2) \dots \Psi_n({}^m u_n)} \mathop{\mathrm{P}}_{s=1}^{s=n} \frac{\Pi^2({}'' u_s, {}''' u_s, \dots, {}^\mu u_s)}{\Pi^2({}'' \alpha_s, {}''' \alpha_s, \dots, {}^\mu \alpha_s)};$$

Infatti, decomponendo in frazioni semplici, a cagione dell'equazione (4) si annullano tutti i termini, nei denominatori dei quali alcuni dei fattori, che contengono gli u cogli apici superiori eguali, hanno gli α cogli apici superiori differenti; a cagione dell'equazione (6), si annullano tutti i termini, nei denominatori dei quali alcuni dei fattori, che contengono gli u con apici inferiori eguali, hanno anche eguali gli apici superiori degli α; e per l'equazione (5), tutti gli altri termini hanno per numeratore l'unità. Dunque, abbiamo identicamente

$$(8) \qquad G = \Sigma \frac{1}{({}''u_1 - {}''\alpha_1) \dots ({}^\mu u_1 - {}^\mu \alpha_1) \dots ({}''u_n - {}''\alpha_n) \dots ({}^\mu u_n - {}^\mu \alpha_n)},$$

dove si debbono permutare tra loro contemporaneamente gl' indici superiori di tutti gli n sistemi di α, in tutti i modi possibili.

Ora, svolgendo in serie ordinata secondo le potenze decrescenti delle indeterminate ${}''u_1, {}''u_2, \dots, {}^\mu u_1, {}^\mu u_2, \dots$, l'espressione (8) di G, si ottiene per coefficiente del termine

$$(9) \qquad {}''u_1^{-({}''a_1+1)} \dots {}''u_n^{-({}''a_n+1)} \dots {}^\mu u_1^{-({}^\mu a_1+1)} \dots {}^\mu u_n^{-({}^\mu a_n+1)}$$

la funzione simmetrica

$$\sum {''\alpha_1}^{''a_1}\, {''\alpha_2}^{''a_2} \ldots {''\alpha_n}^{''a_n} \ldots {^{\mu}\alpha_1}^{^{\mu}a_1} \ldots {^{\mu}\alpha_n}^{^{\mu}a_n}. \tag{10}$$

L'espressione (7) di G è funzione razionale di $'\alpha_1, '\alpha_2, \ldots, '\alpha_n$, e dei coefficienti, poichè anche le funzioni Π^2 sono funzioni razionali dei coefficienti di $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$; quindi svolta in serie ordinata secondo le potenze decrescenti delle medesime indeterminate u, si otterrà per coefficiente del termine (9) una funzione razionale di $'\alpha_1, '\alpha_2, \ldots, '\alpha_n$, che potrà rendersi intera, perchè $'\alpha_1, '\alpha_2, \ldots, '\alpha_n$ sono rispettivamente radici dell'equazioni

$$\varphi_1(x_1) = 0, \quad \varphi_2(x_2) = 0, \quad \ldots, \varphi_n(x_n) = 0.$$

Dunque la funzione (10) sarà esprimibile razionalmente e sotto forma intera per le quantità $'\alpha_1, '\alpha_2, \ldots, '\alpha_n$. Ma una funzione razionale simmetrica di tutti i sistemi (2) meno il primo, si può rendere intera, moltiplicandone il numeratore e il denominatore per tutti i valori che prende il denominatore permutando tutti i sistemi tra loro in tutti i modi possibili; e resa intera sarà la somma di più espressioni della forma (10) moltiplicate per quantità razionali, e quindi sarà esprimibile razionalmente e sotto forma intera per $'\alpha_1, '\alpha_2, \ldots, '\alpha_n$; come volevamo dimostrare.

Teorema II. *Una funzione razionale e intera di grado qualunque di un solo dei sistemi* (2) *equivale sempre a una funzione razionale e intera delle quantità dello stesso sistema, la quale contiene un sol termine di grado* $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$, *e tutti gli altri di grado inferiore.*

Le quantità

$$u_{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \sum_{s=1}^{s=\mu} h_s\, {^s\alpha_1^{r_1}}\, {^s\alpha_2^{r_2}} \ldots {^s\alpha_n^{r_n}}$$

sono termini di una serie n^{upla} ricorrente, della quale le scale di relazione si ottengono, sostituendo nell'equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{t_1}\, x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}\, f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ x_1^{t_1}\, x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}\, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{t_1}\, x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}\, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right. \tag{11}$$

$u_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ in luogo di $x_1^{r_1}\, x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}$. Dati i valori delle μ indeterminate h_s, è chiaro che la serie deve risultare compiutamente determinata: dunque l'equazioni di primo grado che si ottengono, come abbiamo detto, dall'equazioni (11) debbono essere tali da potere servire a determinare linearmente tutti i termini della serie, quando ne siano conosciuti tanti quanti

bastano per determinare i μ valori di h, per esempio i primi μ, ossia tutti quelli nei quali $r_1 < m_1, r_2 < m_2, \ldots, r_n < m_n$. Questo varrà qualunque siano i valori dei coefficienti h, quindi anche per $h_1 = 1$, $h_2 = h_3 = \cdots = h_\mu = 0$. Dunque tutti i prodotti

$$'\alpha_1^{r_1} \, '\alpha_2^{r_2} \ldots '\alpha_n^{r_n}$$

si potranno esprimere linearmente per quei prodotti soli nei quali $r_1 < m_1 \ldots$, $r_n < m_n$; e una funzione intera qualunque di $'\alpha_1, '\alpha_2, \ldots, '\alpha_n$ si potrà ridurre a contenere un sol termine di grado $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$, e tutti gli altri di grado inferiore; c. v. d.

Teorema III. *Se* F_m *indica una funzione di* $^m\alpha_1, {}^m\alpha_2, \ldots, {}^m\alpha_n$ *razionale, intera e con un sol termine di grado* $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$, *e tutti gli altri di grado inferiore, e* Δ_m *indica il valore che prende il determinante funzionale quando ad* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *si sostituiscono rispettivamente* $^m\alpha_1, {}^m\alpha_2, \ldots, {}^m\alpha_n$;

$$\sum_{m=1}^{m=\mu} \frac{F_m}{\Delta_m}$$

sarà eguale al coefficiente del termine di grado $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$ *in* F.

Come nel teorema I si è dimostrata l'eguaglianza dei secondi membri dell'equazioni (7) e (8), si può provare ancora la seguente identità

$$\frac{D}{\varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2)\ldots\varphi_n(u_n)} = \sum_{m=1}^{m=\mu} \frac{1}{\Delta_m (u_1 - {}^m\alpha_1)(u_2 - {}^m\alpha_2)\ldots(u_n - {}^m\alpha_n)};$$

e poichè D è di grado non superiore a $\mu - m_1 - m_2 - \cdots - m_n$, dovranno nel primo membro, e quindi anche nel secondo, mancare i termini di grado superiore a $-(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$, quando si svolgano ambedue secondo le potenze decrescenti di $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Dunque

$$\sum \frac{{}^m\alpha_1^{r_1}\, {}^m\alpha_2^{r_2} \ldots {}^m\alpha_n^{r_n}}{\Delta_m} \tag{12}$$

sarà eguale a zero per tutti i valori di $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rispettivamente non superiori a $m_1 - 1$, $m_2 - 1, \ldots, m_n - 1$, e sarà eguale al coefficiente T di $u_1^{-m_1} u_2^{-m_2} \ldots u_n^{-m_n}$ nel primo membro svolto in serie, quando $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sono rispettivamente uguali a $m_1 - 1$, $m_2 - 1, \ldots, m_n - 1$; ma se prima di procedere al calcolo si fosse decomposto T in n fattori (alcuni dei quali potevano essere eguali a uno) e si fossero rispettivamente moltiplicati i primi membri dell'equazioni $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$ per questi fattori, il determinante funzionale Δ sarebbe stato moltiplicato per T, e quindi il valore

dell'espressione (12) sarebbe stato diviso per T, e perciò sarebbe stato uguale ad 1; e questo potremo sempre supporlo.

Ora, è chiaro che, nell'espressione

$$\sum \frac{F_m}{\Delta_m},$$

annullandosi tutti i termini della forma (12) e di grado minore di $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$, e quello di grado $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$ essendo eguale all'unità moltiplicata pel suo coefficiente; l'espressione stessa rimarrà eguale a quest'ultimo, come volevamo dimostrare.

Passiamo ora alla risoluzione del problema che ci siamo proposti in principio.

Problema. *Determinare una funzione razionale qualunque delle quantità che costituiscono un sistema di soluzioni comuni ad $n+1$ equazioni con n incognite.*

Sia $\Psi('\alpha_1, '\alpha_2, \ldots, '\alpha_n)$ la funzione da determinarsi. Poniamo

$$R = f_0('\alpha_1, '\alpha_2, \ldots, '\alpha_n)\, f_0(''\alpha_1, ''\alpha_2, \ldots, ''\alpha_n) \ldots f_0({}^{\mu}\alpha_1, {}^{\mu}\alpha_2, \ldots, {}^{\mu}\alpha_n),$$

la quale espressione dovrà essere identicamente nulla; indichiamo con V_s la quantità

$$\frac{R}{f_0({}^s\alpha_1, {}^s\alpha_2, \ldots, {}^s\alpha_n)}$$

che, per i teoremi I e II, sarà eguale a una funzione razionale intera di ${}^s\alpha_1, {}^s\alpha_2, \ldots, {}^s\alpha_n$, con un sol termine di grado $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$ e tutti gli altri di grado inferiore, che rappresenteremo con F_s. È evidente che V_s sarà nullo per tutti i valori di s, fuorichè per $s = 1$; quindi

$$\frac{V_1}{\Delta_1} = \sum_{m=1}^{m=\mu} \frac{V_m}{\Delta_m} = \sum_{m=1}^{m=\mu} \frac{F_m}{\Delta_m},$$

e per il teorema III, indicando con K il coefficiente del termine di più alto grado in F,

$$\frac{V_1}{\Delta_1} = K.$$

Analogamente, indicando con H il coefficiente del termine di grado $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$, in $V\Psi$ ridotto, come abbiamo detto nel teorema II, e ponendo $\Psi({}^m\alpha_1, {}^m\alpha_2, \ldots, {}^m\alpha_n) = \Psi_m$, otterremo

$$\frac{V_1 \Psi_1}{\Delta_1} = \sum_{m=1}^{m=\mu} \frac{V_m \Psi_m}{\Delta_m} = H.$$

Dividendo l'una per l'altra queste due equazioni, avremo finalmente

$$\varphi_1 = \frac{H}{K}.$$

Quando l'equazioni abbiano più sistemi di soluzioni comuni, non si trova difficoltà ad estendere i metodi trovati per il caso di un solo. Mi contenterò di accennare i seguenti teoremi:

I. *Le condizioni necessarie e sufficienti, perchè $n+1$ equazioni abbiano t sistemi di soluzioni comuni, sono espresse dalle equazioni*

$$R = 0, \frac{\partial R}{\partial a_{0,0,\ldots,0}} = 0, \frac{\partial^2 R}{\partial a_{0,0,\ldots,0}^2} = 0, \ldots, \frac{\partial^{t-1} R}{\partial a_{0,0,\ldots,0}^{t-1}} = 0,$$

dove R *è il primo membro dell'equazione finale risultante, e $a_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ indica il coefficiente di $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}$ in f_0.*

II. *L'equazione che ha per radici i t valori della funzione*

$$\varphi = \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_n^{r_n},$$

dove si prendono successivamente per gli α i valori che hanno nei t sistemi comuni alle $n+1$ equazioni, è

$$\frac{\partial^t R}{\partial a_{0,0,\ldots,0}^t} \varphi^t - \frac{\partial^t R}{\partial a_{r_1, r_2, \ldots r_n} \partial a_{0,0,\ldots,0}^{t-1}} \varphi^{t-1}$$
$$+ \frac{\partial^t R}{\partial a_{r_1, r_2, \ldots, r_n}^2 \partial a_{0,0,\ldots 0}^{t-2}} \varphi^{t-2} - \cdots \pm \frac{\partial^t R}{\partial a_{r_1, r_2, \ldots, r_n}^t} = 0.$$

Pisa, 26 novembre 1857.

XV.

SOPRA I COVARIANTI DELLE FORME BINARIE

(Dagli *Annali di matematica pura ed applicata*, serie I, t. I, pp. 129-134, Roma, 1858).

---

1. È noto che i covarianti di una forma binaria

$$(1)\quad F(x, y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 . 2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n$$

sono definiti dalle due equazioni a derivate parziali lineari

$$(2)\quad \begin{cases} a_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots + n a_{n-1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_n} - y \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 , \\ n a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \cdots + a_n \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} - x \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 . \end{cases}$$

Se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sono le n radici dell'equazione

$$(3)\qquad F(x, 1) = 0 ,$$

per quello che il prof. Brioschi ha dimostrato ([1]), abbiamo

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots + n a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} ,$$

$$n a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} = n \theta \frac{a_1}{a_0} \varphi + \sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} ,$$

supposto essere θ il grado del covariante φ rispetto a' coefficienti della forma (1). Onde, se poniamo

$$(4)\quad \begin{cases} y \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} = X_1 \varphi , \\ - x \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + x_1^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + x_n^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} = X_2 \varphi , \end{cases}$$

l'equazioni (2) divengono

$$X_1 \varphi = 0 , \quad X_2 \varphi = - n \theta \frac{a_1}{a_0} \varphi .$$

([1]) V. *Annali di Sc. mat. e fis.*, t. V, p. 207.

Ma

$$\frac{n\,a_1}{a_0} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,;$$

quindi, accennata con s_1 la somma delle radici della equazione (3), le equazioni (2) prendono la forma

$$\text{(5)} \qquad X_1\,\varphi = 0\,,\quad X_2\,\varphi = \theta s_1\,.$$

Da queste equazioni (5) si deduce facilmente la forma generale seguente, data anche da Cayley, per i covarianti di grado θ e di ordine m, della forma binaria (1):

$$\text{(6)} \qquad \varphi = a_0^{\theta}\, \Sigma\Pi\,(x_r - x_s)^{\alpha_{r,s}}\,(x - y x_u)^{\alpha_{0,u}}\,,$$

dove col segno Π indichiamo il prodotto di fattori della forma $x_r - x_s$, e $x - yx_u$ inalzati a tali esponenti che soddisfacciano all'equazioni

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \alpha_{0,1} + \alpha_{0,2} + \cdots + \alpha_{0,n} = m\,, \\ \alpha_{r,1} + \alpha_{r,2} + \cdots + \alpha_{r,n} + \alpha_{0,r} = \theta\,; \end{cases}$$

cioè i fattori che contengono x debbono essere m e θ quelli che contengono una radice qualunque x_r. Col segno Σ poi indichiamo la somma di tutti i termini di questa specie, che possono formare una funzione simmetrica delle radici che non sia identicamente nulla.

2. Quando $m = \theta$, facendo $y = 1$ e $x = x_{n+1}$, è chiaro che φ diviene un invariante di grado θ di una forma di grado $n+1$, alla quale corrispondono le radici $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n+1}$. Dunque, *a ogni covariante di grado θ e di ordine θ di una forma binaria di grado n, corrisponde un invariante di grado θ di una forma binaria di grado $n+1$.*

3. Se l'equazione (2) ha t radici $x_1, x_2 \ldots x_t$ eguali tra loro, saranno nulli per qualunque valore delle variabili tutti i covarianti di grado m, quando non sarà possibile costruire termini della forma (6), prendendo nulli $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}, \ldots, \alpha_{t-1,t}$ e soddisfacendo all'equazioni (7); cioè se non saranno risolubili in numeri interi e positivi l'equazioni

$$\begin{array}{l}
\alpha_{1,t+1} + \alpha_{1,t+2} + \cdots + \alpha_{1,n} + \alpha_{0,1} = \theta\,, \\
\alpha_{2,t+1} + \alpha_{2,t+2} + \cdots + \alpha_{2,n} + \alpha_{0,2} = \theta\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{t,t+1} + \alpha_{t,t+2} + \cdots + \alpha_{t,n} + \alpha_{0,t} = \theta\,, \\
\alpha_{1,t+1} + \alpha_{2,t+1} + \cdots + \alpha_{t+1,t+2} + \alpha_{t+1,t+3} + \cdots + \alpha_{t+1,n} + \alpha_{0,t+1} = \theta\,, \\
\alpha_{1,t+2} + \alpha_{2,t+2} + \cdots + \alpha_{t+1,t+2} + \alpha_{t+2,t+3} + \cdots + \alpha_{t+2,n} + \alpha_{0,t+2} = \theta\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} + \cdots + \alpha_{n,t+1} + \alpha_{n,t+2} + \cdots + \alpha_{n,n-1} + \alpha_{0,n} = \theta\,, \\
\alpha_{0,1} + \alpha_{0,2} + \cdots + \alpha_{0,t+1} + \alpha_{0,t+2} + \cdots + \alpha_{0,n} = m\,.
\end{array}$$

Ora, sottraendo la somma delle prime t equazioni dalla somma di tutte le altre, si ottiene

$$2\alpha_{t+1,t+2}+2\alpha_{t+1,t+3}+\cdots+2\alpha_{n-1,n}+\sum_{k=t+1}^{k=n}\alpha_{0,k}=(n-2t)\theta+m.$$

È chiaro che questa equazione è impossibile in numeri positivi, se

$$(n-2t)\,\theta+m<0\,,$$

ossia

$$t>\frac{n}{2}+\frac{m}{2\theta}\,.$$

Dunque, *se l'equazione* (3) *ha un numero di radici eguali maggiore della metà del grado aumentato di* $\frac{m}{2\theta}$, *saranno identicamente nulli tutti i covarianti della forma* (1), *per i quali il rapporto dell'ordine al grado non è maggiore di* $\frac{m}{2\theta}$.

4. Se $\varphi_0(x,y)$, $\varphi_1(x,y)$, ..., $\varphi_t(x,y)$ sono covarianti della forma (1), tutti dello stesso grado θ, x è una radice dell'equazione (3), e

$$(8)\qquad \psi(z)=z^t\varphi_0(x,1)+z^{t-1}\varphi_1(x,1)+z^{t-2}\varphi_2(x,1)+\cdots+\varphi_t(x,1)=0\,;$$

z sarà radice di un'equazione

$$(9)\qquad f(z)=A_0z^{tn}+A_1z^{tn-1}+\cdots+A_{tn}=0\,,$$

che avrà i coefficienti funzioni razionali di quelli dell'equazione (3), e le radici dell'equazione (3) saranno funzioni razionali di quelle dell'equazione (9).

Ora, applicando all'equazione (8) le operazioni X_1 e X_2, avremo, poichè $X_1\varphi_r(x,1)=0$, e $X_2\varphi_r(x,1)=\theta s_1\varphi_r(x,1)$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}X_1z=0\,,\ \text{e}\ \frac{\partial\psi}{\partial z}X_2z+\theta s_1\psi=0\,,$$

onde, quando $\psi(z)=0$ non ha radici eguali,

$$X_1(z)=0\,,\ X_2(z)=0\,,$$

e in conseguenza

$$X_1A_0=0\,,\ X_1A_1=0\,,\ X_1A_2=0\,,\ldots,X_1A_{tn}=0\,,$$
$$X_2A_0=0\,,\ X_2A_1=0\,,\ X_2A_2=0\,,\ldots,X_2A_{tn}=0\,.$$

Dunque tutti i coefficienti della forma

$$A_0z^{tn}+A_1z^{tn-1}y+A_2z^{tn-2}y^2+\cdots+A_{tn}y^{tn}$$

sono invarianti.

Reciprocamente, quando in un'equazione

$$(10)\qquad f(z)=T_0z^s+T_1z^{s-1}+\cdots+T_s=0\,,$$

i coefficienti sono tutti invarianti della forma (1), tra le radici dell'equazione (10) e quelle dell'equazione (3) non può esistere un'equazione irriduttibile:

$$(11) \quad \psi(z, x) = z^t \varphi_0(x, 1) + z^{t-1} \varphi_1(x, 1) + \cdots + \varphi_t(x, 1) = 0,$$

senza che le funzioni $\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_t(x, y)$ siano covarianti della forma (1), tutti dello stesso grado.

Infatti, poichè $X_1 T_r = 0$, $X_2 T_r = 0$, avremo

$$X_1 f(z) = f'(z) X_1 z = 0, \quad X_2 f(z) = f'(z) X_2 z = 0;$$

onde, se $f(z) = 0$ non ha radici eguali, sarà

$$X_1 z = 0, \quad X_2 z = 0;$$

e applicando le operazioni X_1 e X_2 all'equazione (11), otterremo

$$(12) \qquad \begin{cases} z^t X_1 \varphi_0 + z^{t-1} X_1 \varphi_1 + \cdots + X_1 \varphi_t = 0, \\ z^t X_2 \varphi_0 + z^{t-1} X_2 \varphi_1 + \cdots + X_2 \varphi_t = 0. \end{cases}$$

L'equazioni (12) devono coesistere coll'equazione (11), che è irriduttibile; quindi essendo dello stesso grado rispetto a z, o dovranno essere identicamente nulle, o non potranno differire dall'equazione (11) altro che per un fattore, che sia una funzione intera di x.

I coefficienti della prima sono rispetto alle radici dell'equazione (3), di grado inferiore d'uno ai corrispondenti coefficienti dell'equazione (11); dunque la prima equazione non potrà essere identica con questa, e dovrà essere identicamente nulla; dunque avremo

$$X_1 \varphi_r = 0.$$

I coefficienti della seconda sono, in ciascuno dei loro termini, rispetto ad x dello stesso grado e rispetto alle medesime radici di grado superiore d'uno ai corrispondenti coefficienti dell'equazione (11); dunque la seconda equazione o sarà identicamente nulla, e avremo

$$X_2 \varphi_r = 0:$$

oppure non differirà dall'equazione (11) altro che per un fattore numerico moltiplicato per una funzione lineare omogenea simmetrica delle radici dell'equazione (3), e avremo

$$X_2 \varphi_r = \theta s_1 \varphi_r.$$

Dunque i coefficienti dell'equazione (11) sono tutti covarianti dello stesso grado θ, che può essere anche eguale a zero, e abbiamo il seguente teorema:

Sono invarianti della forma (1) *tutti i coefficienti d'un'equazione, quando tra le sue radici e quelle dell'equazione* (3) *esiste un'equazione irriduttibile, che ha per coefficienti covarianti della forma* (1) *tutti dello stesso grado, nei quali sia posta una variabile eguale ad uno, e l'altra eguale a una radice dell'equazione* (3). Reciprocamente: *Se i coefficienti di*

un'equazione sono invarianti della forma (1), *ed esiste un'equazione irriduttibile tra le sue radici e quelle dell'equazione* (3), *i coefficienti di questa equazione saranno covarianti della forma* (1), *nei quali sia posta una variabile eguale ad uno, e l'altra eguale a una radice dell'equazione* (3).

5. Se F, F', F_2, F_3, ..., F_n sono le funzioni di Sturm relative all'equazione (3), si ha per il teorema di Sylvester,

$$F_r = a_0^{2(r-1)} \Sigma \Pi^2 (x_1, x_2, \ldots, x_r)(x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \ldots (x - x_n),$$

dove con $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ rappresentiamo il prodotto di tutte le differenze delle radici $x_1, x_2, \ldots, x_r$ dell'equazione (3); e ponendo

$$F_r = P_r x^{n-r} + P'_r x^{n-r-1} + P_r'' x^{n-r-2} + \cdots + P_r^{(n-r)},$$

abbiamo

$$P_r^2 F_{r+2} = Q_r F_{r+1} - P^2_{r+1} F_r,$$

essendo

$$Q_r = P_r P_{r+1} x + P'_r P_{r+1} - P'_{r+1} P_r.$$

Quindi per la determinazione dei quozienti Q_r basta conoscere espressi in funzione dei coefficienti di F i primi due termini delle funzioni F_r.

Il primo coefficiente P_r è eguale al coefficiente del primo termine del covariante

$$a_0^{2(r-1)} \Sigma \Pi^2 (x_1 x_2 \ldots x_r)(x - x_{r+1})^{2(r-1)} (x - x_{r+2})^{2(r-1)} \ldots (x - x_n)^{2(r-1)}.$$

Dunque: *il coefficiente del primo termine dell'r^{esima} funzione di Sturm è eguale al coefficiente del primo termine di un covariante di grado* $2(r-1)$ *e di ordine* $2(r-1)(n-r)$.

Il secondo coefficiente P'_r si deduce facilmente dal primo, mediante l'operazione

$$\begin{aligned} X_2 &= x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_n^2 \frac{\partial}{\partial x_n} + n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} \\ &= n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-2) a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Infatti, abbiamo

$$P_r = a_0^{2(r-1)} \Sigma \Pi^2 (x_1, x_2, \ldots, x_r),$$

e quindi

$$\begin{aligned} X_2 P_r &= 2(r-1) a_0^{2(r-1)-1} \Sigma \Pi^2 (x_1, x_2, \ldots, x_r)[a_0(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n a_1] \\ &= -2(r-1) a_0^{2(r-1)} \Sigma \Pi^2 (x_1, x_2, \ldots, x_r)(x_{r+1} + x_{r+2} + \cdots + x_n); \end{aligned}$$

ma

$$P'_r = - a_0^{2(r-1)} \Sigma \Pi^2 (x_1, x_2, \ldots, x_r)(x_{r+1} + x_{r+2} + \cdots + x_n);$$

dunque

$$P'_r = \frac{1}{2(r-1)} X_2 P_r.$$

Applicando alla funzione F_r l'operazione

$$X_1 = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + na_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} - y \frac{\partial}{\partial x}$$
$$= - \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_n} - y \frac{\partial}{\partial x},$$

è chiaro che avremo

$$X_1 F_r = 0;$$

quindi tra i coefficienti successivi di F_r esistono le relazioni

$$X_1 P_r = 0, X_1 P'_r = (n-r) P_r, X_1 P_r'' = (n-r-1) P'_r, \ldots$$
$$X_1 P_r^{(n-r)} = P_r^{(n-r-1)}$$ [1].

Pisa, 21 aprile 1858.

[1] Nella Memoria originale erano sfuggiti parecchi errori gravi, che furono corretti in questa ristampa. Di conseguenza fu modificato lievemente qua e là il testo primitivo per rendere le dimostrazioni rigorose ed intelligibili.

V. C.

XVI.

SOPRA LE FUNZIONI SIMMETRICHE DELLE SOLUZIONI COMUNI A PIÙ EQUAZIONI ALGEBRICHE

(Dagli *Annali di matematica pura ed applicata*, serie I, t. I, pp. 193-204, Roma, 1858).

Le funzioni razionali e simmetriche delle soluzioni comuni a n equazioni algebriche con n incognite sono esprimibili per funzioni razionali dei coefficienti dell'equazioni. Ma, quantunque si conoscano più metodi proposti da Waring, Poisson, Jacobi e altri, seguendo i quali è possibile la determinazione di queste funzioni, la complicanza dei calcoli che essi richiedono, ha impedito finora di darne la forma generale, come fu fatto da Waring per le funzioni simmetriche semplici delle radici di una sola equazione; e di trovare relazioni tra gl'indici rispetto ai coefficienti e il grado e gl'indici rispetto alle radici, analoghe a quelle che il mio amico prof. Brioschi ha dimostrate nel caso di una sola equazione [1]. L'importanza di questi problemi nelle teoriche dell'eliminazione, e dei *combinanti* di un sistema di n funzioni razionali omogenee di $n+1$ variabili mi ha indotto a tentarne la soluzione, che ho ottenuta, valendomi di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari simultanee, le quali devono essere soddisfatte da un sistema qualunque di soluzioni comuni a n equazioni algebriche con n incognite.

1. Siano n equazioni algebriche di grado m con n incognite:

$$(1)\quad \begin{cases} F_1 = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n)_1 \, x_n^{m-r_1} \, x_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots x_1^{r_{n-1}-r_n} = 0 \,, \\ F_2 = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n)_2 \, x_n^{m-r_1} \, x_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots x_1^{r_{n-1}-r_n} = 0 \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n)_n \, x_n^{m-r_1} \, x_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots x_1^{r_{n-1}-r_n} = 0 : \end{cases}$$

---

[1] V. *Annali di Sc. mat. e fis.*, t. V, p. 313.

dove il segno sommatorio deve estendersi a tutti i valori interi e positivi di $r_1, r_2, \ldots, r_n$, pei quali si ha:

$$r_n \leq r_{n-1} \leq r_{n-2} \leq \ldots\ldots \leq r_2 \leq r_1 \leq m, \tag{2}$$

e

$$N_{r_1 r_2 \ldots r_n} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m}{1.2\ldots(m - r_1).1.2\ldots(r_1 - r_2)\ldots.1.2\ldots.(r_{n-1} - r_n).1.2\ldots r_n} \tag{3}$$

Chiameremo *indice totale* del prodotto di più coefficienti dell'equazioni (1) la somma degli esponenti di tutti i fattori moltiplicati per le rispettive somme dei loro indici; e *indice parziale* t^{esimo} la somma degli esponenti di tutti i fattori moltiplicati per i rispettivi indici t^{esimi}.

2. Affinchè una funzione razionale e intera dei coefficienti dell'equazioni (1) sia omogenea e d'indice θ rispetto all'indice totale, è necessario e sufficiente che sia

$$\sum (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)(r_1, r_2, \ldots, r_n)_s \frac{\partial f}{\partial (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s} = \theta f; \tag{4}$$

e perchè sia omogenea e d'indice φ rispetto all'indice parziale t^{esimo}, è necessario e sufficiente che si abbia

$$\sum r_t (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s \frac{\partial f}{\partial (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s} = \varphi f. \tag{5}$$

3. Prendiamo le operazioni

$$\Delta_{t,u} = \sum (r_u - r_{u+1})(r_1, \ldots, r_u, r_{u+1}+1, r_{u+2}+1, \ldots, r_t+1, r_{t+1}, \ldots, r_n)_s \frac{\partial}{\partial (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s}, \tag{6}$$

$$\Delta_{u,u} = \sum (r_u - r_{u+1})(r_1, r_2, \ldots, r_n)_s \frac{\partial}{\partial (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s}, \tag{7}$$

$$\Delta_{u,t} = \sum (r_t - r_{t+1})(r_1, \ldots, r_u, r_{u+1}-1, r_{u+2}-1, \ldots, r_t-1, r_{t+1}, \ldots, r_n)_s \frac{\partial}{\partial (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s}, \tag{8}$$

nelle quali $t < u$, il segno sommatorio deve estendersi a tutti i valori interi e positivi di $r_1, r_2, \ldots, r_n$, che soddisfano alle condizioni (2), e a tutti i valori di s compresi tra zero e $n + 1$, e si deve porre $r_0 = m$, $r_{n+1} = 0$.

È chiaro che se f è una funzione omogenea e d'indice θ rispetto all'indice totale, $\Delta_{v,w} f$ sarà omogenea e d'indice $\theta + v - w$ rispetto all'indice totale; se è omogenea e d'indice φ rispetto all'indice parziale q^{esimo}, $\Delta_{v,w} f$ sarà omogenea e d'indice $\varphi + 1$, φ, $\varphi - 1$, rispetto al medesimo indice, secondo che $w < q < v + 1$, q maggiore del maggiore o minore o eguale al minore dei due numeri v e w, oppure $v < q < w + 1$.

4. Se poniamo nell'equazioni (1) invece delle incognite le rispettive funzioni irrazionali dei coefficienti, che costituiscono uno dei sistemi di solu-

zioni comuni, avremo un risultato identicamente eguale a zero. Quindi, se effettuiamo, dopo aver fatta questa sostituzione, una dell'operazioni (6), (7), (8) sopra il primo membro di una qualunque dell'equazioni (1), avremo identicamente zero; cioè, operando col simbolo (6) sopra F_s, otterremo

$$\sum(r_u - r_{u+1})\mathrm{N}_{r_1 r_2 \dots r_n}(r_1, r_2, \dots, r_u, r_{u+1}+1, \dots, r_t+1, \dots, r_n)_s x_n^{m-r_1} x_{n-1}^{r_1-r_2} \dots x_1^{r_{n-1}-r_n}$$

$$+\sum(r_v - r_{v+1})\mathrm{N}_{r_1 r_2 \dots r_n}(r_1, r_2, \dots, r_n)_s x_n^{m-r_1} x_{n-1}^{r_1-r_2} \dots x_{n-v}^{r_v - r_{v+1}-1} \dots x_1^{r_{n-1}-r_n} \Delta_{t,u} x_{n-v} = 0,$$

ossia

$$\sum \mathrm{N}_{r_1 r_2 \dots r_n}(r_1, r_2, \dots, r_n)_s x_n^{m-r_1} x_{n-1}^{r_1-r_2} \dots x_1^{r_{n-1}-r_n} \Big\{ (r_t - r_{t+1}) \frac{x_{n-u}}{x_{n-t}} + \tag{9}$$

$$+ \sum (r_v - r_{v+1}) \frac{\Delta_{t,u} x_{n-v}}{x_{n-v}} \Big\} = 0.$$

Operando con i simboli $\Delta_{u,u}$, $\Delta_{u,t}$ avremo in modo analogo

$$\sum \mathrm{N}_{r_1 r_2 \dots r_n}(r_1, r_2, \dots, r_n)_s x_n^{m-r_1} x_{n-1}^{r_1-r_2} \dots x_1^{r_{n-1}-r_n} \Big\{ r_u - r_{u+1} + \tag{10}$$

$$+ \sum (r_v - r_{v+1}) \frac{\Delta_{v,u} x_{n-v}}{x_{n-v}} \Big\} = 0,$$

$$\sum \mathrm{N}_{r_1 r_2 \dots r_n}(r_1, r_2, \dots, r_n)_s x_n^{m-r_1} x_{n-1}^{r_1-r_2} \dots x_1^{r_{n-1}-r_n} \Big\{ (r_u - r_{u+1}) \frac{x_{n-t}}{x_{n-u}} + \tag{11}$$

$$+ \sum (r_v - r_{v+1}) \frac{\Delta_{u,t} x_{n-v}}{x_{n-v}} \Big\} = 0.$$

Se diamo ad s successivamente i valori $1, 2, \dots, n$, da ciascuna delle equazioni (9), (10), (11) abbiamo n equazioni lineari con n incognite, le quali sono, per la prima, gli n valori $\Delta_{t,u} x_{n-v}$; per la seconda, gli n valori $\Delta_{u,u} x_{n-v}$; per la terza gli n valori $\Delta_{u,t} x_{n-v}$; quindi esisterà un sol sistema di valori per queste incognite, il quale sarà dato, come è facile a verificarsi, dalle due equazioni

$$\Delta_{t,u} x_{n-p} = 0, \quad \Delta_{t,u} x_{n-t} = - x_{n-u}, \tag{12}$$

dove p non è eguale a t.

Quando $t = n$, all'equazioni (12) bisogna sostituire

$$\Delta_{n,u} x_{n-p} = x_{n-p} x_{n-u}, \tag{13}$$

e quando $u = n$, alla seconda dell'equazioni (12) bisogna sostituire

$$\Delta_{u,n} x_{n-u} = -1, \tag{14}$$

e quando $t = u = n$, bisogna prendere, invece della prima, l'equazione

$$\Delta_{n,n} x_{n-p} = x_{n-p}. \tag{15}$$

5. L'equazioni (12), (13), (14) e (15) dànno un sistema di equazioni a derivate parziali lineari e simultanee, che debbono esser soddisfatte da tutti i sistemi di soluzioni comuni all'equazioni (1), e del quale è un caso particolare il sistema delle prime tre equazioni date da Raabe ([1]) per le radici di una sola equazione. Infatti ponendo $n=1$, l'equazioni (14), (12), e (13) dànno

$$\Delta_{0,1}\, x_1 = \sum r a_{r-1} \frac{\partial x_1}{\partial a_r} = -1\,,$$

$$\Delta_{0,0}\, x_1 = \sum (m-r)\, a_r \frac{\partial x_1}{\partial a_r} = -x_1\,,$$

$$\Delta_{1,0}\, x_1 = \sum (m-r)\, a_{r+1} \frac{\partial x_1}{\partial a_r} = x_1^2\,;$$

le quali coincidono con quelle date da Raabe e da Brioschi ([2]), se prendiamo l'equazione sotto la forma

$$a_0\, x^m + m a_1\, x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\, a_2\, x^{m-2} + \cdots + a_m = 0,$$

e osserviamo che

$$\sum m a_r \frac{\partial x_1}{\partial a_r} = 0\,,$$

perchè le radici sono omogenee e di grado zero rispetto ai coefficienti; con che la seconda delle precedenti equazioni diviene

$$\sum r a_r \frac{\partial x_1}{\partial a_r} = x_1\,,$$

la quale è data ancora dall'equazione (15).

6. Il sistema di equazioni (12), (13), 14) e (15) equivale al sistema

$$x_n = \frac{y_n}{y_0}\,,\quad x_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_0}\,, \ldots, x_1 = \frac{y_1}{y_0}\,; \tag{16}$$

$$\Delta_{t,u}\, y_{n-p} = 0\,, \tag{17}$$

$$\Delta_{t,u}\, y_{n-t} = -\, y_{n-u}\,; \tag{18}$$

dove t e u hanno qualunque valore intero e positivo non maggiore di n, e p è differente da t. Dunque, se prendiamo l'equazioni (1) sotto la forma omogenea

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_1\, y_n^{m-r_1}\;\; y_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots y_1^{r_{n-1}-r_n}\;\; y_0^{r_n} = 0, \\ f_2 = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_2\, y_n^{m-r_1}\;\; y_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots y_1^{r_{n-1}-r_n}\;\; y_0^{r_n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_n\, y_n^{mr-_1}\;\; y_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots y_1^{r_{n-1}-r_n}\;\; y_0^{r_n} = 0\,; \end{array}\right. \tag{19}$$

([1]) V. Crelle, vol. XXVIII.

([2]) V. *Annali di Sc. mat. e fis.*, t. V, p. 119.

l'equazioni a derivate parziali, che dovranno essere soddisfatte da un sistema qualunque di soluzioni comuni

$$y'_0, y'_1, \dots, y'_n,$$

saranno le $(n+1)^3$ che si ottengono dalle (17) e (18), dando a t, u, p, tutti i valori interi e positivi non maggiori di n.

7. Sia

$$\text{(20)} \qquad R = \sum P_\rho y_1^{\theta-\rho} y_0^\rho$$

la *risultante* delle funzioni (19) quando vi si riguardino variabili soltanto

$$y_2, y_3, y_4, \dots, y_n.$$

Il primo coefficiente P_0 è evidentemente la risultante delle funzioni (19), dove si è posto $y_0 = 0$; quindi non potrà contenere i coefficienti delle funzioni (19) che hanno l'ultimo indice differente da zero. Dunque P_0 sarà omogeneo e d' indice zero rispetto all'ultimo indice parziale.

8. Se poniamo in R invece di y_1 e y_0 i valori corrispondenti che fanno parte di uno qualunque dei sistemi di soluzioni comuni all'equazioni (19), abbiamo zero per risultato; dunque avremo anche identicamente zero, operando sopra R, dopo questa sostituzione, con uno qualunque dei simboli $\Delta_{t,u}$, e sarà

$$\Delta_{n,n-1} R = \sum y_1^{\theta-\rho} y_0^\rho \Delta_{n,n-1} P_\rho - \sum \rho P_\rho y_1^{\theta-\rho+1} y_0^{\rho-1}$$
$$= \sum y_1^{\theta-\rho} y_0^\rho (\Delta_{n,n-1} P_\rho - (\rho+1) P_{\rho+1}) = 0, \dots .$$

Questa equazione dev' esser soddisfatta da tutte le radici dell'equazione (20), ed è dello stesso grado; dunque o dovrà avere il primo membro identicamente nullo, o i suoi coefficienti dovranno essere proporzionali a quelli dell'equazione (20); ma questa ultima condizione non può verificarsi, perchè i coefficienti delle due equazioni sono di grado eguale rispetto ai coefficienti, ma differenti rispetto all'ultimo indice; dunque dovrà aversi necessariamente

$$\text{(21)} \qquad P_{\rho+1} = \frac{1}{\rho+1} \Delta_{n,n-1} P_\rho, \qquad \Delta_{n,n-1} P_\theta = 0;$$

e quindi tutti i coefficienti di R si dedurranno dal primo, mediante la sola operazione $\Delta_{n,n-1}$ ripetuta più volte; e poichè questa operazione aumenta di uno l'ultimo indice, tutti i coefficienti P_ρ saranno omogenei e d' indice ρ rispetto all'ultimo indice parziale.

9. L'ultimo coefficiente P_θ è la risultante delle funzioni (19), nelle quali sia fatto $y_1 = 0$; dunque tutti i coefficienti delle funzioni (19) che compariscono in esso, hanno i due ultimi indici eguali, e quindi, essendo omogeneo e d' indice θ rispetto all'ultimo indice, sarà anche omogeneo e d' indice θ rispetto al penultimo indice.

10. Operando sopra R con $\Delta_{n-1,n}$ abbiamo

$$\sum y_1^{\theta-\rho}\, y_0^{\rho}\, \Delta_{n-1,n}\, P_\rho - \sum (\theta-\rho)\, P_\rho\, y_1^{\theta-\rho-1}\, y_0^{\rho+1}$$
$$= \sum \left(\Delta_{n-1,n}\, P_\rho - (\theta-\rho+1)\, P_{\rho-1}\right) y_1^{\theta-\rho}\, y_0^{\rho}\,;$$

onde, con osservazioni analoghe a quelle fatte di sopra, si deduce

$$P_{\rho-1} = \frac{1}{\theta-\rho+1}\, \Delta_{n-1,n}\, P_\rho\,, \quad \Delta_{n-1,n}\, P_0 = 0. \tag{22}$$

Dunque tutti i coefficienti di R si deducono dall'ultimo, per mezzo dell'operazione $\Delta_{n-1,n}$ ripetuta; e poichè questa non muta altro che gli ultimi indici, tutti i P saranno omogenei e d'indice θ rispetto al penultimo indice.

11. Effettuando sopra R l'operazione $\Delta_{t,u}$, dove t e u sono differenti da n e da $n-1$, abbiamo

$$\sum y_1^{\theta-\rho}\, y_0^{\rho}\, \Delta_{t,u}\, P_\rho = 0\,,$$

onde si deduce come sopra

$$\Delta_{t,u}\, P_\rho = 0\,, \tag{23}$$

e quindi

$$(\Delta_{t,u}\Delta_{u,t} - \Delta_{u,t}\Delta_{t,u}) P_\rho = \sum (r_t - r_{t+1} - r_u + r_{u+1})\, (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s \frac{\partial P_\rho}{\partial (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s} = 0.$$

Da questa equazione, perciò che abbiamo detto in principio (n. 2), si deduce facilmente l'omogeneità di P_ρ rispetto agl'indici $(n-2)^{esimo}$, $(n-3)^{esimo}$, ... 2°, 1°, e indicando quest'indici di P_ρ rispettivamente con i_n, i_{n-1}, i_{n-2} ... i_2, i_1, e con φ il grado di P_ρ rispetto ai coefficienti delle funzioni (19), si ottiene

$$\begin{aligned} m\varphi - 2i_1 + i_2 &= 0\,, \\ i_1 - 2i_2 + i_3 &= 0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ i_{n-3} - 2i_{n-2} + i_{n-1} &= 0\,: \end{aligned}$$

quindi osservando che $i_{n-1} = \theta$, si deduce che i_{n-1}, i_{n-2}, ... i_1, $m\varphi$ formano una progressione aritmetica la cui ragione è $\dfrac{m\varphi-\theta}{n-1}$; ma sappiamo che $\varphi = \dfrac{n\theta}{m}$, come anche dimostreremo alla fine di questa Memoria, onde avremo

$$i_1 = (n-1)\,\theta,\ i_2 = (n-2)\theta\,, \ldots, i_{n-2} = 2\theta\,,\ i_{n-1} = \theta,\ i_n = \rho.$$

Dunque tutti i coefficienti della risultante sono omogenei e d'indice eguale al medesimo multiplo di θ, rispetto a un indice parziale qualunque, purchè non sia l'ultimo, e rispetto a questo sono pure omogenei e d'indice eguale al rispettivo indice che loro conviene come coefficienti d'una forma binaria ordinata per le potenze crescenti di y_0.

12. Operando sopra R con $\Delta_{n,t}$, abbiamo

$$\Delta_{n,t}\, R = \sum y_1^{\theta-\rho}\, y_0^{\rho}\, \Delta_{n,t}\, P_\rho - \sum \rho\, P_\rho\, y_1^{\theta-\rho}\, y_0^{\rho-1}\, y_{n-t} = 0,$$

onde si ricava come sopra

$$y_{n-t} = \frac{\Sigma y_1^{\theta-\rho} y_0^{\rho} \Delta_{n,t} P_\rho}{\Sigma \rho P_\rho y_1^{\theta-\rho} y_0^{\rho-1}},$$

e sostituendo i valori (16),

$$x_{n-t} = \frac{\Sigma x_1^{\theta-\rho} \Delta_{n,t} P_\rho}{\Sigma \rho P_\rho x_1^{\theta-\rho}}. \tag{24}$$

Questa formula dà i valori di tutte le incognite in funzione razionale del valore corrispondente della sola incognita x_1.

13. Sostituendo in R il valore di y_1 dato dall'ultima dell'equazioni (16), e dividendo per y_0^θ, abbiamo

$$\sum P_\rho x_1^{\theta-\rho} = 0; \tag{25}$$

e questa sarà l'equazione finale risultante dall'eliminazione di tutte le incognite, fuorchè x_1, dall'equazioni (1), e darà tutti i valori di x_1, che fanno parte delle soluzioni comuni all'equazioni medesime, e avremo

$$\sum x_1 = -\frac{P_1}{P_0} = -\frac{\Delta_{n,n-1} P_0}{P_0}. \tag{26}$$

intendendo che il segno sommatorio debba estendersi a tutte le radici dell'equazione (25).

14. Operando α volte successivamente sopra i due membri dell'equazione (26) col simbolo $\Delta_{n,n-1}$, e rammentando l'equazione (13), otteniamo:

$$\sum x_1^\alpha = \frac{-1}{1.2.3 \ldots (\alpha - 1)} \Delta_{n,n-1}^{\alpha-1} \left(\frac{\Delta_{n,n-1} P_0}{P_0} \right). \tag{27}$$

Questa formula dà la somma delle potenze simili, di grado qualunque α, delle radici dell'equazione (25) in funzione razionale dei coefficienti, e non differisce altro che nella forma da quella data da Waring.

15. Se operiamo sopra l'equazione (27) α_1 volte successivamente col simbolo $\Delta_{n,n-2}$, α_2 volte col simbolo $\Delta_{n,n-3}, \ldots, \alpha_{r-1}$ volte col simbolo $\Delta_{n,n-r}$, e rammentiamo l'equazione (13), avremo:

$$\sum x_1^{\alpha} x_2^{\alpha_1} x_3^{\alpha_2} \ldots x_r^{\alpha_{r-1}} \tag{28}$$

$$= -\frac{1}{1.2.3 \ldots (\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}-1)} \Delta_{n,n-r}^{\alpha_{r-1}} \Delta_{n,n-r+1}^{\alpha_{r-2}} \ldots \Delta_{n,n-2}^{\alpha_1} \Delta_{n,n-1}^{\alpha-1} \left(\frac{\Delta_{n,n-1} P_0}{P_0} \right),$$

dove il segno sommatorio deve estendersi a tutte le soluzioni comuni dell'equazioni (1).

Questa formula dà tutte le funzioni simmetriche semplici delle soluzioni comuni all'equazioni (1) in funzione razionale dei coefficienti di queste equazioni.

È chiaro che il secondo membro della formula (28) sarà una frazione che avrà per denominatore P_0^σ, essendo $\sigma = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}$, e avrà

per numeratore una funzione omogenea dei coefficienti di grado eguale al grado φ di P_0 moltiplicato per σ, la quale sarà inoltre omogenea e d'indice σ rispetto al penultimo indice parziale, omogenea e d'indice $\sigma\theta+\sigma-\alpha$ rispetto al penultimo indice, d'indice $2\sigma\theta+\sigma-\alpha-\alpha_1$ rispetto all'antipenultimo indice, e così discorrendo.

16. Se distinguiamo con indici posti superiormente alle lettere i valori dell'incognite corrispondenti ai differenti sistemi di soluzioni comuni all'equazioni (1), avremo dall'equazione (25), rammentando l'equazione (21),

$$\sum x_1' x_1'' x_1''' \dots x_1^{(r)} = (-1)^r \frac{P_r}{P_0} = \frac{(-1)^r \Delta_{n,n-1}^r P_0}{1.2.3....r.P_0} . \tag{29}$$

Applicando a questa equazione successivamente le operazioni $\Delta_{n-1,n-2}, \Delta_{n-1,n-3}, \dots \Delta_{n-1,n-r}$, e rammentando l'equazioni (12) e (23), avremo

$$\sum x_1' x_1'' \dots x_1^{(\alpha)} x_2^{(\alpha+1)} \dots x_2^{(\alpha_1)} x_3^{(\alpha_1+1)} \dots x_3^{(\alpha_2)} \dots x_s^{(r)} \tag{30}$$

$$= (-1)^{2r-\alpha} \frac{1}{1.2.3...r} \frac{\Delta_{n-1,n-s}^{r-\alpha_{s-2}} \Delta_{n-1,n-s+1}^{\alpha_{s-2}-\alpha_{s-3}} \dots \Delta_{n-1,n-2}^{\alpha_1-\alpha} \Delta_{n,n-1}^{r} P_0}{P_0} ,$$

dove il segno sommatorio deve estendersi a tutte le disposizioni dei θ indici superiori r a r. È chiaro che il numeratore del secondo membro della formula (30) sarà omogeneo rispetto ai coefficienti dell'equazioni (1) e di grado eguale al grado φ di P_0, e sarà omogeneo e d'indice r rispetto all'ultimo indice, d'indice $\theta+r-\alpha$ rispetto al penultimo, d'indice $2\theta+r-\alpha_1$ rispetto all'antipenultimo, e così discorrendo.

17. Prendiamo la funzione simmetrica multipla

$$S = \sum x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \dots x_r'^{\alpha_r} x_1''^{\beta_1} x_2''^{\beta_2} \dots x_r''^{\beta_r} x_1'''^{\gamma_1} x_2'''^{\gamma_2} \dots x_r'''^{\gamma_r} \dots ,$$

dove il segno sommatorio deve estendersi a tutte le differenti permutazioni degl'indici superiori; e sia

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_r \geq \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r \geq \dots$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \dots = \psi_1 ,$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \dots = \psi_2 ,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_r + \beta_r + \gamma_r + \dots = \psi_r ,$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_r .$$

Il ch. sig. Schläfli ha dimostrato [1] che

$$S = \frac{F}{P_0^{\sigma}}, \tag{31}$$

dove F è una funzione razionale, intera e omogenea dei coefficienti dell'equazioni (1), di grado $\sigma\varphi$, essendo φ il grado del primo coefficiente P_0 della risultante (25).

Ora se poniamo

$$D_u = \sum r_u (r_1, r_2, \dots, r_n)_s \frac{\partial}{\partial (r_1, r_2, \dots, r_n)_s},$$

è chiaro che, a cagione dell'equazioni (7) e (12), avremo

$$\Delta_{u,u} = D_u - D_{u+1} = -\sum x^{(t)}_{n-u} \frac{\partial}{\partial x^{(t)}_{n-u}},$$

quando u non è eguale ad n; e a cagione dell'equazioni (7) e (15)

$$\Delta_{n,n} = D_n = \sum x^{(t)}_{n-p} \frac{\partial}{\partial x^{(t)}_{n-p}},$$

dove il segno sommatorio deve estendersi anche a tutti i valori di p interi e positivi minori di n.

Applichiamo gli operatori $\Delta_{u,u}$, $\Delta_{n,n}$ al primo membro dell'equazione (31), ed avremo

$$\Delta_{u,u} S = \psi'_u S,$$
$$\Delta_{n,n} S = \psi S \, .$$

Applichiamo gli operatori rispettivamente equivalenti ai precedenti, cioè $D_u - D_{u+1}$ e D_n, al secondo membro, e avremo risultati eguali; onde

$$D_u \frac{F}{P_0^{\sigma}} - D_{u+1} \frac{F}{P_0^{\sigma}} = -\psi'_u \frac{F}{P_0^{\sigma}}, \quad D_n \frac{F}{P_0^{\sigma}} = \frac{\psi F}{P_0^{\sigma}}.$$

Ma, per ciò che abbiamo dimostrato (n. 11), e per la formula (5), abbiamo

$$D_n P_0 = \sigma, \quad D_u P_0 = u\theta P_0,$$

essendo θ il grado della risultante; dunque

$$D_u F - D_{u+1} F = (\sigma\theta - \psi'_u) F, \quad D_n F = \psi F;$$

dalle quali si deduce:

$$\begin{aligned} D_n F &= \psi F, \\ D_{n-1} F &= (\sigma\theta + \psi - \psi_1) F, \\ D_{n-2} F &= (2\sigma\theta + \psi - \psi'_1 - \psi_2) F, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

le quali, rammentando la formula (5) e il teorema di Schläfli, dànno il seguente

[1] V. la Memoria, *Ueber die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischen Gleichungen* nel t. IV, p. 2ª delle *Denkschriften der k. Ak. der Wiss.;-Math.-nat.-wissenschaftliche Classe* di Vienna, 1852.

Teorema. *Una funzione* S *simmetrica multipla delle soluzioni comuni all'equazioni* (1) *è eguale a una funzione razionale dei coefficienti, che ha per denominatore una potenza* σ *del coefficiente* P_0 *del primo termine della risultante* (25), *essendo* σ *il massimo numero di fattori collo stesso indice superiore, che compariscono nei termini di* S; *e che ha per numeratore una funzione* F *intera e omogenea di grado* $\sigma\varphi$, *essendo* φ *il grado di* P_0; *e inoltre* F *è, rispetto all'ultimo indice parziale, omogenea e d'indice eguale al grado di* S, *rispetto al penultimo indice, è omogenea e d'indice eguale a* $\sigma\theta$ *più il grado di* S *rispetto a tutte le incognite fuori che* x_1; *rispetto all'antipenultimo indice, è omogenea e d'indice* $2\sigma\theta$ *più il grado di* S *rispetto a tutte le incognite tranne* x_1 *e* x_2; *e così discorrendo.*

18. Tutte le funzioni simmetriche multiple, si deducono anche per mezzo delle operazioni $\Delta_{t,u}$, dalle funzioni simmetriche della forma

$$\sum x_1'^{\alpha} x_2''^{\beta} x_3'''^{\gamma} \ldots = \frac{F}{P_0^{\sigma}}$$

in ciascun termine delle quali sono differenti tutti gl'indici superiori e inferiori. Infatti, se

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \cdots + \alpha^{(r)}$$
$$\beta = \beta' + \beta'' + \beta''' + \cdots + \beta^{(s)}$$
$$\gamma = \gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \cdots + \gamma^{(t)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

avremo

$$(32) \qquad \sum x_1'^{\alpha'} x_2'^{\alpha''} \ldots x_r'^{\alpha^{(r)}} x_1''^{\beta'} x_2''^{\beta''} \ldots x_s''^{\beta^{(s)}} \ldots$$
$$= \frac{\pm \Delta^{\alpha''}_{n-1,n-2} \Delta^{\alpha'''}_{n-1,n-3} \ldots \Delta^{\alpha^{(r)}}_{n-1,n-r} \Delta^{\beta'}_{n-2,n-1} \Delta^{\beta'''}_{n-2,n-3} \ldots \Delta^{\beta^{(s)}}_{n-2,n-s} \ldots \left(\frac{F}{P_0}\right)}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\alpha'+1)\,\beta(\beta-1)\ldots(\beta-\beta''+1)\ldots}.$$

19. Per determinare il grado θ rispetto a x_1 e il grado φ rispetto ai coefficienti dell'equazioni (1), della risultante (26), osserviamo che quando $n=2$, abbiamo

$$\theta = m^2, \quad \varphi = 2m.$$

Ora, supponiamo sia dimostrato che quando l'equazioni sono in numero di n, $\theta = m^n$, $\varphi = nm^{n-1}$, e dimostriamo che quando l'equazioni saranno $n+1$, avremo

$$\theta = m^{n+1}, \quad \varphi = (n+1)m^n.$$

Siano le $n+1$ equazioni algebriche di grado m con $n+1$ incognite

$$f_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_{n+1}} (r_1, r_2, \ldots, r_{n+1})_s \, x_{n+1}^{m-r_1} x_n^{r_1-r_2} \ldots x_1^{r_n-r_{n+1}} = 0:$$

la equazione finale risultante dall'eliminazione di tutte le incognite meno x_{n+1}, sappiamo essere

$$(33) \qquad \Pi f_{n+1}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 0\,;$$

dove Π indica il prodotto di tutti i valori che prende f_{n+1} quando si pongano successivamente per le incognite gli m^n sistemi di soluzioni comuni all'equazioni,

$$f_1 = 0\,, \quad f_2 = 0\,, \ldots, f_n = 0\,;$$

dove x_{n+1} si riguardi come conosciuta. È chiaro che i coefficienti di queste equazioni, in tale ipotesi, contengono x_{n+1}, e se le scriviamo sotto la forma

$$(34) \qquad f_s = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_s\, x_n^{m-r_1}\, x_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots x_1^{r_{n-1}-r_n} = 0\,;$$

il grado dei coefficienti rispetto a x_{n+1} sarà eguale all'ultimo indice. Ora il prodotto (33) è composto di termini tutti di grado m^n rispetto ai coefficienti dell'equazione $f_{n+1} = 0$, moltiplicati per funzioni simmetriche di soluzioni comuni alle equazioni (34), le quali non contengono più di m indici superiori eguali e quindi sono eguali a una frazione il cui denominatore è P_0^m, indicando con P_0 il primo coefficiente della risultante dell'equazioni (34), e il numeratore è rispetto ai coefficienti dell'equazioni (34) di grado eguale a m volte il grado nm^{n-1} di P_0, ossia è eguale a nm^n; onde tutti termini del prodotto (33) sono frazioni il cui denominatore è P_0^m e il numeratore è di grado $m^n + nm^n$, ossia $(n+1)m^n$. Dunque la risultante (33), moltiplicata per P_0^m, sarà intera e omogenea di grado $(n+1)m^n$ rispetto ai coefficienti dell'equazioni.

Gl'indici poi di queste funzioni simmetriche sono, rispetto all'ultimo indice parziale non superiori al proprio grado cioè ad m^{n+1}, onde rispetto a x_{n+1} la risultante sarà di grado m^{n+1}.

Ora è noto che per $n = 2$, si verifica che $\theta = m^n$, $\varphi = nm^{n-1}$; dunque si verificherà qualunque sia n; e così sono dimostrati i teoremi di Bezout e di Eulero in generale, nello stesso modo che si tiene per dimostrarli nel caso di due sole equazioni.

Pisa, 15 giugno 1858.

XVII.

SOPRA LE FUNZIONI SIMMETRICHE DELLE RADICI DI UNA EQUAZIONE [1]

(Dagli *Annali di matematica pura ed applicata*, serie I, t. I, pp. 323-326, Roma, 1858).

Rappresentiamo con $\left(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}\right)$ la partizione di un numero n in n_1 parti eguali a p_1, n_2 eguali a $p_2, \dots, n_r$ eguali a p_r, nella quale $p_1 > p_2 > \dots > p_r$. Per esempio, usiamo la notazione $(5^2\, 3^3\, 1^2)$ per indicare che il numero 21 è stato decomposto nelle sette parti:

5, 5, 3, 3, 3, 1, 1.

La partizione $(p_1 p_2 \dots p_r)$ è di *ordine* maggiore della partizione $(q_1 q_2 \dots q_r)$ dello stesso numero, se $p_1 > q_1$, oppure se $p_1 = q_1$ e $p_2 > q_2$, oppure se $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$ e $p_3 > q_3$, e così discorrendo. Per esempio, l'ordine della partizione $(6\,4\,3^2)$ è maggiore dell'ordine della partizione $(6\,4\,3\,1^3)$ dello stesso numero 16.

Si dice *coniugata* della partizione

$$(1) \qquad \left(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}\right)$$

l'altra partizione dello stesso numero

$$(2) \qquad \left((n_1+n_2+\dots+n_r)^{p_r} (n_1+n_2+\dots+n_{r-1})^{p_{r-1}-p_r} \dots (n_1+n_2)^{p_2-p_3} n_1^{p_1-p_2}\right).$$

È chiaro che reciprocamente le partizione (1) sarà coniugata della (2), e che il numero delle parti in una è eguale alla maggiore delle parti dell'altra. Saranno coniugate, per esempio, le due partizioni $(6\,3^2\,2^2)$ e $(5^2\,3\,1^3)$.

Se disponiamo tutte le differenti partizioni di un dato numero in ordine decrescente, e quindi ne prendiamo successivamente le coniugate, queste risulteranno disposte in modo che nessuna conterrà più parti delle precedenti, e quelle che contengono uno stesso numero di parti compariranno in ordine crescente. Per esempio le partizioni del numero 6, disposte in ordine decrescente, saranno

$$(6)\ (5\,1)\ (4\,2)\ (4\,1^2)\ (3^2)\ (3\,2\,1)\ (3\,1^3)\ (2^3)\ (2^2\,1^2)\ (2\,1^4)\ (1^6);$$

[1] Rivista bibliografica della Memoria di A. Cayley dal titolo, *A Memoir on the symmetric fonctions of the roots of an equation*, Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, t. 147, pp. 489-496.

e per le rispettive coniugate, avremo

(1^6) $(2\,1^4)$ $(2^2\,1^2)$ $(3\,1^3)$ (2^3) $(3\,2\,1)$ $(4\,1^2)$ (3^2) $(4\,2)$ $(5\,1)$ (6).

Data una equazione algebrica:

$$x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - \cdots \pm a_m = 0\,,$$

le cui radici siano $x_1, x_2, \ldots, x_m$; chiameremo *combinazione appartenente alla partizione* $\left(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}\right)$, o semplicemente *combinazione* $\left(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}\right)$, il prodotto $a_{p_1}^{n_1} a_{p_2}^{n_2} \ldots a_{p_r}^{n_r}$.

È chiaro che le combinazioni appartenenti alle diverse partizioni di uno stesso numero n saranno tutte d'indice eguale ad n.

Chiameremo *funzione simmetrica appartenente alla partizione* $(p_1 p_2 \ldots p_m)$, o semplicemente *funzione simmetrica* $(p_1 p_2 \ldots p_m)$, la funzione $\sum x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m}$, dove il segno sommatorio deve estendersi a tutte le disposizioni differenti delle radici.

Le combinazioni appartenenti alle diverse partizioni di un dato numero n sono tutte esprimibili linearmente, in un sol modo, per le funzioni simmetriche appartenenti alle partizioni dello stesso numero n; e reciprocamente; le funzioni simmetriche sono esprimibili linearmente, in un sol modo, per le combinazioni.

Per ottenere una combinazione $[m^p (m-1)^q \ldots 2^s 1^t]$ espressa linearmente per le funzioni simmetriche, bisogna svolgere il secondo membro dell'identità:

$$a_1^t\, a_2^s \ldots a_{m-1}^q\, a_m^p = \left(\sum x_1\right)^t \left(\sum x_1 x_2\right)^s \ldots \left(\sum x_1 x_2 \ldots x_{m-1}\right)^q \left(\sum x_1 x_2 \ldots x_m\right)^p;$$

ed è facile a vedersi che avremo primieramente, col coefficiente 1, la funzione simmetrica:

$$\sum x_1^{p+q+\cdots+s+t}\, x_2^{p+q+\cdots+s} \ldots x_{m-1}^{p+q}\, x_m^p\,,$$

la quale appartiene alla partizione $[(p+q+\cdots+s+t)(p+q+\cdots+s)\ldots(p+q)p]$ coniugata a $[m^p(m-1)^q \ldots 2^s 1^t]$; e quindi avremo altre funzioni simmetriche appartenenti tutte a partizioni del medesimo numero, ma di ordine inferiore alla partizione $[(p+q+\cdots+t)\,(p+q+\cdots+s)\ldots(p+q)p]$ e che contengono un numero di parti differenti non minore del numero delle parti di questa. Così $a_3\, a_1^3$, che appartiene alla partizione $(3\,1^3)$, conterrà, col coefficiente 1, la funzione simmetrica appartenente alla partizione coniugata $(4\,1^2)$, e quindi, con altri coefficienti numerici, le funzioni simmetriche $(3\,2\,1)$, (2^3), $(3\,1^3)$, $(2^2\,1^2)$, $(2\,1^4)$, (1^6); ma non conterrà (3^2), perchè sebbene di ordine minore di $(4\,1^2)$, ha però un numero di parti differenti minore.

Avremo dunque

$$a_3 a_1^3 = \sum x_1^4 x_2 x_3 + \alpha_1 \sum x_1^3 x_2^2 x_3 + \alpha_2 \sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \alpha_3 \sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + \alpha_4 \sum x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + \alpha_5 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 .$$

Se indichiamo rispettivamente con 1, 2, 3, ..., μ le μ partizioni differenti di un dato numero n, disposte in ordine decrescente, con C_r la combinazione e con S_r la funzione simmetrica appartenente alla partizione r, avremo in generale

$$(3) \qquad C_r = S_{r'} + a_{r,r'+1} S_{r'+1} + a_{r,r'+2} S_{r'+2} + \cdots + a_{r,\mu-1} S_{\mu-1} + a_{r,\mu} S_\mu ,$$

dove r' indica la partizione coniugata alla partizione r, e saranno nulli i coefficienti numerici delle funzioni simmetriche appartenenti a partizioni, che contengono un numero di parti minore del numero di quelle della partizione r'.

Dando, nella equazione (3), successivamente ad r i valori $\mu, \mu - 1, \ldots, 3$, 2, 1, avremo μ equazioni lineari, ciascuna delle quali conterrà, col coefficiente eguale ad 1, una funzione simmetrica più della precedente: quindi, risolvendole rispetto alle funzioni simmetriche, otterremo altre μ equazioni con i coefficienti interi e della forma

$$(4) \qquad S_r = C_{r'} + b_{r,r'-1} C_{r'-1} + b_{r,r'-2} C_{r'-2} + \cdots + b_{r,2} C_2 + b_{n,1} C_1 ;$$

ed anche in queste le partizioni r ed r' sono coniugate, e sono nulli i coefficienti numerici delle combinazioni appartenenti a partizioni che contengono un numero di parti differenti maggiore del numero di quelle della partizione r'.

Per avere le combinazioni espresse linearmente per le funzioni simmetriche, e reciprocamente, le funzioni simmetriche espresse per le combinazioni, non rimane altro che a determinare in generale i coefficienti numerici dell'equazioni (3) e (4).

Il sig. Cayley ha dato, in 18 tavole, i valori dei coefficienti numerici $a_{r,s}$ e $b_{r,s}$ per le combinazioni e per le funzioni simmetriche appartenenti a tutte le partizioni differenti dei numeri non maggiori di 10, ed ha fatto l'importante osservazione che tra questi valori si verificano le relazioni

$$a_{r,s} = a_{s,r} , \qquad b_{r,s} = b_{s,r} .$$

Io dimostro queste relazioni di simmetria nel modo seguente.

Prendiamo le due equazioni:

$$1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots \pm a_m x^m = 0 ,$$
$$x^m - b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} - b_3 x^{m-3} + \cdots \pm b_m = 0.$$

La risultante sarà espressa da

$$R = (1 - a_1 x_1 + a_2 x_1^2 - \cdots \pm a_m x_1^m)(1 - a_1 x_2 + a_2 x_2^2 - \cdots \pm a_m x_2^m) \ldots (1 - a_1 x_m + a_2 x_m^2 - \cdots \pm a_m x_m^m)$$
$$= (1 - b_1 y_1 + b_2 y_1^2 - \cdots \pm b_m y_1^m)(1 - b_1 y_2 + b_2 y_2^2 - \cdots \pm b_m y_2^m) \ldots (1 - b_1 y_m + b_2 y_m^2 - \cdots \pm b_m y_m^m),$$

dove $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sono rispettivamente radici delle due equazioni

$$x^m - b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} - \cdots \pm b_m = 0, \tag{5}$$

$$y^m - a_1 y^{m-1} + a_2 y^{m-2} - \cdots \pm a_m = 0. \tag{6}$$

Ora le due espressioni della risultante R sono identiche; quindi le somme dei termini omogenei in indice rispetto ai sistemi di coefficienti dell'equazioni (5) e (6) dovranno pure essere identiche, e avremo

$$a_n \sum x_1^n + a_{n-1} a_1 \sum x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_1^n \sum x_1 x_2 \ldots x_n$$

$$= b_n \sum y_1^n + b_{n-1} b_1 \sum y_1^{n-1} y_2 + \cdots + b_1^n \sum y_1 y_2 \ldots y_n;$$

e se indichiamo con $C_1, C_2, \ldots, C_\mu$ le combinazioni; con $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$ le funzioni simmetriche relative all'equazione (5); con $K_1, K_2, \ldots, K_\mu$ le combinazioni, e con $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ le funzioni simmetriche relative all'equazione (6), tutte disposte in ordine decrescente, rispetto alle partizioni del numero n, alle quali appartengono, avremo in generale

$$\sum_1^\mu K_r S_r = \sum_1^\mu C_r T_r.$$

Sostituendo i valori di K_r e di C_r dati dall'equazione (3), e quindi i valori di T_r e S_r dati dall'equazione (4), otteniamo le due equazioni

$$\sum a_{r,s} T_s S_r = \sum a_{s,r} T_s S_r,$$

$$\sum b_{r,s} K_r C_s = \sum b_{s,r} K_r C_s,$$

le quali dovendo essere identiche, dànno

$$a_{r,s} = a_{s,r}, \qquad b_{r,s} = b_{r\,s};$$

come volevamo dimostrare.

Firenze, luglio 1858.

XVIII.

SOPRA I COMBINANTI

(Dagli *Annali di matematica pura ed applicata,* serie I, t. I, pp. 344-348, Roma, 1858).

Un *combinante* di un sistema di n forme con $n+1$ indeterminate

$$(1)\quad \begin{cases} f_1 = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n)_1\, y_n^{m-r_1}\, y_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots y_1^{r_{n-1}-r_n} y_0^{r_n}, \\ f_2 = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n)_2\, y_n^{m-r_1}\, y_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots y_1^{r_{n-1}-r_n} y_0^{r_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n = \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n)_n\, y_n^{m-r_1}\, y_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots y_1^{r_{n-1}-r_n} y_0^{r_n}, \end{cases}$$ [1]

è una funzione razionale omogenea delle indeterminate e dei coefficienti $(r_1, r_2, \ldots, r_n)_s$, che è covariante o invariante simultaneo di tutte le forme del sistema (1) e gode la proprietà di riprodursi moltiplicata per una potenza del determinante

$$\mathbf{d} = \sum (\pm \beta_{11} \beta_{22} \ldots \beta_{nn}),$$

quando in luogo dei coefficienti del sistema (1) si pongano quelli del sistema

$$\begin{aligned} F_1 &= \beta_{11} f_1 + \beta_{12} f_2 + \cdots + \beta_{1n} f_n, \\ F_2 &= \beta_{21} f_1 + \beta_{22} f_2 + \cdots + \beta_{2n} f_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n &= \beta_{n1} f_1 + \beta_{n2} f_2 + \cdots + \beta_{nn} f_n. \end{aligned}$$

Quindi, affinchè una funzione K sia un combinante è necessario e sufficiente che soddisfaccia alle due equazioni

$$(2)\quad \mathbf{d}^{\nu} K[\ldots, (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s, \ldots]$$
$$= K[\ldots, \beta_{s1}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_1 + \beta_{s2}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_2 + \cdots + \beta_{sn}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_n, \ldots]$$

$$(3)\quad D^{\mu} K[\ldots, (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s, \ldots, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n]$$
$$= K[\ldots, (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s', \ldots, y_0, y_1, \ldots, y_n],$$

---

[1] Per le notazioni vedi, *Annali di mat. pura ed appl.*, t. I, p. 193 (od anche p. 163 di questo volume).

dove ν e μ sono numeri interi, e η, $(r_1, r_2, \ldots, r_n)_s'$ e D sono determinati dall'equazioni:

$$\eta_r = \alpha_{r0}\, y_0 + \alpha_{r1}\, y_1 + \alpha_{r2}\, y_2 + \cdots + \alpha_{rn}\, y_n\,,$$

$$\sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_s\, \eta_n^{m-r_1}\, \eta_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots \eta_1^{r_{n-1}}\, \eta_0^{r_n}$$

$$= \sum N_{r_1 r_2 \ldots r_n}(r_1, r_2, \ldots, r_n)_s'\, y_n^{m-r_1}\, y_{n-1}^{r_1-r_2} \ldots y_0^{r_n}\,,$$

$$D = \sum (\pm\, \alpha_{00}\, \alpha_{11}\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}).$$

Per soddisfare all'equazione (2) bisognerà che K non contenga altre funzioni dei coefficienti, fuori che i determinanti

$$(4) \qquad \sum\left(\pm\, (r_1', r_2', \ldots, r_n')_1\, (r_1'', r_2'', \ldots, r_n'')_2 \ldots (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \ldots, r_n^{(n)})_n\right),$$

il numero σ dei quali è dato da

$$\sigma = \frac{\varrho(\varrho - 1) \ldots (\varrho - n + 1)}{1.2.3....n},$$

essendo

$$\varrho = \frac{(m+1)(m+2) \ldots (m+n)}{1.2.3....n}.$$

Affinchè una funzione K verifichi l'equazione (3), è necessario e sufficiente che siano soddisfatte l'equazioni comprese nella seguente

$$(5) \qquad \left(\Delta_{t,u} - y_{n-u} \frac{\partial}{\partial y_{n-t}}\right) K = 0 \quad (^1),$$

nelle quali t ed u sono numeri differenti, interi, positivi e $< n + 1$, e

$$\Delta_{t,u} = \sum (r_u - r_{u+1})\, (r_1, \ldots, r_{u+1} + 1, \ldots, r_t + 1, \ldots, r_n)_s \frac{\partial}{\partial (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s}, \text{ se } t > u,$$

$$\Delta_{t,u} = \sum (r_u - r_{u+1})\, (r_1, \ldots, r_{t+1} - 1, \ldots, r_u - 1, \ldots, r_n)_s \frac{\partial}{\partial (r_1, r_2, \ldots, r_n)_s}, \text{ se } t < u.$$

I determinanti (4) sono tutti funzioni razionali di uno solo di essi, e delle soluzioni comuni all'equazioni (1) (quando si faccia $y_r = y_0\, x_r$), le quali indicheremo con

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1'\; x_2' \;.\;.\;.\; x_n', \\ x_1''\; x_2'' \;.\;.\;.\; x_n'', \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ x_1^{(\theta)}\, x_2^{(\theta)} \;.\;.\;.\; x_n^{(\theta)}; \end{array} \right.$$

---

(1) Vedi l. c., p. 160 e 196 (od anche p. 166 di questo volume).

dove $\theta = m^n$. Infatti, si prendano le σ equazioni risultanti dall'eliminazioni successive di $n-1$ termini qualunque del sistema (1) dove si è posto $y_r = y_0\, x_r$. Ciascuna di queste equazioni avrà per coefficienti $\varrho - n + 1$ determinanti (4), quindi sostituendo successivamente in ciascuna $\varrho - n$ sistemi di soluzioni comuni (6), eguagliandole tutte a zero, ne potremo ricavare i valori dei $\sigma - 1$ rapporti dei determinanti (4) a uno qualunque di essi, espressi razionalmente per le soluzioni comuni (6). Potremo dunque riguardare ogni combinante K come funzione razionale soltanto delle soluzioni comuni (6) e di una funzione dei determinanti (4), la quale potrà essere la risultante dall'eliminazione delle indeterminate del sistema (1), quando vi si ponga $y_0 = 0$, e che indicheremo con P_0.

Effettuiamo questo cangiamento di variabili nell'equazioni (5). Perciò, richiameremo le formole dimostrate nella Memoria, *Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche* [1].

Siano

$$R_1 = P_0\, x_1{}^{\theta} + \sum_{1}^{\theta}{}_s\, P_s'\ x_1{}^{\theta-s},$$

$$R_2 = P_0\, x_2{}^{\theta} + \sum_{1}^{\theta}{}_s\, P_s''\ x_2{}^{\theta-s},$$

. . . .

. . . .

$$R_n = P_0\, x_n{}^{\theta} + \sum_{1}^{\theta}{}_s\, P_s{}^{(n)} x_n{}^{\theta-s},$$

l'equazioni risultanti dall'eliminazione dal sistema (1) di tutte le incognite fuori che una sola, quando però vi sia fatto $y_r = y_0\, x_r$. Avremo

$$\Delta_{t,u}\, P_0 = 0\,,$$

se t è differente da n, e

$$\Delta_{n,u}\, P_0 = P_1{}^{(n-u)} = -\, P_0 \sum_{1}^{\theta}{}_s\, x_{n-u}^{(s)}\,,$$

$$\Delta_{t,u}\, x_{n-p}^{(s)} = 0,\ \ \Delta_{t,u}\, x_{n-t}^{(s)} = -\, x_{n-u}^{(s)},\ \ \Delta_{t,n}\, x_{n-t}^{(s)} = -1,\ \ \Delta_{n,u} x_{n-v}^{(s)} = x_{n-u}^{(s)}\, x_{n-v}^{(s)}\ \text{(2)},$$

[1] Vedi l. c., p. 193 (od anche p. 163 di questo volume).

[2] Vedi l. c., p. 195 (od anche p. 165 di questo volume).

essendo p differente da t, e t e u differenti da n. Onde l'equazioni (5) divengono

$$-\left(\Delta_{t,u}-y_{n-u}\frac{\partial}{\partial y_{n-t}}\right)\mathrm{K}=\sum_{1}^{\theta}{}_s\, x_{n-u}^{(s)}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_{n-t}^{(s)}}+y_{n-u}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_{n-t}}=0\,,$$

$$-\left(\Delta_{t,n}-y_0\frac{\partial}{\partial y_{n-t}}\right)\mathrm{K}=\sum_{1}^{\theta}{}_s\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_{n-t}^{(s)}}+y_0\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_{n-t}}=0\,,$$

$$-\left(\Delta_{n,u}-y_{n-u}\frac{\partial}{\partial y_0}\right)\mathrm{K}=\sum_{0}^{n-1}{}_v\sum_{1}^{\theta}x_{n-u}^{(s)}x_{n-v}^{(s)}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_{n-v}^{(s)}}+\mathrm{P}_1^{(n-u)}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mathrm{P}_0}-y_{n-u}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_0}=0.$$

Ma il combinante K dovendo essere una funzione omogenea, se è di ordine λ, avremo

$$y_0\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_0}+y_1\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_1}+\cdots+y_n\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_n}=\lambda \mathrm{K}\,;$$

onde

$$y_0\, y_{n-u}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_0}=\lambda y_{n-u}\,\mathrm{K}-\sum_{1}^{n-1}{}_v\, y_{n-u}\, y_{n-v}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_{n-v}}\,.$$

Sostituendo questi valori nell'ultima delle precedenti, avremo le seguenti equazioni che saranno le *caratteristiche* dei combinanti:

(7) $$\mathrm{Q}_{t,u}\,\mathrm{K}=\sum_{1}^{\theta}{}_s\, x_{n-u}^{(s)}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_{n-t}^{(s)}}+y_{n-u}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_{n-t}^{(s)}}=0\,,$$

(8) $$\mathrm{Q}_{t,n}\,\mathrm{K}=\sum_{1}^{\theta}{}_s\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_{n-t}^{(s)}}+y_0\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_{n-t}}=0\,,$$

(9) $$\mathrm{Q}_{n,u}\,\mathrm{K}=\sum_{0}^{n-1}{}_v\left\{\sum_{1}^{\theta}{}_s\, x_{n-u}^{(s)}x_{n-v}^{(s)}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_{n-v}^{(s)}}+y_{n-u}\,y_{n-v}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y_{n-v}}\right\}$$
$$+\,y_0\,\mathrm{P}_1^{(n-u)}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mathrm{P}_0}=\lambda y_{n-u}\,\mathrm{K}.$$

È facile a verificarsi che sono integrali dell'equazioni (7) e (8) le tre funzioni

$$\mathrm{P}_0{}^{\rho}\,,\ h_{123\ldots n}=\begin{vmatrix} y_0 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ y_1 & x_1' & x_1'' & \ldots & x_1^{(n)}\\ y_2 & x_2' & x_2'' & \ldots & x_2^{(n)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ y_n & x_n' & x_n'' & \ldots & x_n^{(n)}\end{vmatrix},\ \mathrm{H}_{123\ldots(n+1)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ x_1' & x_1'' & x_1''' & \ldots & x_1^{(n+1)}\\ x_2' & x_2'' & x_2''' & \ldots & x_2^{(n+1)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_n' & x_n'' & x_n''' & \ldots & x_n^{(n+1)}\end{vmatrix}.$$

Quindi una funzione

(10) $$C = P_0^{\rho}\, \Pi h_{s_1 s_2 \dots s_n}\, \Pi H_{t_1 t_2 \dots t_{n+1}}$$

(dove il segno Π indica che si deve fare il prodotto di più fattori che si ottengono dando agli indici dei valori qualunque) soddisferà tutte l'equazioni caratteristiche, se prendiamo ϱ e gli indici dei differenti fattori in modo che C verifichi tutte le equazioni (9).

Ora, abbiamo

$$Q_{n,u}\, P_0^{\rho} = \varrho P_0^{\rho-1}\, P_1^{(n-u)} = -\varrho P_0^{\rho} \sum_1^{\theta}{}_s\, x_{n-u}^{(s)},$$

$$Q_{n,u}\, h_{s_1 s_2 \dots s_n} = \left(\sum_1^{n}{}_i\, x_{n-u}^{(s_i)} + y_{n-u}\right) h_{s_1 s_2 \dots s_n},$$

$$Q_{n,u}\, H_{t_1 t_2 \dots t_{n+1}} = \left(\sum_1^{n+1}{}_i\, x_{n-u}^{(t_i)}\right) H_{t_1 t_2 \dots t_{n+1}};$$

onde, se λ è il numero dai fattori $h_{s_1 s_2 \dots s_n}$,

$$Q_{n,u}\, C = \left[-\varrho \sum_1^{\theta}{}_s\, x_{n-u}^{(s)} + \sum\left(\sum_1^{n}{}_i\, x_{n-u}^{(s_i)} + \sum_1^{n+1}{}_i\, x_{n-u}^{(t_i)}\right) + \lambda y_{n-u}\right] C,$$

e se

(11) $$\sum\left(\sum_1^{n}{}_i\, x_{n-u}^{(s_i)} + \sum_1^{n+1}{}_i\, x_{n-u}^{(t_i)}\right) = \varrho \sum_1^{\theta}{}_s\, x_{n-u}^{(s)},$$

avremo

$$Q_{n,u}\, C = \lambda y_{n-u}\, C,$$

cioè la funzione (10) soddisferà a tutte le equazioni caratteristiche di un combinante. Dunque $K = \sum C$ sarà la forma di un combinante, se prenderemo la somma in modo che risulti simmetrica rispetto alle soluzioni comuni (6), e quindi [1] esprimibile per una funzione razionale e intera dei coefficienti del sistema (1).

Firenze, 12 settembre 1858.

---

[1] Vedi l. c., p. 202 (od anche p. 172 di questo volume).

XIX.

SUR LA RÉSOLUTION PAR RADICAUX DES ÉQUATIONS DONT LE DEGRÉ EST UNE PUISSANCE D'UN NOMBRE PREMIER (¹)

(Da' *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLVIII, pp. 182-186, Paris, 1859).

Dans un Mémoire publié dans les *Annali di Tortolini*, année 1855, je me suis occupé du problème suivant:

Trouver la fonction algébrique la plus générale de plusieurs quantités A, B, C, .., *qui ait un nombre, puissance p^ν d'un nombre premier, de valeurs différentes, qui soient racines d'une équation irréductible et primitive de degré p^ν, équation dont les coefficients soient fonctions rationnelles de* A, B, C, ...

Dans le Mémoire susdit, j'ai donné une forme qui renferme toutes les expressions satisfaisant au problème, mais qui en renferme aussi d'autres; c'est à dire, cette forme ne vérifie pas toujours identiquement une équation de degré p^ν, dont les coefficients sont rationnels en A, B, C, ...

En abordant de nouveau cette question, j'ai trouvé la condition qu'il faut et qu'il suffit d'ajouter, si l'on veut que la forme donnée par moi renferme non seulement les expressions satisfaisant au problème, mais n'en renferme pas d'autres.

Voici le principe arithmétique qui m'a conduit à la détermination de cette condition:

On peut toujours trouver un système de ν nombres entiers $< p$:

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_\nu, \tag{1}$$

qui jouissent des propriétés suivantes:

Si l'on forme la série récurrente

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots \tag{2}$$

dont un terme quelconque se déduit des ν précédents par l'équation

$$n_{t+\nu} = g_1 n_t + g_2 n_{t+2} + \cdots + g_\nu n_{t+\nu-1}, \tag{3}$$

(¹) Estratto di una lettera al sig. C. Hermite.

et où les ν premiers termes sont assujettis à la seule condition d'être entiers et de n'etre pas tous multiples de p; et si l'on prend les plus petits résidus relativement au module p des nombres (2), qu'on pourra désigner par

(4) $$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots,$$

la série (4) aura une période de $p^\nu - 1$ termes, c'est à dire qu'on aura

$$ru_{p^\nu+t} \equiv r_t \pmod{p}$$

et si l'on forme les $p^\nu - 1$ systèmes.

(5) $$\left\{\begin{array}{l} r_1 \quad, r_2, r_3, \ldots, r_\nu \quad, \\ r_2 \quad, r_3, r_4, \ldots, r_{\nu+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{p^\nu-1}, r_1, r_2, \ldots, r_{\nu-1}, \end{array}\right.$$

ces systèmes seront tous différents; et ils seront les $p^\nu - 1$ systèmes différents de ν nombres chacun qu'on peut former avec les p nombre entiers $< p$, en négligeant le cas dans lequel tous les nombres sont nuls à la fois.

On peut déduire très aisément les valeurs des nombres (1) des nombres

(6) $$\left\{\begin{array}{l} q'_1 \quad, q'_2 \quad, \ldots, q'_\nu \quad, \\ q''_1 \quad, q''_2 \quad, \ldots, q''_\nu \quad, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1^{(\nu)}, q_2^{(\nu)}, \ldots, q_\nu^{(\nu)}, \end{array}\right.$$

que j'ai considérés dans le Mémoire cité ci-dessus, et qui jouissent de la propriété de rendre différents tous les systèmes

(7) $$\left\{\begin{array}{l} r'_1 \quad, r'_2 \quad, \ldots, r'_\nu \quad, \\ r''_1 \quad, r''_2 \quad, \ldots, r''_\nu \quad, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^{(p^\nu-1)}, r_2^{(p^\nu-1)}, \ldots, r_\nu^{(p^\nu-1)}, \end{array}\right.$$

qui se déduisent l'un de l'autre par les congruences

$$r_t^{(i+1)} \equiv q_1^{(t)} r_1^{(i)} + q_2^{(t)} r_2^{(i)} + \cdots + q_\nu^{(t)} r_\nu^{(i)} \pmod{p}.$$

En désignant per $\varDelta$ le déterminant dont la matrice est le système (6), l'on a

$$g_1 \equiv (-1)^{\nu-1} \varDelta, \; g_2 \equiv (-1)^{\nu-2} \sum \frac{\partial \varDelta}{\partial q_r^{(r)}}, \; g_3 \equiv (-1)^{\nu-3} \sum \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial q_r^{(r)} \partial q_s^{(s)}}, \ldots\ldots$$

Ne croyez vous pas qu'on puisse nommer système primitif d'ordre ν relativement au module p le système (1) plutôt que le système (2), en raison

de la plus grande analogie qu'il a avec les racines primitives des nombres premiers ?

Le principe arithmétique que je viens d'énoncer, m'a donné le moyen d'étendre aux fonctions de p^ν lettres, ν fois cycliques de l'ordre p, de la forme

$$(8)\quad (r_1, r_2, \ldots, r_\nu)^p = \left(\sum_0^{p-1} m_1 \sum_0^{p-1} m_2 \ldots \sum_0^{p-1} m_\nu \, \alpha^{r_1 m_1 + r_2 m_2 + \ldots + r_\nu m_\nu} z_{m_1, m_2, \ldots, m_p}\right)^p$$

le théorème que M. Kronecker a trouvé pour les fonctions de p lettres, une fois cyclique, d'ordre p, de la forme

$$\left(\sum_0^{p-1} \alpha^{rm} z_m\right)^p .$$

Pour démontrer ce théorème, je me bornerai au cas de $\nu = 2$. Pour ν quelconque, on suit la même méthode.

Toute fonction φ donnée par l'équation

$$(9)\qquad (r_t, r_{t+1})^a (r_s, r_{s+1})^b = (r_u, r_{u+1})\, \varphi ,$$

où $ar_t + br_s \equiv r_u$, $ar_{t+1} + br_{s+1} \equiv r_{u+1}$ (mod. p), est deux fois cyclique d'ordre p, comme la fonction $(r_1, r_2)^p$.

Si maintenant on met pour a et b les deux nombres g_1 et g_2 d'un système primitif d'ordre 2, relativement au module p, pour s le nombre $t+1$, et pour t successivement les nombres $1, 2, 3, \ldots$, on obtiendra des équations de cette forme

$$\begin{aligned}
(r_1, r_2)^{g_1} (r_2, r_3)^{g_2} &= (r_3, r_4)\, \varphi_{r_1, r_2} , \\
(r_2, r_3)^{g_1} (r_3, r_4)^{g_2} &= (r_4, r_5)\, \varphi_{r_2, r_3} , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(r_{p^2-2}, r_{p^2-1})^{g_1} (r_{p^2-1}, r_1)^{g_2} &= (r_1, r_2)\, \varphi_{r_{p^2-2}, r_{p^2-1}} , \\
(r_{p^2-1}, r_1)^{g_1} \quad (r_1, r_2)^{g_2} &= (r_2, r_3)\, \varphi_{r_{p^2-1}, r_1} ,
\end{aligned}$$

où $\varphi_{r_1, r_2}, \varphi_{r_2, r_3}, \ldots$ sont toutes fonctions deux fois cycliques d'ordre p.

Élevons la première de ces équations à la puissance n_{p^2-1}, la seconde à la puissance n_{p^2-2}, et ainsi de suite, puis multiplions-les membre à membre; on obtiendra

$$(r_1, r_2)^{g_1 n_{p^2-1} + g_2 n_1 - n_2} (r_2, r_3)^{g_1 n_{p^2-2} + g_2 n_{p^2-1} - n_1} = \varphi_{r_1, r_2}^{n_{p^2-1}} \varphi_{r_2, r_3}^{n_{p^2-2}} \ldots \varphi_{r_{p^2-1}, r_1}^{n_1} .$$

Mais, par les propriétés des nombres (2),

$$g_1 n_{p^2-1} + g_2 n_1 - n_2 = up \;,\; g_1 n_{p^2-2} + g_2 n_{p^2-1} - n_1 = vp \;;$$

donc par suite,

$$(10) \qquad [(r_1, r_2)^u (r_2, r_3)^v]^p = \varphi_{r_1, r_2}^{n_{p^2-1}} \varphi_{r_2, r_3}^{n_{p^2-2}} \cdots\cdots \varphi_{r_{p^2-1}, r_1}^{n_1} .$$

En vertu de l'équation (9), l'on a

$$(r_1, r_2)^u (r_2, r_3)^v = (r_m, r_{m+1})\,\varphi$$

étant $r_m \equiv ur_1 + vr_2$, $r_{m+1} \equiv ur_2 + vr_3$, et φ une fonction deux fois cyclique d'ordre p. En substituant dans l'équation (10), on a l'équation

$$(r_m, r_{m+1}) = \frac{1}{\varphi} \sqrt[p]{\varphi_{r_1, r_2}^{n_{p^2-1}} \varphi_{r_2, r_3}^{n_{p^2-2}} \cdots \varphi_{r_{p^2-1}, r_1}^{n_1}} ,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(r_m, r_{m+1}) = \mathrm{F}_m \sqrt[p]{\varphi_{r_1, r_2}^{r_{p^2-1}} \varphi_{r_2, r_3}^{r_{p^2-2}} \cdots \varphi_{r_{p^2-1}, r_1}^{r_1}} .$$

Les fonctions symétriques des quantités $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots \mathrm{F}_m$, lesquelles quantités sont fonctions rationnelles de A, B, C, ... et de $\varphi_{r_1, r_2}, \varphi_{r_2, r_3}, \ldots$ sont invariables par toute substitution renfermée dans le symbole

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{r_i, r_{i+1}} , \\ \theta_{ar_i + br_{i+1},\ a'r_i + b'r_{i+1}} . \end{array} \right.$$

Après cela vous verrez aisément comment l'on trouve la condition à ajouter pour avoir la solution complète du problème, c'est à dire le théorème suivant:

La fonction algébrique la plus générale de plusieurs quantités A, B, C,... qui vérifie identiquement une équation irréductible et primitive de degré p^ν, équation dont les coefficients sont rationnels en A, B, C, ..., est de la forme

$$\mathrm{P} + \sum \alpha^{r_i m_1 + r_{i+1} m_2 + \ldots + r_{i+\nu-1} m_\nu} \sqrt[p]{\mathrm{R}_i} ,$$

P étant une fonction rationnelle en A, B, C, ... et

$$\sqrt[p]{\mathrm{R}_i} = \mathrm{F}_i \sqrt[p]{\varphi_{r_i, r_{i+1}, \ldots r_{i+\nu-1}}^{r_{p^\nu-1}} \varphi_{r_{i+2}, r_{i+1}, \ldots r_{i+\nu}}^{r_{p^\nu-2}} \cdots \varphi_{r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, \ldots r_{i+\nu-2}}^{r_1}} ,$$

où les F_i sont fonctions rationnelles quelconques de A, B, C, ... et des $\varphi_{r_1, r_2, \ldots\ldots r_\nu}, \varphi_{r_2, r_3, \ldots\ldots r_{\nu+1}}, \ldots$, assujetties à la seule condition que les fonctions

symétriques de $F_1, F_2, \ldots F_{p^\nu - 1}$ soient invariables pour les substitutions renfermées dans le symbole

$$\varphi_{r_i r_{i+1} \ldots r_{i+\nu-1}}$$

$$\varphi_{a'_1 r_i + a'_2 r_{i+1} + \ldots + a'_\nu r_{i+\nu-1}, \ldots, a_1^{(\nu)} r_i + a_2^{(\nu)} r_{i+1} + \ldots + a_\nu^{(\nu)} r_{i+\nu-1}}$$

et les $\varphi_{r_1, r_2, \ldots r_\nu}, \varphi_{r_2, r_3, \ldots r_{\nu+1}}$, sont les fonctions algébriques les plus générales racines d'une équation de degré $p^\nu - 1$, dont les coefficients sont rationnels en A, B, C, ..., et dont le groupe a toutes les substitutions renfermées dans le symbole (12).

J'ai donné les principes pour la détermination de ces dernières fonctions dans le Mémoire plusieurs fois cité.

XX.

ESTRATTO DI UNA LETTERA AL SIG. C. HERMITE

(Da' *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLIX, pp. 113-115, Paris, 1859).

Dans un Mémoire *Sopra l'abassamento dell'equazioni modulari*, publié en 1853 dans les *Annali di Tortolini*, j'ai fait l'étude des substitutions $\frac{ak+b}{ck+d}$ (1), pour démontrer la possibilité de l'abaissement des équations modulaires, et j'ai obtenu les résultats que vous me communiquez dans votre lettre.

Voici pour le module premier $n = 4p + 3$ les expressions que j'ai trouvées alors pour la décomposition en n groupes dont toutes les substitutions sont données par la forme (1) où $ad\text{-}bc$ est résidu de n.

Si g est une racine primitive de n, jouissant de cette propriété, que $g - 1$ étant résidu de n, les puissances impaires $< n - 2$ de g vérifient la congruence

$$[g^2 x^2 - g(g+1)x + 1][g^2 x^2 - (g+1)x + 1] \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n)$$

(ce qui n'arrive que pour $n = 7$, 11), on aura, si l'on fait

$$\theta(k) \equiv g^{2\delta} \frac{k - g^{2\alpha+1}}{k - g^{2\alpha}}, \; g^{2\delta+1} \frac{k - g^{2\alpha}}{k - g^{2\alpha+1}}, \; g^{2\delta} k, \; \frac{g^{2\delta+1}}{k},$$

un groupe $[k, \theta(k)]$ de $\frac{(n+1)(n-1)}{2}$ substitutions de la forme (1) telles, qu'en faisant sur ce groupe les substitutions $(k, k+i)$, on obtient n groupes, dont l'ensemble est le groupe proposé.

Or si $n = 7$ on a deux racines primitives $g = 3$, $g = 5$, $5 - 1$ est résidu de 7 et les deux puissances impaires de 5 inférieures à 5, c'est à dire 5, 5^3 vérifient la congruence

$$[2x^2 + 2x + 1][4x^2 + x + 1] \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 7).$$

Donc, lorsque $n = 7$, on a deux systèmes de valeurs pour $\theta(k)$, à savoir :

$$\theta(k) \equiv a \frac{k - 3b}{k - b}, \; -a \frac{k - b}{k - 3b}, \; ak, \; -\frac{a}{k},$$

en prenant $g=3$, et

$$\vartheta(k) \equiv a\frac{k+2b}{k+b},\ -a\frac{k+b}{k+2b},\ ak,\ -\frac{a}{k},$$

en prenant $g=5$, a et b désignant des résidus de 7.

Si $n=11$, on a quatre racines primitives: $2, 6, 7, 8$; $2-1$ est résidu de 11 et les puissances de 2, impaires et inférieures à 9, vérifient la congruence

$$(3x^2+2x+1)(3x^2+4x+1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 11).$$

Or si l'on prend $g=2$, a et b résidus de 11, on aura

$$\theta(k) \equiv a\frac{k-2b}{k-b},\ -a\frac{k-b}{k-2b},\ ak,\ -\frac{a}{k},$$

et si l'on prend $g=6$

$$\vartheta(k) \equiv a\frac{k-6b}{k-b},\ -a\frac{k-b}{k-6b},\ ak,\ -\frac{a}{k}.$$

Les racines primitives 7 et 8 ne jouissent pas de la propriété de rendre $g-1$ résidu de 11, et la congruence lorsqu'on y fait $g=7, 8$ n'est pas satisfaite par les puissances de 7 et 8 impaires et inférieures à 9.

Les substitutions $\theta(k), \vartheta(k)$ jouissent de la propriété d'être à lettres conjointes, c'est à dire qu'en divisant les lettres en systèmes de deux lettres chacune de la manière suivante:

$$v_0\, v_\infty,\ v_{g^2}\, v_{g^3},\ v_{g^4}\, v_{g^5},\ \ldots\ldots\ldots,\ v_{g^{2\alpha}}\, v_{g^{2\alpha+1}},\ \ldots\ldots$$

toute substitution $\theta(k), \vartheta(k)$, ou change entre elles les lettres d'un système, ou change un système dans un autre.

Dans le cas de $n=5$ j'avais obtenu des résultats semblables aux précédentes et formé un groupe de douze permutations en considérant les trois substitutions:

$$\theta(k) \equiv 4k,\ \frac{1}{k},\ 3\frac{k+1}{k-1},$$

et celles qu'on en déduit en les composant entre elles....

Pise, 24 mars 1859.

XXI.

FONDAMENTI DI UNA TEORICA GENERALE DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA [1]

(Dagli *Annali di matematica pura ed applicata*, serie I, t. II, pp. 288-304, 337-356, Roma, 1859).

1.

Se ad ogni valore di una quantità variabile z, che può prendere successivamente tutti i valori reali, corrisponde un solo valore della quantità indeterminata w, si dice che w è una funzione di z, e se, quando z percorre con continuità tutti i valori compresi tra due valori dati, anche w varia con continuità, la funzione w in questo intervallo si dice continua.

Questa definizione evidentemente non stabilisce alcuna legge tra tutti i particolari valori della funzione, poichè se si dispone della medesima per un intervallo determinato, il modo della sua continuazione al di fuori dello stesso rimane del tutto arbitrario.

La dipendenza della quantità w da z può esser data per mezzo di una legge matematica, in guisa che per mezzo di date operazioni di calcolo si possa trovare per ogni valore di z il corrispondente di w. La proprietà di potere essere determinate per ogni valore di z compreso in un certo intervallo, mediante la stessa legge di dipendenza, si attribuì un tempo soltanto a un certo genere di funzioni (*functiones continuae* di Eulero); ma le nuove ricerche hanno dimostrato, che esistono espressioni analitiche, per le quali può rappresentarsi qualunque funzione continua in un dato intervallo. Perciò è lo stesso definire la dipendenza della quantità w dalla quantità z come data in modo arbitrario, o come data mediante determinate operazioni di calcolo. Ambedue i concetti coincidono in conseguenza del menzionato teorema.

Ma non è più così, quando le variazioni delle grandezze z non si limitano ai valori reali, ma comprendono anche i valori complessi della forma $x+iy$ (dove $i=\sqrt{-1}$).

Siano $x+iy$ e $x+iy+dx+idy$ due valori di z infinitamente vi-

[1] Traduzione della dissertazione inaugurale di B. Riemann.

cini, ai quali corrispondano per w i valori $u+iv$ e $u+iv+du+idv$. Allora, se assumiamo arbitraria la dipendenza della quantità w da z, il rapporto $\frac{du+idv}{dx+idy}$ muterà in generale con i valori di dx e dy, poichè, ponendo $dx+idy=\varepsilon e^{\varphi i}$, avremo

$$\frac{du+idv}{dx+idy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right\}\frac{dx-idy}{dx+idy}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right\}e^{-2i\varphi}.$$

Ma in qualunque modo w si possa determinare in funzione di z, mediante le semplici operazioni di calcolo, il valore del quoziente differenziale $\frac{dw}{dz}$ è sempre indipendente dal valore particolare del differenziale dz (¹); quindi, mediante le semplici operazioni di calcolo, non può esprimersi una dipendenza qualunque della quantità complessa w dalla quantità complessa z.

La notata proprietà di tutte le funzioni determinabili in qualunque modo per mezzo di operazioni di calcolo la porremo per fondamento delle seguenti ricerche, dove una tal funzione sarà considerata indipendentemente dalla sua espressione, poichè noi partiremo dalla seguente definizione senza dimostrare adesso che essa è generale e sufficiente per qualunque dipendenza determinabile mediante operazioni di calcolo.

Una variabile complessa w si dice funzione di un'altra variabile complessa z, quando varia con questa in modo che il valore della derivata $\frac{dw}{dz}$ sia indipendente dal valore del differenziale dz.

2.

Tanto w quanto z saranno considerate come variabili, che possono prendere ogni valore complesso. Per concepire chiaramente queste variazioni, che si estendono in un campo continuo di due dimensioni, converrà ricorrere a una rappresentazione geometrica.

(¹) Questa proposizione è evidentemente giustificata in tutti i casi, nei quali dall'espressione di w si può per mezzo delle regole di derivazione trovare una espressione di $\frac{dw}{dz}$ in funzione di z; in questo senso per adesso la riterremo vera rigorosamente e generale.

Rappresentiamo un valore qualunque $x + iy$ di z con un punto O del piano A, il qual punto abbia per coordinate ortogonali x e y, e un valore qualunque $u + iv$ di w con un punto Q del piano B e di coordinate ortogonali u, v. Ogni dipendenza di w da z sarà rappresentata allora come una dipendenza della posizione del punto Q da quella del punto O. Se ad ogni valore di z corrisponde un valore di w che varia con z in modo continuo e determinato, con altre parole, se u e v sono funzioni continue di x e y, ad ogni punto del piano A corrisponderà un punto del piano B, ad ogni linea in generale una linea, a ogni area continua un'area continua. Quindi si potrà rappresentare questa dipendenza di w da z come una imagine del piano A sul piano B.

3.

Determiniamo ora le proprietà che ha questa imagine, quando w è funzione della grandezza complessa z, cioè quando $\frac{dw}{dz}$ è indipendente da dz.

Indichiamo con o un punto del piano A nella vicinanza di O e con q la sua imagine nel piano B, quindi con $x + iy + dx + idy$ e $u + iv + du + idv$ i valori rispettivi di z e w in questi punti.

Riguardando O e Q come origini delle coordinate, dx, dy e du, dv saranno le coordinate ortogonali dei punti o e q, e ponendo:

$$dx + idy = \varepsilon e^{\varphi i}, \qquad du + i\,dv = \eta e^{\psi i},$$

ε, φ, η, ψ saranno le coordinate polari di questi punti.

Siano ora o' e o'' due posizioni determinate di o infinitamente vicine ad O, distinguendo le quantità che ad esse si riferiscono mediante indici analoghi, avremo per le supposizioni fatte

$$\frac{du' + i\,dv'}{dx' + i\,dy'} = \frac{du'' + i\,dv''}{dx'' + i\,dy''},$$

e quindi

$$\frac{du' + i\,dv'}{du'' + idv''} = \frac{\eta'}{\eta''}\, e^{(\psi' - \psi'')i} = \frac{dx' + i\,dy'}{dx'' + i\,dy''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\, e^{(\varphi' - \varphi'')i};$$

onde

$$\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''},\ \psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi'';$$

cioè nei triangoli $o'\mathrm{O}o''$ e $q'\mathrm{Q}q''$ sono eguali gli angoli $o'\mathrm{O}o''$ e $q'\mathrm{Q}q''$, e i lati che li comprendono sono proporzionali tra loro.

Dunque i triangoli infinitamente piccoli corrispondenti, e quindi in generale le parti infinitamente piccole del piano A e le loro imagini sul piano B, sono simili. Una eccezione a questo teorema si presenta soltanto nei casi particolari, nei quali le variazioni tra loro corrispondenti di z e di w non istanno tra loro in un rapporto finito, ciò che tacitamente si supporrà sempre escluso (1).

4.

Se poniamo il quoziente differenziale

$$\frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy}$$

sotto la forma

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}i\right)i\,dy}{dx + i\,dy},$$

è chiaro che esso avrà lo stesso valore per due valori qualunque di dx e dy, soltanto allorchè sarà

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Queste condizioni sono dunque necessarie e sufficienti, affinchè $w = u + iv$ sia una funzione di $z = x + iy$. Dalle medesime seguono l' equazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

le quali sono il fondamento per la ricerca delle proprietà, che appartengono a un termine di una tal funzione separatamente considerato. Noi anteporremo la dimostrazione delle più importanti di queste proprietà allo studio della funzione completa, ma prima ancora spiegheremo e stabiliremo alcuni punti più generali, per facilitare queste ricerche.

---

(1) Sopra questo soggetto si veda: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird,* von C. F. Gauss. (Als Beantwortung der von der königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen für 1822 aufgegebenen Preisfrage, abgedruckt in: *Astronomische Abhandlungen,* herausgegeben von Schumacher. Drittes Heft, Altona, 1825).

5.

Nelle seguenti considerazioni limiteremo le variazioni di x e di y a un campo finito, riguardando come luogo del punto O, non più il piano stesso A, ma una superficie T distesa sopra il medesimo. Preferiamo questa rappresentazione, per la quale non farà difficoltà parlare di superficie sovrapposte, per rendere evidente la possibilità che il luogo del punto O si estenda più volte sopra la stessa parte del piano; però presupporremo in questo caso che le superficie sovrapposte non si attacchino lungo una linea, in guisa che non si abbiano nè piegature della superficie, nè intersezioni di parti sovrapposte della medesima. Così il numero delle parti di superficie sovrapposte in ogni parte del piano sarà completamente determinato, quando sarà data la posizione e il senso del contorno (cioè la sua parte interna ed esterna); queste parti potranno però continuarsi una nell'altra anche in modi diversi.

Infatti, se conduciamo per una parte qualunque del piano coperta dalla superficie una linea qualunque l, il numero delle parti di superficie sovrapposte muta soltanto quando si oltrepassa il contorno, e muta di $+1$ procedendo dall'esterno all'interno, nel caso opposto muta di -1, e quindi è per tutto completamente determinato. Lungo questa linea ogni parte di superficie che vi termina, si continua in modo intieramente determinato, finchè la linea non incontra il contorno, poichè non può aversi indeterminatezza altrochè in punti separati, o giacenti sopra la linea stessa, o a una distanza finita dalla medesima; quindi limitandoci a una parte della linea l condotta nell'interno della superficie e, da ambedue le parti della linea stessa, a una striscia di superficie sufficientemente piccola, possiamo parlare di determinate parti di superficie che vi terminano, il numero delle quali è eguale da ambedue le parti, e che noi, stabilita una determinata direzione alla linea, indicheremo, quelle di sinistra con $a_1, a_2, \ldots a_n$, quelle di destra con $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$. Allora ogni parte di superficie a si continuerà in una parte di superficie a': e questo in generale avverrà per tutta la linea l, ma per posizioni particolari di l può in uno dei suoi punti essere altrimenti.

Se ammettiamo che al di sopra di un punto σ (cioè lungo la parte della linea l che si avanza) colle parti di superficie $a'_1, a'_2 \ldots a'_n$ siano attaccate le parti di superficie $a_1, a_2, \ldots a_n$, al di sotto dello stesso poi le parti di superficie $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots a_{\alpha_n}$, dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ differiscono da $1, 2, \ldots n$ solo nell'ordine, un punto che al di sopra di σ da a_1 passa in a'_1, quando al di sotto di σ ritorna alla sinistra, entrerà in a_{α_1}, e quando gira intorno al punto σ da sinistra a destra, l'indice della parte di superficie, in cui si trova, percorre successivamente i numeri

$$1, \alpha_1, \alpha_{\alpha_1}, \ldots, \mu, \alpha_\mu, \ldots$$

In questa serie tutti i termini sono differenti tra loro, finchè non torna il termine 1, perchè un termine medio qualunque α_μ è preceduto immediatamente e necessariamente da μ e successivamente da tutti i precedenti termini sino ad 1; ma se dopo un numero di termini, che evidentemente è minore di n e che sia $= m$, ritorna il termine 1, gli altri devono seguire nello stesso ordine. Allora il punto che si muove intorno a σ dopo m giri ritorna nella stessa parte di superficie, e resta sempre in m parti di superficie sovrapposte, le quali si uniscono in un solo punto σ. Chiameremo questo un punto di giramento di $(m-1)^{esimo}$ ordine delle superficie T. Applicando lo stesso processo alle altre parti di superficie, se queste non saranno tra loro disgiunte si divideranno in sistemi di m_1, m_2, ... parti di superficie, nel qual caso saranno nel punto σ anche dei punti di giramento di $(m_1-1)^{esimo}$, $(m_2-1)^{esimo}$... ordine.

Quando è data la posizione e il senso del contorno di T e la posizione dei suoi punti di giramento, T o è completamente determinata o limitata a un numero finito di forme differenti; e questo ultimo in quanto che queste determinazioni possono riferirsi a diverse parti di superficie sovrapposte.

Una variabile che per ogni punto O della superficie T, in generale, cioè senza escludere una eccezione per linee e punti singolari (1), prende un valore determinato che varia con continuità colla posizione dello stesso, può evidentemente riguardarsi come una funzione di x, y, e dovunque in seguito parleremo di funzioni di x, y, le intenderemo così.

Prima di passare a considerare queste funzioni, intercaleremo anche alcune considerazioni intorno alla connessione delle superficie. Ci limiteremo a superficie che non si dividono lungo una linea.

6.

Riguarderemo due parti di superficie come connesse o appartenenti a uno stesso pezzo, quando si potrà condurre una linea che, senza escir dalla superficie, vada da un punto dell'una a un punto dell'altra; come separate, quando questo sarà impossibile.

Lo studio della connessione di una superficie si appoggia sopra il suo

---

(1) Questa limitazione non è imposta certamente dal concetto di funzione in sè, ma è necessaria per potere applicarle il calcolo infinitesimale: una funzione che in tutti i punti di una superficie è discontinua, come, per esempio, una funzione che ha il valore 1 quando x è commensurabile e y è commensurabile, e altrimenti ha il valore 2, non può assoggettarsi nè a differenziazione nè a integrazione, quindi non può assoggettarsi (immediatamente) al calcolo infinitesimale in generale. La limitazione fatta arbitrariamente qui per la superficie T sarà più tardi (Art. 15) giustificata.

spezzamento per mezzo di trasversali, cioè di linee che partendo da un punto del contorno percorrono la superficie semplicemente, cioè senza passare più volte per uno stesso punto, e vanno a un punto del contorno, il quale può anche essere un punto delle parti aggiunte al contorno, cioè uno dei punti delle trasversali.

Una superficie connessa, quando da ogni trasversale è divisa in due pezzi separati, dicesi semplicemente connessa, altrimenti molteplicemente connessa.

Teorema I. *Una superficie* A *semplicemente connessa è divisa da ogni trasversale ab in due pezzi semplicemente connessi.*

Supponiamo che uno di questi pezzi non venga nuovamente diviso in due pezzi separati da una trasversale *cd*; secondo che nessuno dei due estremi, o l'estremo *c*, o ambedue gli estremi cadessero in *ab*, ristabilendo l'unione lungo l'intera linea *ab* o lungo la parte *cb* o lungo la parte *cd* della stessa, si otterrebbe una superficie connessa, che nascerebbe da A mediante una trasversale contro il supposto.

Teorema II. *Quando una superficie* T *da* n_1 [1] *trasversali* q_1 *è divisa in un sistema* T_1 *di* m_1 *pezzi semplicemente connessi, e da* n_2 *trasversali* q_2 *in un sistema* T_2 *di* m_2 *pezzi,* $n_2 - m_2$ *non può esser maggiore di* $n_1 - m_1$.

Ogni linea q_2, quando tutta intera non fa parte del sistema di trasversali q_1, forma contemporaneamente una o più trasversali q'_2 della superficie T_1. Come estremi delle trasversali q'_2 si devono riguardare:

1) i $2n_2$ punti estremi delle trasversali q_2, fuori che quando queste nei loro tratti estremi fanno parte del sistema di linee q_1;

2) ogni punto intermedio di una trasversale q_2, in cui questa passa per un punto intermedio di una linea q_1, fuori che quando si trova già sopra un'altra linea q_1, cioè quando un estremo di una trasversale q_1 passa per il medesimo.

Ora sia μ il numero delle volte che linee di ambedue i sistemi s'incontrano o si separano (dove però ogni punto solo a comune deve contarsi per due), ν_1 il numero di volte che un tratto estremo di q_1 coincide con una parte intermedia di una linea q_2, ν_2 il numero di volte che un tratto estremo di una q_2 coincide con una parte intermedia di una linea q_1, finalmente ν_3 il numero di volte che un tratto estremo delle q_1 coincide con un tratto estremo di una linea q_2; così avremo

$$\text{N}^{\text{o}}.\ 1:\ 2n_2 - \nu_2 - \nu_3\,, \qquad \text{N}^{\text{o}}.\ 2:\ \mu - \nu_1$$

[1] Per uno spezzamento mediante più trasversali deve sempre intendersi uno spezzamento fatto successivamente, cioè tale che la superficie nata da una trasversale sia spezzata da una nuova trasversale.

punti estremi per le trasversali q'_2; ma ambedue i casi presi insieme abbracciano tutti i punti estremi e ciascuno una volta soltanto, e quindi il numero di queste trasversali sarà

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s.$$

Con un ragionamento del tutto analogo si dimostra che il numero delle trasversali q'_1 della superficie T_2, che vengono formate dalle linee q_1, è eguale a

$$\frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2} = n_1 + s.$$

Ora la superficie T_1 evidentemente è trasformata dalle $n_2 + s$ trasversali q'_2 nelle stesse superficie in cui T_2 è divisa dalle $n_1 + s$ trasversali q'_1. Ma T_1 consiste di m_1 pezzi semplicemente connessi, e per il teorema I. riman divisa da $n_2 + s$ trasversali in $m_1 + n_2 + s$ pezzi; quindi, se fosse $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$ il numero dei pezzi T_2, per mezzo delle $n_1 + s$ trasversali, dovrebbe essere aumentato di più di $n_1 + s$ pezzi, ciò che è assurdo.

In conseguenza di questo teorema, indicando con n il numero delle trasversali, con m il numero dei pezzi, il numero $n - m$ sarà costante per tutte le divisioni della superficie in pezzi semplicemente connessi: poichè se consideriamo due spezzamenti dati, uno di n_1 trasversali in m_1 pezzi, l'altro di n_2 trasversali in m_2 pezzi, se i primi sono semplicemente connessi dovrà essere $n_1 - m_1 \overline{\overline{<}} n_2 - m_2$, e se gli ultimi sono semplicemente connessi dovrà essere $n_2 - m_2 \overline{\overline{<}} n_1 - m_1$: dunque $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$.

Questo numero potrà pertanto chiamarsi *ordine della connessione* di una superficie: e sarà

per mezzo di ogni trasversale diminuito di 1, secondo la definizione;

invariabile, quando si conduca una linea da un punto della superficie, che trascorra semplicemente le superficie sino al contorno o a un punto di una trasversale;

aumentato di 1 da una linea che percorrendo semplicemente la superficie termina in due punti separati;

perchè la prima aggiungendo una trasversale, la seconda linea aggiungendo due trasversali vengono a formare una trasversale.

Finalmente l'ordine della connessione di una superficie composta di più parti si ottiene sommando gli ordini della connessione di queste parti.

In seguito nel maggior numero di casi ci limiteremo a superficie composte di un sol pezzo, e per indicare l'ordine della loro connessione useremo le parole: semplice, duplice, triplice,... chiamando n-uplicemente connessa una

superficie che per mezzo di $n-1$ trasversali può essere ridotta in una semplicemente connessa.

Quanto alla dipendenza della connessione del contorno dalla connessione della superficie è chiaro che:

1. Il contorno di una superficie semplicemente connessa consiste necessariamente di una sola linea chiusa.

Se il contorno consistesse di pezzi separati, una trasversale q, che unisse un punto di un pezzo a con uno d'un altro b, dividerebbe soltanto l'una dall'altra parti di una superficie semplicemente connessa, poichè nella superficie si potrebbe condurre lungo a una linea da un lato della trasversale q all'opposto; e quindi q non spezzerebbe la superficie, contro il supposto.

2. Ogni trasversale aumenta o diminuisce di uno i pezzi del contorno.

Una trasversale q o unisce un punto di un pezzo di contorno a con un punto di un altro b, e allora tutte queste linee prese insieme colla successione a, q, b, q formano un unico pezzo di contorno chiuso;

o unisce due punti di uno stesso pezzo del contorno; allora questo si spezza per ambedue i suoi estremi in due pezzi, ciascuno dei quali preso insieme colla trasversale forma un pezzo di contorno chiuso;

o finalmente finisce in uno dei suoi punti precedenti, e può esser considerata come composta di una linea chiusa o e di un'altra l che unisce un punto di o con un punto di un pezzo di contorno a, nel qual caso o da una parte, e a, l, o, l dall'altra, formano ciascuno un pezzo di contorno chiuso.

Dunque o - nel 1°. caso - in luogo di due pezzi di contorno se ne ha uno, o - in ambedue gli altri - in luogo di uno se ne hanno due, onde il nostro teorema risulta dimostrato.

Il numero dei pezzi dei quali è composto il contorno di una superficie n-uplicemente connessa, è perciò o eguale a n, o eguale ad n meno un numero pari.

Da questo ne tragghiamo il corollario:

Se il numero dei pezzi del contorno di una superficie n-uplicemente connessa è eguale ad n, questa è divisa in due pezzi separati da ogni curva chiusa che non abbia punti multipli.

Poichè l'ordine della connessione non vien mutato da essa, e il numero dei pezzi del contorno è aumentato di 2; quindi, se la superficie fosse connessa, avrebbe un n-uplice connessione, e il contorno di $n+2$ pezzi, il che è impossibile.

7.

Se X e Y sono due funzioni di x, y continue in tutti i punti della superficie T distesa sopra A, avremo

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int(X\cos\xi+Y\cos\eta)ds,$$

dove il primo integrale è esteso a tutti gli elementi dT della superficie T, il secondo a tutti gli elementi ds del contorno, e in ogni punto del contorno l'angolo d'inclinazione, che la normale al medesimo condotta verso l'interno fa coll'asse delle x, è indicato con ξ, e, quello che fa coll'asse delle y, con η.

Per trasformare l'integrale $\int\frac{\partial X}{\partial x}dT$, dividiamo la parte del piano A coperta dalla superficie T, mediante un sistema di linee parallele all'asse delle x, in strisce elementari, in modo che ogni punto di giramento della superficie cada sopra una di queste linee. Così la parte di T che si troverà sopra ciascuna di queste striscie sarà composta di una o più aree trapezoidali separate. Quindi il valore dell'integrale $\int\frac{\partial X}{\partial x}dT$ relativo a una qualunque di queste striscie elementari, che intercetta sull'asse delle y l'elemento dy, sarà evidentemente eguale a $dy\int\frac{\partial X}{\partial x}dx$, dove l'integrazione deve essere estesa a quella o quelle linee rette appartenenti alla superficie T che si trovano sopra una normale che passa per un punto di dy. Ora se l'estremità inferiori di queste rette (cioè quelle che corrispondono ai più piccoli valori di x) si indicano con $O_{,}, O_{,,}, O_{,,,}, \ldots$ e le superiori con $O', O'', O''', \ldots$ e con $X_{,}, X_{,,}, \ldots, X', X'', \ldots$ i rispettivi valori di X in questi punti, con $ds_{,}, ds_{,,} \ldots, ds', ds'', \ldots$ i rispettivi elementi intercettati dal contorno sopra le striscie elementari, con $\xi_{,}, \xi_{,,}, \ldots, \xi', \xi'', \ldots$ i valori di ξ in questi elementi, sarà

$$\int\frac{\partial X}{\partial x}dx=-X_{,}-X_{,,}-X_{,,,}-\cdots+X'+X''+X'''+\cdots$$

Gli angoli ξ saranno acuti nell'estremità inferiori, ottusi nelle superiori, quindi

$$dy=\cos\xi_{,}ds_{,}=\cos\xi_{,,}ds_{,,}=\cdots=-\cos\xi' ds'=-\cos\xi'' ds''=\cdots;$$

e sostituendo questi valori, si ottiene

$$dy\int\frac{\partial X}{\partial x}dx=-\sum X\cos\xi\, ds,$$

dove la sommazione si estende a tutti gli elementi del contorno, che hanno per projezione dy sopra l'asse delle y.

Estendendo l'integrazione a tutti i dy si esauriranno evidentemente tutti gli elementi della superficie T e tutti gli elementi del contorno, e quindi con questa estensione degl'integrali avremo

$$\int \frac{\partial X}{\partial x} dT = -\int X \cos \xi \, ds.$$

Con analogo ragionamento si trova

$$\int \frac{\partial Y}{\partial y} dT = -\int Y \cos \eta \, ds,$$

e quindi

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int (X \cos \xi + Y \cos \eta) ds,$$

come volevamo dimostrare.

8.

Se rappresentiamo con s la lunghezza del contorno, contata da un punto fisso come origine, in un senso determinato da stabilirsi in seguito, fino a un punto qualunque O_0, e con p la distanza di un punto qualunque O della normale condotta per O_0 da questo punto, considerando come positive le distanze contate verso l'interno; i valori di x e di y nel punto O potranno riguardarsi come funzioni di s e di p, e nei punti del contorno avremo allora per le derivate parziali

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \cos \xi, \ \frac{\partial y}{\partial p} = \cos \eta, \ \frac{\partial x}{\partial s} = \pm \cos \eta, \ \frac{\partial y}{\partial s} = \mp \cos \xi,$$

dove si devono prendere i segni superiori, quando la direzione nella quale s è riguardata come crescente, fa con p un angolo, il cui senso è eguale a quello dell'asse x coll'asse y, i segni inferiori nel caso opposto. Prenderemo questa direzione in tutte le parti del contorno in modo che

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial p},$$

e quindi

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial p},$$

ciò che non toglie essenzialmente la generalità dei nostri risultati.

Possiamo evidentemente estendere queste determinazioni anche alle linee nell'interno di T; soltanto per determinare qui il segno di dp e di ds, quando è stabilita come là la loro reciproca dipendenza, bisogna aggiungere anche se è il segno di dp o di ds che si fissa; per una linea chiusa fisseremo qual'è la parte di superficie da lei limitata di cui deve riguardarsi come contorno, con che è determinato il segno di dp, ma per una linea non chiusa daremo la sua origine, cioè l'estremità in cui s ha il minimo valore.

L'introduzione dei valori ottenuti per $\cos\xi$ e $\cos\eta$ nell'equazione dimostrata nel precedente paragrafo dà, estendendo egualmente gl'integrali

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=\int\left(X\frac{\partial y}{\partial s}-Y\frac{\partial x}{\partial s}\right)ds.$$

9.

Applicando il teorema del paragrafo precedente al caso in cui in tutta la superficie è

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0,$$

abbiamo il seguente teorema:

I. *Se* X *e* Y *sono due funzioni finite e continue e sodisfano all'equazione*

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

in tutti i punti di T, *avremo*

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=0,$$

quando si estenda l'integrale a tutto il contorno di T.

Supponiamo una superficie qualunque T_1 distesa sopra A divisa in modo qualunque in due pezzi T_2 e T_3, l'integrale

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

rapporto al contorno di T_2, potrà esser considerato come la differenza degl'integrali relativi al contorno di T_1 e di T_3, poichè dove T_3 ha il contorno comune con T_1, ambedue gl'integrali si distruggono, e tutti gli altri elementi appartengono a un elemento del contorno di T_2.

Per mezzo di questa trasformazione dal teorema I. si ottiene il seguente:

II. *Il valore dell'integrale*

$$\int\left(\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial p}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

esteso a tutto il contorno di una superficie distesa sopra A *rimane costante per qualunque distensione o ristringimento dello stesso, quando non si lasci fuori o non si oltrepassi nessuna parte di superficie, in cui non siano verificate le supposizioni del teorema* I.

Ora se le funzioni X e Y sodisfano in ogni parte della superficie T alla precedente equazione alle derivate parziali, ma in singolari linee o punti possiedono discontinuità, si può circondare ognuna di queste linee o di questi punti con una curva sufficientemente piccola, e applicando il teorema II. si ottiene allora il seguente:

III. *L'integrale* $\int\left(\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial p}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$ *esteso a tutto il contorno di* T *è eguale alla somma degli integrali* $\int\left(\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial p}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$ *estesi ai contorni delle curve che circondano ciascuna discontinuità, i quali conservano lo stesso valore comunque piccole siano queste curve.*

Questo valore è nullo necessariamente per un punto di discontinuità, quando, colla distanza ϱ del punto O dallo stesso, divengono infinitamente piccole $\varrho\mathrm{X}$ e $\varrho\mathrm{Y}$; poichè se si prendono rispetto a questo punto come polo, con un asse polare qualunque, le coordinate polari ϱ e φ, e per la curva che lo circonda una circonferenza descritta intorno allo stesso col raggio ϱ, il nostro integrale diviene

$$\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial p}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial p}\right)\varrho d\varphi\,,$$

e non può avere un valore k differente da zero, perchè, qualunque sia k, ϱ può esser preso sempre così piccolo che, astrazion fatta del segno, sia

$$\left(\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial p}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial p}\right)\varrho<\frac{k}{2\pi}$$

per ogni valore di φ, e quindi

$$\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial p}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial p}\right)\varrho d\varphi<k.$$

IV. *Se in una superficie semplicemente connessa distesa sopra* A, *l'integrale esteso a tutto il contorno di una parte qualunque della superficie*

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$$

si annulla, lo stesso integrale esteso a una linea che va da un punto O_0 *a un altro* O, *ha lo stesso valore qualunque sia questa linea.*

Infatti due linee s_1 e s_2, che uniscono i punti O_0 e O, prese insieme formano una linea chiusa s_3. Questa linea o possiede essa stessa la proprietà di non intersecare se medesima, oppure si può spezzare in più linee chiuse che possiedano questa proprietà; poichè percorrendola a partire da un punto qualunque, ogni volta che si torni a uno stesso punto, si può separare la parte chiusa così percorsa e considerare la seguente come continuazione della prima parte che arrivava fino a quel punto. Ma ognuna di queste linee chiuse spezza la superficie in una semplicemente e in una doppiamente connessa; perciò forma necessariamente l'intero contorno di uno di questi pezzi, e l'integrale esteso a tutta la medesima $\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$ sarà dietro il supposto $=0$. Lo stesso in conseguenza vale dell'integrale esteso a tutta la linea s_3, quando la grandezza s si riguardi sempre come crescente nella stessa direzione; devono perciò gl'integrali estesi alle linee s_1 e s_2, quando questa direzione resti invariata, cioè vada in una delle stesse da O_0 ad O nell'altra da O ad O_0, distruggersi reciprocamente, quindi presi da O_0 ad O in ambedue saranno eguali.

Ora quando abbiamo una superficie qualunque T, nella quale sia in generale $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$, si separino primieramente, quando sia necessario, le discontinuità, in modo che nel resto della superficie per ogni parte della stessa, sia

$$\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds=0,$$

e si spezzi la superficie restante per mezzo di trasversali in una semplicemente connessa T^*. Allora per ogni linea che va nell'interno di T^* da un punto O_0 a un altro O l'integrale ha lo stesso valore; quindi questo valore, che per brevità indicheremo con $\int_{O_0}^{O}\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$, è determinato indipendentemente dalla linea percorsa, e riguardando O_0 come fisso e O come

mobile, dipende solo dalla posizione di O, e quindi può riguardarsi come una funzione di x e di y. La variazione di questa funzione quando O si muova lungo un elemento lineare qualunque ds, sarà espressa da $\left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$, in T* sarà per tutto continua e eguale dalle due parti di un trasversale di T.

V. *L'integrale* $Z = \int_{O_0}^{O}\left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$ *forma perciò, riguardando* O_0 *come fisso, una funzione di* x *e di* y*, la quale è continua per tutto in* T*, *ma oltrepassando una trasversale di* T *muta di una grandezza costante lungo tutta la trasversale, e ha per derivate parziali*

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Y\,,\ \frac{\partial Z}{\partial y} = -X.$$

Le mutazioni che nascono dall'oltrepassare le trasversali sono dipendenti da un numero di grandezze indipendenti tra loro eguale al numero delle trasversali; poichè se attraversiamo all'indietro il sistema delle trasversali — le ultime parti prima — questa mutazione è per tutto determinata, quando il suo valore è dato al principio di ogni trasversale; ma gli ultimi valori sono indipendenti tra loro.

10.

Se prendiamo $u\frac{\partial u'}{\partial x} - u'\frac{\partial u}{\partial x}$ per la funzione fin qui indicata con X, e $u\frac{\partial u'}{\partial y} - u'\frac{\partial u}{\partial y}$ per Y, avremo

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right) - u'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);$$

quindi se le funzioni u e u' sodisfano all'equazioni

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

sarà

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0\,,$$

e i teoremi del paragrafo precedente si applicano all'espressione

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds\,,$$

che diviene eguale a

$$\int \left(u \frac{\partial u'}{\partial p} - u' \frac{\partial u}{\partial p} \right) ds .$$

Ora supponiamo che la funzione u e le sue derivate prime non abbiano discontinuità lungo una linea, e, per ogni punto dove sono discontinue, colla distanza ϱ del punto O dallo stesso divengano infinitamente piccoli $\varrho \frac{\partial u}{\partial x}$ e $\varrho \frac{\partial u}{\partial y}$; potranno allora, in conseguenza della osservazione III. del precedente paragrafo, queste discontinuità essere affatto trascurate.

Poichè allora si può prendere in ognuna delle linee rette che parte da un punto di discontinuità un valore R di ϱ in modo che

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \varrho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \varrho \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varrho}$$

al di sotto dello stesso resti sempre finito, e indicando con U il valore di u per $\varrho = \mathrm{R}$, con M, astrazion fatta dal segno, il massimo valore di $\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}$ in quell'intervallo, sarà, prendendo sempre le lettere collo stesso significato,

$$u - \mathrm{U} < \mathrm{M}(\log \varrho - \log \mathrm{R}),$$

e quindi $\varrho(u - \mathrm{U})$ e anche ϱu diverranno infinitamente piccoli con ϱ; ma lo stesso, secondo il presupposto, vale per $\varrho \frac{\partial u}{\partial x}$ e $\varrho \frac{\partial u}{\partial y}$; e quindi se u' non ha alcuna discontinuità, vale anche per

$$\varrho \left(u \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \varrho \left(u \frac{\partial u'}{\partial y} - u' \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

dunque siamo nel caso considerato nel precedente articolo.

Ammettiamo ora che la superficie T che forma il luogo del punto O sia per tutto distesa semplicemente sopra A; e imaginiamo nella stessa un punto qualunque fisso O_0, in cui u, x, y abbiano i valori u_0, x_0, y_0. La quantità

$$\tfrac{1}{2} \log [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = \log r$$

considerata come funzione di x e di y ha allora la proprietà di rendere

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} = 0,$$

ed ha una discontinuità soltanto per $x = x_0$ e $y = y_0$ cioè in un sol punto della superficie T.

Quindi, secondo l'Art. 9, III., ponendo $\log r$ in luogo di u' l'integrale

$$\int\left(u\frac{\partial \log r}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\log r\right)ds$$

esteso a tutto il contorno di T sarà eguale allo stesso integrale esteso a un contorno qualunque che circondi il punto O_0, e quindi, se prendiamo per questo contorno una circonferenza in cui r ha un valore costante, e indichiamo con φ l'arco contato in parti di raggio da uno dei suoi punti in una data direzione sino al punto O, sarà eguale a

$$-\int_0^{2\pi} u\frac{\partial \log r}{\partial r}\, r\, d\varphi - \log r\int\frac{\partial u}{\partial p}\, ds,$$

ovvero, poichè $\int\frac{\partial u}{\partial p}ds=0$, sarà eguale a $-\int_0^{2\pi} ud\varphi$, il qual valore, se u è continua nel punto O_0, per r infinitamente piccolo diviene $-2\pi u_0$.

Colle supposizioni fatte rispetto ad u e a T abbiamo quindi per un punto qualunque O_0 della superficie, dove u è continua,

$$u_0=\frac{1}{2\pi}\int\left(\log r\frac{\partial u}{\partial p}-u\,\frac{\partial \log r}{\partial p}\right)ds\,,$$

dove l'integrale è esteso a tutto il contorno della superficie, e

$$u_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ud\varphi\,,$$

estendendo l'integrale a una circonferenza descritta intorno ad O_0 come centro.

Dalla prima di queste espressioni deduciamo il seguente

Teorema. *Se una funzione u nell' interno di una superficie* T, *che cuopre per tutto semplicemente il piano* A, *sodisfa in generale all'equazione a derivate parziali* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, *in modo che*

1) *i punti in cui non sodisfa a questa equazione, non formino un'area;*

2) *i punti nei quali* u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ *sono discontinue, non formino una linea continua;*

3) *per ogni punto di discontinuità insieme colla distanza* ϱ *del punto* O *dal medesimo* $\varrho\frac{\partial u}{\partial x}$, $\varrho\frac{\partial u}{\partial y}$ *divengono infinitamente piccole;*

4) *per u è esclusa una discontinuità che possa togliersi mutando il suo valore in punti singolari;*

questa funzione e le sue derivate sono necessariamente per tutti i punti della superficie finite e continue.

Infatti, se riguardiamo il punto O_0 come mobile, sono variabili nell'espressione

$$\int\left(\log r \frac{\partial u}{\partial p} - u \frac{\partial \log r}{\partial p}\right) ds \quad \text{soltanto} \quad \log r\,,\ \frac{\partial \log r}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial \log r}{\partial y}\,.$$

Ma queste grandezze e le loro derivate, per ogni elemento del contorno, finchè O_0 rimane nella superficie di T, sono funzioni finite e continue di x_0 e di y_0, poichè le derivate sono espresse da funzioni razionali fratte di queste grandezze, che contengono soltanto potenze di r nel denominatore. Lo stesso vale anche per il valore del nostro integrale, e quindi per la funzione u_0. Poichè l'integrale potrebbe avere un valore differente da u_0, per le supposizioni fatte, soltanto in punti separati, nei quali la funzione sarebbe discontinua, la quale possibilità è tolta dalla supposizione 4) del nostro teorema.

11.

Colle supposizioni relative ad u e a T fatte alla fine dell'articolo precedente, abbiamo i seguenti teoremi:

I. *Se lungo una linea è* $u = 0$ *e* $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$, u *sarà per tutto* $= 0$.

Dimostreremo prima che una linea λ dove $u = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$, non può formare il contorno di una parte di superficie a, dove u è positiva.

Supposto che ciò fosse possibile si prenda un pezzo della superficie a, che abbia per contorno una parte di λ e una parte di circonferenza, e che non contenga il centro di questa, il che è sempre possibile. Allora, indicando con r e φ le coordinate polari di un punto O riferite ad un punto O_0 come a polo, abbiamo

$$\int \log r \frac{\partial u}{\partial p}\, ds - \int u \frac{\partial \log r}{\partial p}\, ds = 0\ ,$$

estendendo gl'integrali all'intero contorno di questo pezzo; quindi, per la supposizione fatta, sarà nulla anche la somma di questi integrali estesi al solo arco di circolo, cioè

$$\int u\, d\varphi + \log r \int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds = 0\,;$$

e poichè $\int \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0$, sarà $\int u d\varphi = 0$, ciò che contradice alla supposizione che u sia sempre positivo nell'interno di a.

In simil modo si dimostrerà che l'equazioni $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ non possono verificarsi in una parte di contorno di un'area b dove u è negativo.

Ora se nella superficie T in una linea fosse $u = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$, e in una parte della stessa fosse u differente da zero, questa parte di superficie o dovrebbe essere limitata da questa linea stessa, o da una parte di superficie dove u fosse zero, e quindi sempre dovrebbe aver per contorno una linea dove fossero u e $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$, il che contradice a ciò che abbiamo dimostrato.

II. *Se il valore di u e di* $\frac{\partial u}{\partial p}$ *è dato lungo una linea, u rimane determinato in tutte le parti di* T.

Siano u_1 e u_2 due funzioni date che sodisfano alle condizioni poste per u, queste saranno sodisfatte anche dalla loro differenza $u_1 - u_2$ come risulta, sostituendo la medesima nell'equazioni relative. Ora se u_1 e u_2 e le loro derivate prime coincidessero lungo una linea, e non coincidessero in un'altra parte di superficie, lungo questa linea sarebbe

$$u_1 - u_2 = 0 \,, \quad \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial p} = 0$$

senza che fosse per tutta la superficie $u_1 - u_2 = 0$, contro il teorema I.

III. *I punti di* T, *nei quali u è costante, formano necessariamente, quando u non è per tutto costante, linee, che separano una parte di superficie dove u è maggiore da un'altra dove u è minore.*

Questo teorema è composto dei seguenti:

u non può in un punto di T avere un minimo o un massimo;

u non può essere costante *soltanto* in una parte della superficie;

le linee nelle quali $u = 0$ non possono limitare da ambedue le parti aree nelle quali $u - a$ ha lo stesso segno.

Teoremi, l'opposto dei quali, come è facile a vedersi, trascinerebbe sempre una negazione dell'equazione dimostrata nel paragrafo precedente

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \, d\varphi \,, \quad \text{o} \quad \int_0^{2\pi} (u - u_0) \, d\varphi = 0 \,,$$

e che quindi sono impossibili.

12.

Torniamo ora a considerare una variabile complessa $w = u + vi$, la quale in generale (cioè senza escludere un'eccezione in linee e punti singolari) ha per ogni punto O della superficie T un valore determinato colla posizione di O, e che varia in modo da sodisfare all'equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

e come già abbiamo stabilito, diciamo che una variabile w, la quale gode queste proprietà, è una funzione di $z = x + iy$. Per semplicità in seguito supporremo che una funzione di z non debba possedere discontinuità che possano togliersi per la mutazione del suo valore in un punto separato.

Prendiamo prima la superficie T semplicemente connessa, e per tutto semplicemente distesa sopra A.

Teorema. *Se una funzione w di z non ha mai interruzioni di continuità lungo una linea, e per un punto qualunque* O′ *della superficie in cui sia $z = z'$, $w(z - z')$ diviene infinitamente piccolo quando* O *si avvicina indefinitamente ad* O′, *essa e tutte le sue derivate in tutti i punti della superficie sono finite e continue.*

Le supposizioni fatte relativamente alle variazioni di w, ponendo $z - z' = \varrho e^{i\varphi}$, divengono relativamente ad u e a v le seguenti:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ per ogni parte della superficie T;

2) $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ per ogni parte della superficie T;

3) le funzioni u e v non sono discontinue lungo una linea;

4) per ogni punto O′, ϱu e ϱv divengono infinitamente piccoli quando diviene infinitamente piccola la distanza ϱ di O da O′;

5) per le funzioni u e v sono escluse le discontinuità che possono togliersi mutando il loro valore in punti separati.

In conseguenza delle supposizioni 2), 3), 4), per l'Art. 9, III., sarà per ogni parte della superficie T

$$\int \left(u \frac{\partial x}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0,$$

estendendo l'integrale a tutto il contorno di T; e quindi l'integrale

$$\int_{O_0}^{O} \left(u \frac{\partial x}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

esteso a una linea qualunque che va da O_0 ad O (per l'Art. 9, IV.) prende sempre lo stesso valore, e, riguardando O_0 come fisso, forma una funzione U di x e di y necessariamente continua per tutto fuorichè in punti separati, la quale (Art. 9, V.) ha in ogni punto per derivate parziali $\frac{\partial U}{\partial x} = u, \frac{\partial U}{\partial y} = -v$. Sostituendo questi valori per u e v, le supposizioni 1), 3), 4) divengono le condizioni del teorema dato alla fine del paragrafo 10. Dunque la funzione U e tutte le sue derivate sono finite e continue in tutti i punti di T, e in conseguenza lo stesso varrà anche per la funzione complessa $w = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y}$ e per tutte le sue derivate prese rapporto a z.

13.

Passiamo ora a determinare che cosa accade quando, ritenendo le altre supposizioni dell'Art. 12, ammettiamo che per un dato punto O′ della superficie T, $(z-z')w = \varrho e^{\varphi i} w$ non diviene più infinitamente piccolo per l'infinito avvicinarsi di O ad O′. In questo caso w diviene infinito coll'infinito avvicinarsi di O ad O′, e supporremo, che se w non è dello stesso ordine di $\frac{1}{\varrho}$, cioè se il quoziente di ambedue queste quantità non ha per limite una grandezza finita, almeno gli ordini delle medesime stiano tra loro in un rapporto finito, in guisa che si possa trovare una potenza di ϱ, per la quale moltiplicata w, il prodotto col decrescere infinito di ϱ converga verso un limite finito o verso zero. Se μ è l'esponente di questa potenza e n il prossimo numero intero superiore la quantità $(z-z')^n w = \varrho^n e^{n\varphi i} w$ diverrà infinitamente piccola con ϱ, e quindi $(z-z')^{n-1} w$ sarà una funzione di z $\left(\text{poichè } \frac{d(z-z')^{n-1}w}{dz} \text{ è indipendente da } dz\right)$, la quale in questa parte della superficie soddisferà alle supposizioni dell' Art. 12, e in conseguenza sarà finita e continua nel punto O′. Se indichiamo con a_{n-1} il suo valore nel punto O′, $(z-z')^{n-1} w - a_{n-1}$ sarà una funzione che in questo punto è continua e eguale a zero, e in conseguenza diviene infinitamente piccola con ϱ, onde per l' Art. 12, la espressione $(z-z')^{n-2} w - \frac{a_{n-1}}{z-z'}$, è una funzione continua nel punto O′. Continuando questo processo, w per la sottrazione di una espressione della forma

$$\frac{a_1}{z-z'} + \frac{a_2}{(z-z')^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(z-z')^{n-1}}$$

diverrà evidentemente una funzione che resta finita e continua nel punto O′.

Dunque se le supposizioni dell' Art. 12 sono modificate soltanto in questo, che la funzione w debba divenire infinita per l'infinito avvicinarsi del punto O a un punto O' della superficie T, l'ordine di questo infinito (una quantità che cresce nel rapporto inverso della distanza si considera come un infinito di primo ordine) se è finito sarà necessariamente un numero intero; e se questo numero è m, la funzione w aggiungendo ad essa una funzione che contiene $2m$ costanti arbitrarie, si trasforma in una funzione continua nel punto O'.

Osservazione. Consideriamo una funzione come contenente una sola costante arbitraria, se tutti i modi possibili di determinarla abbracciano una sola dimensione.

14.

Le limitazioni, che abbiamo fatte negli Art. 12 e 13 relativamente alle superficie T, non sono essenziali perchè sussistano i risultati ottenuti. Evidentemente ogni punto di una superficie qualunque può circondarsi con un pezzo della medesima che possieda la proprietà che abbiamo ivi supposta, eccettuato soltanto il caso, in cui questo punto fosse un punto di giramento della superficie.

Per studiare questo caso, immaginiamoci la superficie T o un pezzo qualunque di essa, che contenga un punto di giramento di $(n-1)^{esimo}$ ordine, dove sia $z = z' = x' + iy'$, riportata per mezzo della funzione $\zeta = (z - z')^{\frac{1}{n}}$ sopra un altro piano A, cioè immaginiamo il valore della funzione $\zeta = \xi + i\eta$ nel punto O rappresentato da un punto Θ, che ha per coordinate ortogonali ξ e η, e consideriamo il punto Θ come l'immagine del punto O. In questo modo si ottiene per rappresentazione di questa parte della superficie T una superficie connessa distesa sopra A, che non ha punto di giramento nel punto Θ' immagine del punto O', come passiamo a dimostrare.

Per fissar le idee immaginiamo descritta una circonferenza nel piano A col centro in O' e col raggio R, e condotto un diametro parallelo all'asse delle x, lungo il quale $z - z'$ prenderà i valori reali. La porzione di superficie T compresa da questo circolo, che racchiude il punto di giramento, quando si prenda R sufficientemente piccolo, rimarrà spezzata da ambedue le parti del diametro in n semicircoli separati uno dall'altro. Da quella parte del diametro, nella quale $y - y'$ è positivo, indichiamo questi semicircoli con a_1, a_2, ... a_n, e dalla parte opposta con a'_1, a'_2, ... a'_n, e ammettiamo che per valori negativi di $x - x'$, a_1, a_2, ... a_n, siano attaccati rispettivamente con a'_1, a'_2, ... a'_n, e al contrario per valori positivi con a'_n, a'_1, ... a'_{n-1},

in guisa che un punto che giri intorno a O′ (nel senso conveniente) trascorra successivamente la superficie a_1, a'_1, a_2, a'_2, ... a_n, a'_n e da a'_n torni di nuovo in a_1, la qual supposizione evidentemente può sempre farsi. Se introduciamo ora, per ambedue i piani, coordinate polari, ponendo $z - z' = \varrho e^{\varphi i}$, $\zeta = \sigma e^{\psi i}$, e scegliamo per rappresentare il semicircolo a_1 quel valore di $(z - z')^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi}{n} i}$ per cui $0 \overline{\overline{<}} \varphi \overline{\overline{<}} \pi$, per tutti i punti di a_1 sarà $\sigma \overline{\overline{<}} \mathrm{R}^{\frac{1}{n}}$ e $0 \overline{\overline{<}} \psi \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{n}$, quindi le rappresentazioni degli stessi nel piano Λ saranno contenute in un settore di un circolo descritto intorno a Θ' col raggio $\mathrm{R}^{\frac{1}{n}}$, che si estende da $\psi = 0$ a $\psi = \frac{\pi}{n}$, e a ogni punto di a_1 corrisponde un punto di questo settore, che si muove con continuità insieme con esso, e viceversa, onde segue che la imagine della superficie a_1 è una superficie semplicemente connessa distesa sopra questo settore. In simil modo si ottiene per imagine del semicircolo a'_1 un settore che si estende da $\psi = \frac{\pi}{n}$ a $\psi = \frac{2\pi}{n}$, per a_2 un settore che si estende da $\psi = \frac{2\pi}{n}$ a $\psi = \frac{3\pi}{n}$, finalmente per a'_n un settore che si estende da $\psi = \frac{(2n-1)\pi}{n}$ a $\psi = 2\pi$, se per ogni punto di queste superficie prendiamo φ successivamente compreso tra π e 2π, 2π e 3π, ... $(2n-1)\pi$ e $2n\pi$, ciò che è sempre possibile e in un sol modo. Ma questi settori si attaccano l'uno all'altro nell'ordine stesso con cui si succedono i semicircoli a e a', in modo che a punti consecutivi corrispondono punti consecutivi, perciò formano insieme uniti una imagine di un pezzo della superficie T che racchiude il punto O′, e questa imagine è evidentemente una superficie connessa distesa semplicemente sopra il piano Λ.

Una variabile che per ogni punto O ha un determinato valore, lo ha anche per ogni punto Θ e viceversa, poichè ad ogni O corrisponde soltanto un Θ, e ad ogni Θ soltanto un O; quindi, se è funzione di z, è anche funzione di ζ, poichè se $\frac{dw}{dz}$ è indipendente da dz, anche $\frac{dw}{d\zeta}$ è indipendente da $d\zeta$, e viceversa. Da ciò risulta che i teoremi degli Art. 12 e 13 possono essere applicati a tutte le funzioni w di z anche nei loro punti di giramento, purchè si considerino come funzioni di $(z - z')^{\frac{1}{n}}$: onde abbiamo il seguente

Teorema. *Se una funzione w di z diviene infinita coll'infinito avvicinarsi del punto O a un punto di giramento di $(n-1)^{esimo}$ ordine O′, questo infinito è necessariamente dello stesso ordine di una potenza della*

distanza il cui esponente è un multiplo di $\frac{1}{n}$, *e se questo esponente è* $-\frac{m}{n}$, *aggiungendo alla medesima funzione una espressione della forma*

$$\frac{a_1}{(z-z')^{\frac{1}{n}}}+\frac{a_2}{(z-z')^{\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{a_m}{(z-z')^{\frac{m}{n}}}$$

dove a_1, a_2 ... a_m *sono quantità complesse arbitrarie, si può trasformare in una funzione continua nel punto* O'.

Come corollario di questo teorema si può dedurne, che la funzione w è continua nel punto O', se $(z-z')^{\frac{1}{n}}w$ diviene infinitamente piccolo quando O si avvicina infinitamente ad O'.

15.

Se immaginiamo ora una funzione di z, che abbia un valore determinato per ogni punto O della superficie T distesa comunque sopra A, e che non sia per tutto costante, rappresentata geometricamente, in modo che il suo valore $w=u+iv$ nel punto O venga rappresentato da un punto Q del piano B, che abbia per coordinate ortogonali u e v, avremo il seguente teorema:

I. L'insieme dei punti Q formerà una superficie S, nella quale a ogni punto corrisponde un determinato punto O della superficie T, e facendo muovere con continuità Q sopra S, anche O si muoverà con continuità sopra T.

Per dimostrare questo teorema è evidente che basterà provare, che la posizione di Q varia sempre (e in generale con continuità) con quella di O. Questa prova è contenuta nel seguente

Teorema. *Una funzione* $w=u+iv$ *di* z *non può essere costante lungo una linea, senza esser per tutto costante.*

Dimostrazione. Se w lungo una linea avesse un valore costante $a+ib$, si avrebbe in questa linea

$$u-a=0,\ \frac{\partial(u-a)}{\partial p}=-\frac{\partial v}{\partial s}=0,$$

e per tutto

$$\frac{\partial^2(u-a)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u-a)}{\partial y^2}=0,$$

quindi, per il teorema I dell' Art. 11, si avrebbe per tutto $u-a=0$, e poichè $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, anche $v-b=0$ per tutto, contro il supposto.

II. In conseguenza delle supposizioni fatte in I., tra le parti di S non può esservi connessione, senza che vi sia connessione delle parti corrispondenti di T; viceversa per tutto dove in T è connessione e w è continua, corrisponde connessione in S.

Ciò presupposto, corrisponde il contorno di S da una parte al contorno di T, dall'altra ai posti di discontinuità; ma le sue parti interne, esclusi punti singolari, per tutto sono semplicemente distese sopra B, cioè in nessun luogo vi è intersezione di parti sovrapposte o piegature della superficie.

Affinchè si verificasse la prima ipotesi, poichè la connessione di T corrisponde per tutto a quella di S, sarebbe necessario che in T vi fosse una intersezione, contro il supposto. Dimostriamo ora che non può verificarsi la seconda.

Proviamo prima, che un punto Q′, dove $\frac{dw}{dz}$ è finita, non può trovarsi in un piegatura di S.

Se racchiudiamo il punto O′, a cui corrisponde Q′, in una porzione di superficie T di forma qualunque e di dimensioni indeterminate, si devon potere (secondo l'Art. 3) prendere le dimensioni della stessa sempre così piccole, che la forma della porzione corrispondente di S ne differisca di tanto poco quanto si vuole, e in conseguenza così piccole che il contorno della stessa sul piano B separi una porzione che racchiude Q′. Ma questo è impossibile se Q′ si trova in una piegatura della superficie S.

Ora $\frac{dw}{dz}$ come funzione di z, per il teorema I., può essere eguale a zero soltanto in punti separati, e poichè è continua nei punti di T che si considerano, può divenire infinita soltanto nei punti di giramento; dunque ecc. come volevamo dimostrare.

III. In conseguenza la superficie S è una superficie, per la quale valgono le supposizioni fatte per T nell'Art. 5; e in questa superficie per ogni punto Q la variabile z ha un valore determinato, che varia con continuità colla posizione di Q, e in modo che $\frac{dz}{dw}$ è indipendente dalla direzione del moto di Q. Dunque z è nel senso stabilito in principio una funzione continua della variabile complessa w per il campo rappresentato dalla superficie S.

Da ciò segue inoltre:

Se O′ e Q′ sono due punti corrispondenti delle superficie T ed S, e nei medesimi è $z = z'$, $w = w'$, e se nessuno di essi è un punto di giramento, $\frac{w - w'}{z - z'}$ coll'avvicinarsi infinitamente di O ad O′ converge verso un limite

finito, e le rappresentazioni dell'una per l'altra sono simili nelle parti infinitesime; ma se Q′ è un punto di giramento di $(n-1)^{esimo}$ ordine, e O′ un punto di giramento di $(m-1)^{esimo}$ ordine, $\frac{(w-w')^{\frac{1}{n}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$ coll'avvicinarsi infinitamente di O ad O′ convergerà verso un limite finito, e per le parti di superficie prossime ad essi si ha un modo di rappresentazione quale risulta facilmente dall' Art. 14.

16.

Teorema. *Se α e β sono due funzioni qualunque di x e di y, per le quali l'integrale*

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]d\mathrm{T}$$

esteso a tutte le parti della superficie T *distesa comunque sopra* A, *ha un valore finito, facendo variare α di funzioni continue o discontinue soltanto in punti separati, le quali sul contorno siano eguali a zero, l'integrale acquisterà sempre per una di queste funzioni un valore minimo, e uno soltanto, se si escludono le discontinuità che possono togliersi colla mutazione del loro valore in punti separati.*

Indichiamo con λ una funzione qualunque continua o discontinua soltanto in punti separati, che nel contorno è $=0$, e per la quale l'integrale

$$\mathrm{L}=\int\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right]d\mathrm{T}$$

esteso a tutta la superficie ha un valore finito, con ω una qualunque delle funzioni $\alpha+\lambda$, finalmente con Ω l'integrale

$$\int\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]d\mathrm{T}$$

esteso a tutta la superficie. L'insieme delle funzioni λ forma un campo continuo e chiuso, poichè ciascuna di queste funzioni si converte con continuità in ciascuna delle altre, ma non si può avvicinare infinitamente a una funzione discontinua lungo una linea senza che L divenga infinito (Art. 17); ora, posto $\omega=\alpha+\lambda$, Ω prende per ogni funzione λ un valore finito, che diviene infinito con L, varia con continuità colle forme di λ, ma non può abbassarsi al di sotto di zero; dunque Ω ha almeno un minimo per una forma della funzione ω.

Per dimostrare la seconda parte del nostro teorema, sia u una delle funzioni ω, che fa acquistare ad Ω un valore minimo, h una indeterminata costante in tutta la superficie, in guisa che $u + h\lambda$ sodisfi a tutte le condizioni alle quali abbiamo assoggettato la funzione ω. Il valore di Ω che, per $\omega = u + h\lambda$, diviene

$$\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right] dT$$

$$+ 2h\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right] dT$$

$$+ h^2\int\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2\right] dT = M + 2Nh + Lh^2,$$

deve per ogni λ (dietro il concetto del minimo) divenire maggiore di M, quando si prenda h sufficientemente piccolo. Ma questo esige, che per ogni forma di λ, sia $N = 0$; poichè altrimenti

$$2Nh + Lh^2 = Lh^2\left(1 + \frac{2N}{Lh}\right)$$

diverrebbe negativo prendendo h di segno opposto a $\frac{2N}{L}$ e minore di questa quantità astrazion fatta dal segno. Il valore di Ω per $\omega = u + \lambda$, nella qual forma evidentemente sono compresi tutti i possibili valori di ω, diviene parciò eguale ad $M + L$, e quindi essendo L essenzialmente positivo, Ω non può avere per alcun'altra forma di ω un valore minore di quello che ha per $\omega = u$.

Se per un'altra u' delle funzioni ω, Ω avesse un valore minimo M', si potrebbe ripetere lo stesso ragionamento, e avremmo $M' \overline{\overline{<}} M$, e $M \overline{\overline{<}} M'$, onde $M = M'$. Ma se poniamo u' sotto la forma $u + \lambda'$, per M' avremo la espressione $M + L'$, indicando con L' il valore di L per $\lambda = \lambda'$, e l'equazione $M = M'$ darebbe $L' = 0$. Ora questo è possibile solamente quando per tutta la superficie siano $\frac{\partial \lambda'}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \lambda'}{\partial y} = 0$, e perciò finchè λ è continua, questa funzione ha necessariamente un valore costante, e quindi poichè essa nel contorno è uguale a zero e non è discontinua lungo una linea, questo valore potrà differire da zero al più in qualche punto separato. Dunque due funzioni ω, che fanno acquistare ad Ω un valore minimo, non possono differire tra loro altro che in punti separati, e se nella funzione u vengono poste da parte le discontinuità che possono togliersi mutandole il valore in punti separati, essa sarà completamente determinata.

17.

Ora bisogna dimostrare, che rimanendo finita L, la funzione λ non può avvicinarsi infinitamente a una funzione γ discontinua lungo una linea, cioè se λ è assoggettata alla condizione di coincidere con γ al di fuori di una parte di superficie T' che racchiude la linea di discontinuità, T' potrà prendersi così piccola che L divenga maggiore di una quantità qualunque data C.

Dando il solito significato ad s e a p relativamente alla linea di discontinuità, indichiamo con k la curvatura corrispondente a un valore qualunque di s, considerandola positiva, dalla parte convessa delle p positive, e con p_1 il valore di p nel contorno di T' dalla parte positiva, e con p_2 quello dalla parte negativa, con γ_1 e γ_2 i valori corrispondenti di γ. Se consideriamo ora una parte qualunque di questa linea a curvatura continua, la parte di T' compresa tra le normali ai punti estremi, se non si estende fino ai centri di curvatura, dà per la relativa parte del valore di L

$$\int ds \int_{p_2}^{p_1} dp\,(1-kp)\left\{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)^2\frac{1}{(1-kp)^2}\right\},$$

ma il minimo valore dell'espressione

$$\int_{p_2}^{p_1}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^2(1-kp)\,dp$$

per i valori limiti fissi di γ_1 e γ_2 di λ si trova colle regole note eguale a

$$\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2 k}{\log(1-kp_2)-\log(1-kp_1)}$$

e quindi questa parte dell'integrale, comunque sia preso λ dentro T', diviene necessariamente maggiore di

$$\int_{c} \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2 k\,ds}{\log(1-kp_2)-\log(1-kp_1)}\,.$$

La funzione γ sarebbe continua per $p=0$, se il maggior valore che può prendere $(\gamma_1-\gamma_2)^2$ per $\pi_1>p_1>0$ e $\pi_2<p_2<0$, divenisse infinitamente piccolo con $\pi_1-\pi_2$; quindi per ogni valore di s, potremo prendere una quantità finita m in guisa, che per quanto piccolo si prenda $\pi_1-\pi_2$, continuamente siano compresi valori di p_1 e p_2 tra i limiti espressi da

$$\pi_1>p_1\geqq 0\ ,\qquad \pi_2<p_2\lesseqgtr 0$$

(dove i segni di eguaglianza si escludono scambievolmente), per i quali

$(\gamma_1 - \gamma_2)^2$ divenga maggiore di m. Se ammettiamo quindi colle limitazioni stabilite una forma qualunque per T′, dando a p_1 e a p_2 determinati valori P_1 e P_2, e indichiamo con a il valore dell'integrale

$$\int \frac{mk\, ds}{\log(1 - kP_2) - \log(1 - kP_1)}$$

esteso alla parte che si considera della linea di discontinuità, potremo evidentemente fare

$$\int \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 k\, ds}{\log(1 - kp_2) - \log(1 - kp_1)} > C,$$

prendendo p_1 e p_2 per ogni valore di s in modo che siano sodisfatte le diseguaglianze

$$p_1 < \frac{1 - (1 - kP_1)^{\frac{a}{C}}}{k}, \quad p_2 > \frac{1 - (1 - kP_2)^{\frac{a}{C}}}{k}, \quad (\gamma_1 - \gamma_2)^2 > m.$$

Ma segue da ciò che, comunque si prenda λ in T′, la parte di L che si riferisce al pezzo di T′ preso in esame, e in conseguenza anche L stessa, sarà maggiore di C, come volevamo dimostrare.

18.

Secondo l'Art. 16, per la funzione u ivi considerata, e per una qualunque delle funzioni λ, abbiamo

$$N = \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right\} dT = 0,$$

quando si estenda l'integrale a tutta la superficie T. Da questa equazione dobbiamo ora dedurre altre conseguenze.

Se separiamo dalla superficie T una porzione T′ che racchiuda i posti di discontinuità di u, β, λ, si trova la parte di N relativa all'altra porzione di superficie T″, per mezzo dell'Art. 7, ponendo $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \lambda$ in luogo di X e $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \lambda$ in luogo di Y, essere eguale a

$$- \int \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dT - \int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \lambda\, ds.$$

Per la condizione relativa al contorno alla quale abbiamo assoggettato la funzione λ, la parte dell'integrale

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \lambda ds,$$

che si riferisce alla porzione di contorno di T″ comune a T, si annullerà; in guisa che N potrà riguardarsi come composta dell'integrale

$$-\int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \lambda d\mathrm{T}$$

esteso a T″, e dalla somma dei due integrali

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right\} d\mathrm{T} + \int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \lambda ds,$$

estesi alla sola porzione T′.

Ora se $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ fosse differente da zero in una parte qualunque della superficie T, N prenderebbe evidentemente un valore differente da zero, tosto che λ si prendesse, il che può farsi, eguale a zero in T′, e in T″ tale che $\lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ avesse per tutto lo stesso segno. Ma se $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ è nullo per tutto, sparisce la parte di N relativa a T″ per ogni λ, e la condizione $\mathrm{N} = 0$ risulta allora dall'annullarsi le parti relative alle porzioni di superficie che racchiudono le discontinuità.

Per le funzioni $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}$ abbiamo perciò, indicando con X la prima e con Y la seconda, non solamente in generale l'equazione

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} = 0,$$

ma anche

$$\int \left(\mathrm{X} \frac{\partial x}{\partial p} + \mathrm{Y} \frac{\partial y}{\partial p} \right) ds = 0,$$

quando si estenda l'integrale a tutto il contorno di una parte qualunque di T, e quindi questa espressione in generale ha un valore determinato.

Se dunque riduciamo (secondo l'Art. 9, V.) la superficie T, quando essa è molteplicemente connessa, per mezzo di trasversali in una T* semplicemente connessa, l'integrale

$$\int_{\mathrm{O}_0}^{\mathrm{O}} \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) ds$$

ha lo stesso valore per ogni linea che sopra T^* va da O_0 ad O, e riguardando O_0 come fisso, forma una funzione di x e di y, che in T^* è per tutto continua e lungo una trasversale offre la stessa variazione da ambedue le parti. Questa funzione ν aggiunta a β ci dà una funzione $v = \beta + \nu$ le cui derivate parziali sono

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Quindi abbiamo il seguente

Teorema. *Se è data una superficie connessa* T, *ridotta per mezzo di trasversali in una semplicemente connessa* T^*, *una funzione complessa* $\alpha + i\beta$ *di* x *e* y, *per la quale*

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right\} dT$$

esteso a tutta la superficie abbia un valore finito, si potrà sempre, e in un sol modo convertire in una funzione di z, *aggiungendole una funzione* $\mu + \nu i$ *di* x *e* y *assoggettata alle seguenti condizioni:*

1) μ *è nel contorno* $= 0$, *o soltanto differente da zero in punti separati,* ν *è dato in un punto qualunque*;

2) *le variazioni di* μ *in* T, *quelle di* ν *in* T^* *sono soltanto discontinue in punti separati, e soltanto in modo che restino finiti gl'integrali*

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right\} dT, \quad \int \left\{ \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right\} dT$$

estesi a tutta la superficie, e le variazioni di ν *sono eguali fra loro da ambedue le parti lungo le trasversali.*

La compatibilità delle condizioni che determinano $\mu + \nu i$ segue da ciò, che μ, per cui riman determinato ν sino a una costante da aggiungersi, dà sempre un minimo dell'integrale Ω, poichè posto $u = \alpha + \mu$, evidentemente si ha $N = 0$ per ogni λ; proprietà che secondo l'Art. 16 appartiene soltanto a una funzione.

19.

I principî che costituiscono il fondamento del teorema alla fine del paragrafo precedente, aprono la via a studiare *determinate* funzioni di una variabile complessa (indipendentemente da una espressione delle medesime).

Per orientarsi sopra questo terreno servirà il percorrere il complesso delle

condizioni che si richiedono per determinare una tal funzione in una data estensione.

Se prima ci teniamo in un caso particolare, in cui la superficie distesa sopra A, nella quale il campo delle funzioni è rappresentato, è semplicemente connessa, la funzione $w = u + v i$ sarà determinata dalle seguenti condizioni:

1) è dato per u in tutti i punti del contorno un valore, che per infinitamente piccole variazioni di luogo varia d'infinitamente piccole quantità dello stesso ordine, ma che del resto sono qualunque (¹);

2) il valore di v è dato arbitrariamente in un punto scelto a piacere;

3) la funzione in tutti i punti dev' essere finita e continua.

Ma da queste condizioni è completamente determinata.

Infatti ciò si deduce dal teorema dell'articolo precedente, determinando, come è sempre possibile $\alpha + \beta i$ in modo che α sia nel contorno eguale al dato valore, e in tutta la superficie, per ogni variazione di luogo infinitamente piccola, la variazione di $\alpha + \beta i$ sia infinitamente piccola dello stesso ordine.

Dunque, in generale, u può esser data nel contorno come una funzione di s interamente arbitraria, e con essa v rimane per tutto determinata; ma reciprocamente può anche prendersi v comunque in ogni punto del contorno, e ne segue allora il valore di u. Il campo che si ha per la scelta dei valori di w nel contorno abbraccia perciò una varietà di una dimensione sola per ogni punto, e la completa determinazione degli stessi richiede per ogni punto del contorno un'equazione, ma non sarà necessario che ciascuna di queste equazioni si riferisca soltanto al valore di un termine in un sol punto del contorno. Per questa determinazione potrebbe anche esser data per ogni punto del contorno una equazione che mutasse continuamente la sua forma colla posizione di questo punto, e contenesse ambedue i termini; oppure, riguardando il contorno come diviso in n parti, e ad ogni punto di una di queste parti essendo associati in un modo determinato $n - 1$ punti presi da ciascuna delle altre parti, potrebbero essere date per questi n punti n equazioni simultanee, che variassero colla loro posizione. Ma queste condizioni, il cui insieme forma una continua varietà, e che sono espresse da equazioni tra funzioni arbitrarie, affinchè siano ammissibili e sufficienti per la determinazione di una funzione per tutto continua nell'interno di una data estensione, abbisognano ancora di una limitazione o complemento mediante particolari equazioni di condizione - equazioni relative alle costanti arbitrarie -

(¹) Le variazioni di questo valore non sono veramente soggette ad altra limitazione, fuori che a quella di non essere discontinue lungo una parte del contorno: abbiamo fatto una più stretta limitazione per maggior semplicità.

perchè sino a questo non si estende evidentemente la precisione del nostro teorema.

Nel caso in cui il campo delle variazioni di z è rappresentato da una superficie molteplicemente connessa, queste considerazioni non richiedono alcun cangiamento, poichè l'applicazione del teorema dell'Art. 18, dà una funzione che differisce dalla precedente, solo nei cangiamenti che riceve per l'oltrepassare delle trasversali, cangiamenti, che possono esser fatti eguali a zero, se le condizioni ai limiti contengono un numero di costanti disponibili, eguale al numero delle trasversali.

Il caso in cui nell'interno vi è una interruzione di continuità lungo una linea si riduce al precedente, riguardando questa linea come una trasversale della superficie.

Se finalmente in un punto separato vi è una interruzione di continuità, e quindi, secondo l'Art. 12, è ammesso che la funzione divenga infinita in un punto, conservando le supposizioni fatte nel primo caso, per questo punto potrà esser data una funzione di z, che sottratta renderà continua la funzione da determinarsi, e perciò rimarrà pienamente determinata. Poichè si prenda $\alpha+\beta i$ eguale a questa funzione data, in un circolo piccolo quanto si vuole descritto intorno al punto di discontinuità, ma del resto conformandosi a quanto abbiamo stabilito, sarà

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right\}dT=0$$

estendendo l'integrale a questo circolo; ed estendendolo alle altri parti sarà eguale a una quantità finita, e si potrà applicare il teorema dell'articolo precedente, con che si ottiene una funzione che ha la voluta proprietà. Da ciò, per il teorema dell'Art. 13, seguirà, che in generale, quando in punti separati di discontinuità la funzione diverrà infinita di ordine n, bisognerà aggiungere un numero di $2n$ costanti.

Rappresentata geometricamente (secondo l'Art. 15) una funzione w di una variabile complessa z, in un dato campo di due dimensioni, dà una imagine S, che cuopre un piano B, simile nelle minime parti, esclusi soltanto punti separati, a una superficie T che cuopre il piano A. Le condizioni trovate necessarie e sufficienti alla determinazione della funzione, si riferiscono al suo valore, o nei punti del contorno, o in quelli di discontinuità; compariscono quindi (Art. 15) tutte come condizioni per le posizioni del contorno di S, e dànno per ogni punto del contorno una equazione di condizione. Se ciascuna delle stesse si riferisce a un sol punto del contorno, verranno rappresentate da una serie di curve, delle quali per ogni punto del contorno, una forma il luogo geometrico. Se due punti consecutivi del con-

torno, sono assoggettati a due comuni equazioni di condizione, nascerà tra due parti del contorno una tal dipendenza, che presa arbitraria la posizione dell'una, ne seguirà la posizione dell'altra. In modo analogo per altre forme dell'equazioni di condizione risulta un significato geometrico, che noi ora non vogliamo indagare più oltre.

20.

L'introduzione delle quantità complesse in matematica ha la sua origine e immediato scopo nella teorica delle più semplici relazioni tra le variabili, esprimibili per mezzo di operazioni di calcolo [1], cioè se estendiamo queste relazioni, dando alle variabili, alle quali si riferiscono, valori complessi, si presenta una permanente armonia e regolarità che altrimenti non potrebbe aversi. I casi nei quali questo è accaduto, abbracciano finora un piccol campo - si possono quasi tutti ridurre a quelle relazioni tra due variabili, nelle quali una o è funzione algebrica [2] dell'altra, o ha per derivata una funzione algebrica dell'altra - ma ad ogni passo che qui si è fatto, non solo si è dato ai risultati ottenuti senza l'aiuto delle quantità complesse una forma più semplice, e completa, ma si è aperto anche la via a nuove scoperte, come mostra la storia delle ricerche sopra le funzioni algebriche, circolari o esponenziali, ellittiche e abeliane.

Mostriamo brevemente ciò che per le nostre ricerche nella teorica di tali funzioni si è ottenuto.

I metodi precedenti per lo studio di queste funzioni ponevano sempre come definizione una *espressione* della funzione, dalla quale fosse dato il di lei valore per *ogni* valore dell'argomento; le nostre ricerche dimostrano che, in conseguenza del carattere generale di una funzione di una variabile complessa, in una definizione di questa specie una parte dei dati, che servono alla determinazione delle funzioni è conseguenza dell'altra, e li riducono ai soli necessari. Questo rende essenzialmente più semplice lo studio delle medesime. Per esempio, per dimostrare l'eguaglianza di due espressioni della stessa funzione, si dovrebbero altrimenti trasformare l'una nell'altra, cioè mostrare che ambedue coincidono per ogni valore della variabile; ora basta la prova della loro coincidenza in una estensione molto minore.

---

[1] Riguardiamo qui come operazioni elementari l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione, l'integrazione e la differenziazione, e una relazione la riguardiamo tanto più semplice, quanto minor numero di operazioni elementari contiene. In fatti tutte le funzioni introdotte fin qui nell'Analisi si possono definire mediante un numero finito di queste operazioni.

[2] Cioè quelle relazioni nelle quali tra le due variabili esiste un'equazione algebrica.

Una teorica di queste funzioni fondata sopra questi principî stabilirebbe la formazione della funzione (cioè il suo valore per ogni valore dell'argomento) indipendentemente da una determinazione della stessa mediante operazioni di calcolo, aggiungendo al general concetto di una funzione di una variabile complessa soltanto i dati necessari alla determinazione della funzione, e allora passerebbe alle differenti espressioni che possono darsi alla funzione. Il carattere comune a un genere di funzioni, che si esprimono in modo simile per operazioni di calcolo, si rappresenta allora sotto la forma di condizioni relative ai limiti, e alle discontinuità. Per esempio, se il campo delle variazioni di z è disteso sopra tutto il piano infinito A semplicemente, o molteplicemente, e nello stesso la funzione ha soltanto discontinuità in punti separati, e soltanto acquista infiniti di ordine finito (dove per un infinito z si riguarda come infinito di primo ordine questa quantità stessa, e per ogni finito valore z' della stessa la quantità $\frac{1}{z-z'}$) la funzione è necessariamente algebrica, e reciprocamente ogni funzione algebrica sodisfa a queste condizioni.

Tralasceremo per ora lo sviluppo di questa teorica, il quale, come abbiamo osservato, è diretto a porre in luce le semplici relazioni espresse da operazioni di calcolo, perchè escludiamo presentemente lo studio dell'espressione di una funzione.

Per la stessa ragione non ci occupiamo qui di mostrare l'uso del nostro teorema come fondamento di una teorica generale di queste relazioni, al che si richiede di provare che il concetto di una funzione di una variabile complessa, su cui qui ci siamo fondati, coincide pienamente con una relazione esprimibile per operazioni di calcolo ([1]).

21.

Per rischiarare però il nostro teorema generale gioverà un esempio della sua applicazione.

L'applicazione dello stesso indicata nel precedente articolo, sebbene tenuta di mira nella dimostrazione, è però soltanto un' applicazione particolare. Poichè se la relazione è data da un numero finito delle operazioni di cal-

---

([1]) Con ciò intenderemo ogni relazione esprimibile mediante un numero finito o infinito delle quattro più semplici operazioni di calcolo, addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Distinguiamo operazioni di calcolo da operazioni numeriche, in quanto che in quelle non si ha riguardo alle commensurabilità delle quantità sulle quali il calcolo deve effettuarsi.

colo ivi considerate come operazioni elementari, la funzione contiene soltanto un numero finito di parametri, la qual cosa per la forma di un sistema di condizioni ai limiti, e nelle discontinuità fra loro indipendenti, porta la conseguenza che tra loro non si possono presentare condizioni che si possano dare arbitrariamente in ogni punto di una linea. Per il nostro attuale scopo sembra perciò più conveniente, di scegliere un altro esempio nel quale la funzione della variabile complessa dipenda da una funzione arbitraria.

Per facilitare l'intelligenza ci varremo della rappresentazione geometrica usata alla fine dell' Art. 18. Si presenta allora come uno studio della possibilità di fare una rappresentazione di una data superficie, che sia connessa, e simile all'obiettiva nelle minime parti, e di forma data, dove perciò, nel linguaggio usato di sopra, per ogni punto del contorno della imagine è dato un luogo geometrico, e per tutti i medesimi sono dati (Art. 5) il senso del contorno e i punti di giramento. Ci limiteremo alla risoluzione di questo problema nel caso, in cui a ogni punto di una superficie corrisponde soltanto un punto dell'altra, e le superficie sono semplicemente connesse, nel qual caso la risoluzione è contenuta nel seguente

Teorema. *Due date superficie piane semplicemente connesse possono sempre riferirsi una all'altra in modo che a ogni punto dell'una corrisponda un punto dell'altra che si muove con quello con continuità e che hanno simili le loro parti minime corrispondenti; e può a un punto interno e a un punto del contorno esser dato comunque il corrispondente; ma questo è sufficiente perchè la relazione sia determinata per tutti i punti.*

Se due superficie T e R sono riferite a una terza S, in modo che si trovi similitudine tra le loro parti minime corrispondenti, ne risulta una relazione tra T e R, per la quale la stessa similitudine ha luogo. Il problema di riferire due superficie qualunque una all'altra in modo che tra le minime parti corrispondenti si trovi similitudine è ridotto perciò a riportare una superficie qualunque sopra un'altra data simile nelle minime parti. Quindi se nel piano B nel punto in cui $w = 0$ descriviamo un circolo K col raggio 1, per provare il nostro teorema, è necessario soltanto di dimostrare il seguente:

Una superficie qualunque T *semplicemente connessa che cuopre* A *può sempre esser riportata sopra a un circolo* K *continuamente connesso, e simile nelle minime parti, e soltanto in un modo, in guisa che al centro corrisponda un punto qualunque dato interno* O_0, *e a un punto qualunque della circonferenza un punto qualunque* O' *del contorno della superficie* T.

Per indicare a quale dei due punti O_0 ed O', appartengono il valore di z e il punto Q, diamo a queste lettere i medesimi indici, e descriviamo in T intorno a O_0 come centro un circolo qualunque Θ, che non si estenda sino

al contorno, e non contenga punti di giramento. Se prendiamo le coordinate polari, ponendo $z-z_0=re^{\varphi i}$, avremo

$$\log(z-z_0)=\log r+\varphi i.$$

La parte reale varia perciò con continuità in tutto il circolo, fuor che nel punto O_0, dove diviene infinita. Ma la parte imaginaria, se si scelgono per tutto tra i valori possibili di φ i minimi positivi, lungo il raggio dove $z-z_0$ è reale e positivo, prenderà da una parte il valore zero, dall' altra il valore 2π, ma in tutte le altre parti varierà con continuità. Evidentemente si può prendere invece di questo raggio un'altra linea qualunque l condotta dal centro alla periferia, in guisa che $\log(z-z_0)$, coll'oltrepassare del punto O dalla parte negativa (cioè, dove secondo l'Art. 8, p è negativo) alla positiva di questa linea, riceva una diminuzione improvvisa di $2\pi i$, ma del resto vari colla posizione di quello con continuità in tutto il circolo. Ora se noi prendiamo la funzione complessa di x e di y, $\alpha+\beta i$, eguale a $\log(z-z_0)$ nel circolo Θ, e fuori dello stesso, prolungando l comunque fino al contorno, in modo che

1) nella periferia di Θ sia $=\log(z-z_0)$, nel contorno di T soltanto imaginaria,
2) nel passare dalla parte negativa alla positiva di l vari di $-2\pi i$, ma per ogni infinitamente piccolo spostamento, vari di un infinitamente piccolo dello stesso ordine,

ciò che è sempre possibile; l'integrale

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right\}dT$$

esteso al circolo Θ sarà nullo, esteso a tutte le altre parti avrà un valore finito, quindi $\alpha+\beta i$, aggiungendole una funzione di x e y continua e determinata in tutto fuor che in una costante imaginaria, la quale funzione è soltanto imaginaria nel contorno, può esser convertita in una funzione di z, $t=m+ni$. La parte reale m di questa funzione sarà nulla nel contorno, eguale a $-\infty$ nel punto O_0, e varierà con continuità in ogni altra parte di T. Per ogni valore di m compreso tra 0 e $-\infty$, T rimane perciò divisa da una linea in cui $m=a$, in parti nelle quali $m<a$ e che contengono O_0 nell'interno, e in parti dove $m>a$, e il contorno delle quali è formato in parte dal contorno di T, in parte dalla linea dove $m=a$. L'ordine della connessione della superficie da questa divisione o non è mutato o è abbassato, perciò la superficie si spezza, poichè questo ordine è $=-1$, o in due pezzi dell'ordine di connessione 0 e -1, o in più di due pezzi. Ma questo ultimo caso è impossibile, perchè allora almeno in uno di questi pezzi m

dovrebbe essere per tutto finita e continua e costante in tutte le parti del contorno, quindi o dovrebbe avere in una parte di superficie, un valore costante, o in qualche luogo - in un punto o lungo una linea - un valore massimo o minimo contro ciò che è stabilito nell'Art. 11, III. I punti, nei quali m è costante formano dunque linee chiuse per tutto semplici, le quali racchiudono il punto O_0 ed m verso l'interno necessariamente decresce, onde segue, che, per un giro positivo (dove, secondo l'Art. 8, s cresce) n, in quanto è continua, continuamente cresce e quindi soltanto nell'oltrepassare dalla parte negativa alla positiva della linea l riceve un'improvvisa variazione di -2π (1), diviene eguale a ogni valore compreso tra 0 e 2π una sola volta se astragghiamo da un multiplo di 2π. Se ora poniamo $e^t = w$, e^m ed n divengono coordinate polari del punto Q rapporto al centro del circolo K. L'insieme dei punti Q forma allora evidentemente una superficie S distesa per tutto semplicemente sopra K; il punto Q_0 della stessa cade nel centro del circolo; il punto Q' poi può per mezzo della costante da aggiungersi ad n esser portata sopra un punto qualunque dato della circonferenza, come volevamo dimostrare.

Nel caso, in cui O_0 è un punto di giramento di $(n-1)^{esimo}$ ordine, si arriva allo scopo, sostituendo $\frac{1}{n}\log(z-z_0)$ a $\log(z-z_0)$, in un modo simile, e che si può facilmente completare colle considerazioni dell'Art. 14.

22.

Ometteremo qui il completo sviluppo delle ricerche del precedente articolo nel caso più generale, in cui a un punto di una superficie debbono corrispondere più punti dell'altra, e non è supposta per le medesime una semplice connessione, poichè prese da un punto di vista geometrico, tutte le nostre ricerche avrebbero potuto condursi in una forma più generale. Cioè la limitazione, a superficie piane semplici, esclusi punti separati, non è essenziale per le stesse; e il problema di riportare una data superficie qualunque sopra un'altra qualunque data, in guisa che l'imagine risulti simile all'obiettiva nelle minime parti, può trattarsi in modo del tutto simile. Ci contentiamo qui di riferirci alle due Memorie di Gauss citate all'Art. 3 e alle *Disquis. gen. circa sup.* Art. 13.

---

(1) Poichè la linea l va da un punto interno al pezzo di superficie che si considera, a un punto esterno alla medesima, se essa ne incontra più volte il contorno deve andare una volta di più dall'interno all'esterno, che dall'esterno all'interno e la somma delle variazioni improvvise di n in un giro sarà perciò sempre $= -2\pi$.

XXII.

LA TEORICA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE [1]

(Dagli *Annali di matematica pura ed applicata*, serie I, t. III, pp. 65-159, 298-310; t. IV, pp. 26-45, 57-70, 297-336, Roma, 1859, 1860).

INTRODUZIONE

1.

Una variabile complessa $w = u + iv$ dicesi funzione di un'altra variabile complessa $z = x + iy$, quando ad ogni sistema di valori di x e di y corrispondono uno o più sistemi di valori determinati di u e di v.

Quando ad ogni sistema di valori di x e di y corrisponde un solo determinato sistema di valori di u e v, la funzione dicesi *monodroma*.

Chiameremo *indice* di una variabile complessa $z = x + iy$, il punto di coordinate x e y nel piano in cui intendiamo rappresentate nel modo ordinario le quantità complesse.

Se la funzione w è continua, quando l'indice di z percorre una linea continua, anche l'indice di w percorrerà una linea continua.

La funzione w sarà monodroma, se prenderà lo stesso valore per un valore di z che abbia l'indice in un punto Z, qualunque sia la linea percorsa per arrivarvi.

La derivata di w rapporto a z

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\,\frac{dy}{dx}},$$

ha in generale un valore dipendente da $\frac{dy}{dx}$, ossia dipendente dalla direzione in cui si muove l'indice di z quando z aumenta di dz. Affinchè abbia un sol

---

[1] Questa teorica è stata esposta nelle lezioni di Analisi superiore date nella r. Università di Pisa nell'anno scolastico 1859-60.

valore determinato e indipendente dalla direzione dell'aumento di z, è necessario e sufficiente che sia

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; \qquad\qquad (2) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ (^1).$$

Le funzioni che godono questa proprietà, e quindi sodisfano alle equazioni (1) e (2), da Cauchy sono state chiamate *monogene.*

Dicesi funzione *analitica* di una variabile complessa z una funzione, i cui valori si possono esprimere tutti mediante un numero finito o infinito di operazioni elementari di calcolo effettuate sopra il valore di z. Le funzioni analitiche sono tutte *monogene.*

Chiameremo funzioni *intere* quelle funzioni analitiche i cui valori possono esprimersi mediante una serie di potenze positive e intere della variabile z, convergente per qualunque valore reale o complesso di z. Chiameremo funzioni *fratte* quelle funzioni analitiche i cui valori si possono esprimere mediante il rapporto di due funzioni intere.

Diremo *residuo integrale* di una funzione w rispetto a una linea il valore dell'integrale $\int w\, dz$, quando s'intenda effettuata l'integrazione facendo percorrere all'indice di z tutta la linea.

2.

I principî fondamentali della teorica delle funzioni monogene e monodrome saranno il punto di partenza, dal quale saremo condotti naturalmente alle funzioni che fanno il soggetto principale di questa monografia.

Teorema 1. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma w, rispetto a una linea chiusa* C, *è sempre eguale a zero, quando w non diviene infinita o discontinua in alcun punto compreso nell'area della linea* C.

Siano o, o', o'', o''' i punti di contatto delle quattro tangenti alla curva C che la limitano inferiormente, a destra, superiormente e a sinistra, e poniamo

$$oo' = a\,, \quad oo'o'' = b\,, \quad oo'o''o''' = c\,, \quad oo'o''o'''o = d.$$

Avremo per il residuo integrale di w rispetto alla linea C

$$(1) \qquad \int w dz = \int (u + iv)\,(dx + idy)$$
$$= \int_0^d \left(u \frac{dx}{ds} - v \frac{dy}{ds}\right) ds + i \int_0^d \left(v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds}\right) ds\,.$$

---

(1) Vedi Riemann, *Fondamenti di una teórica* ecc., negli Annali di matematica, ser. I, t. II, p. 291 (od anche p. 193 di questo volume).

Prendiamo ora l'integrale

$$\iint\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy$$

esteso a tutta l'area della linea C. Se v si mantiene per tutto finita e continua nell'interno di C, avremo

$$\iint\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy=\int_0^b v\frac{dy}{ds}\,ds-\int_d^b v\frac{dy}{ds}\,ds=\int_0^d v\frac{dy}{ds}\,ds\,,$$

$$\iint\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy=\int_e^a u\frac{dx}{ds}\,ds-\int_c^{d+a} u\frac{dx}{ds}\,ds=-\int_a^{d+a} u\frac{dx}{ds}\,ds=-\int_0^d u\frac{dx}{ds}\,ds;$$

e quindi

$$\iint\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_0^d\left(v\frac{dy}{ds}-u\frac{dx}{ds}\right)ds\,. \tag{2}$$

Analogamente si dimostra l'identità

$$\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_0^d\left(v\frac{dx}{ds}+u\frac{dy}{ds}\right)ds\,, \tag{3}$$

quando si estenda egualmente l'integrale doppio.

Le formole (2) e (3) non presuppongono che w sia funzione analitica di z, ma non valgono altro che quando w si mantiene finita e continua in tutto lo spazio dell'integrazioni effettuate per trasformare gl'integrali doppi in integrali semplici, cioè in tutta l'area C.

Ora se la funzione w è monogena, gli elementi degl'integrali doppî (2) e (3) sono nulli durante tutta l'integrazione. Quindi sono nulli questi medesimi integrali, e gl'integrali semplici che sono eguali a loro. Dunque è nullo il secondo membro dell'equazione (1) e quindi il residuo integrale, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *I residui integrali di una funzione monogena e monodroma w, rispetto a due linee aperte Z_1MZ_2, $Z_1M'Z_2$ che terminano ai medesimi punti Z_1 e Z_2, sono eguali se in tutti i punti dell'area compresa dalle due linee la funzione w è finita e continua.*

Infatti, per il teorema precedente, abbiamo

$$\int w\,dz+\int^1 w dz=0\,,$$

quando il primo integrale si estenda alla linea Z_1MZ_2 e il secondo alla linea $Z_2M'Z_1$. Ma questo ultimo è eguale all'integrale esteso a $Z_1M'Z_2$, preso negativamente: onde avremo

$$\int w\,dz=\int_1 w dz\,,$$

quando il primo integrale si estenda a tutta la linea Z_1MZ_2, e il secondo a $Z_1M'Z_2$, come volevamo dimostrare.

Teorema 3. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma w, rispetto a una linea chiusa* C, *che contiene nel suo interno un sol punto* D, *nel quale la funzione w cessa di essere finita e continua, è eguale al residuo integrale di w rispetto a una linea c, piccola quanto si vuole, descritta intorno al punto* D.

Infatti, se uniamo con una linea s un punto di C con un punto di c, la linea s più la linea C percorsa da destra a sinistra, più la linea s percorsa in senso opposto, più la linea c percorsa da sinistra a destra formano un contorno chiuso nell'interno del quale w è per tutto finita e continua, e quindi la somma dei due residui integrali di w rispetto ad s presi in senso opposto, più il residuo integrale rispetto a C preso da destra a sinistra, più il residuo integrale rispetto a c da sinistra a destra, sarà eguale a zero. Essendo nulla la somma de' residui integrali rispetto ad s presi in senso opposto, e il residuo integrale rispetto a c preso da sinistra a destra essendo eguale al valore del residuo integrale rispetto a c da destra a sinistra preso con segno contrario, ne risulta che i residui integrali rispetto a C e a c presi nello stesso senso sono eguali, come volevamo dimostrare.

È facile a vedersi che se nell'interno di una linea chiusa C vi sono più punti d, d', d'' ..., nei quali w cessa di essere finita e continua, il residuo integrale di w rispetto a C sarà eguale alla somma dei residui integrali di w rispetto alle linee chiuse c, c', c'' ..., piccole quanto si vuole, descritte rispettivamente intorno ai punti d, d', d'' ....

Teorema 4. *I valori di una funzione monogena e monodroma w possono ottenersi mediante una medesima serie di potenze positive e intere della variabile z, per tutti i valori di z, che hanno gl'indici compresi in un circolo* C *nell'interno del quale la funzione w non cessa mai di essere finita e continua.*

Sia il centro di questo circolo il punto A indice della quantità complessa a, e Z_0 sia l'indice di $a + z_0$. Indichiamo con w_0 il valore di w nel punto Z_0, cioè per il valore $a + z_0$ della variabile z.

La funzione

$$\frac{w - w_0}{z - a - z_0}$$

sarà monogena, monodroma, finita e continua in tutti i punti del circolo. Poichè tali sono il numeratore e il denominatore, e il denominatore non diviene nullo altro che nel punto Z_0, nel quale diviene nullo anche il numeratore, e il valore della funzione in questo punto è evidentemente eguale alla deri-

vata di w rapporto a z, la quale è unica e determinata perchè la funzione è monogena, è finita perchè la funzione è continua in tutti i punti del circolo.

Dunque per il teorema 1, avremo

$$\int \frac{w - w_0}{z - a - z_0} dz = 0,$$

quando si estenda questo integrale a tutta la circonferenza C. Quindi

$$\int \frac{w}{z - a - z_0} dz = w_0 \int \frac{dz}{z - a - z_0}.$$

Ora la funzione $\frac{1}{z - a - z_0}$ è monogena, monodroma, finita e continua in tutti i punti del circolo C, fuori che nel punto Z_0, dove diviene infinita; dunque per il teorema 3, l'integrale del secondo membro non muta valore se invece di estenderlo a tutta la circonferenza C, si estende a una circonferenza c descritta con raggio r piccolo quanto si vuole intorno a Z_0. Onde avremo, indicando con φ l'angolo variabile del raggio r coll'asse polare,

$$z - a - z_0 = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = re^{\varphi i}, \quad dz = ire^{\varphi i} d\varphi;$$

$$\int \frac{dz}{z - a - z_0} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \tag{2}$$

Sostituendo il valore (2) nell'equazione (1), abbiamo

$$w_0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{wdz}{z - a - z_0}, \tag{3}$$

la quale è vera per qualunque punto Z_0 interno al circolo C.

L'integrale che comparisce nella equazione (3) deve estendersi a tutta la circonferenza C, sopra la quale si ha evidentemente

$$\text{mod.}(z - a) > \text{mod.}\, z_0;$$

onde abbiamo in serie convergente

$$\frac{1}{z - a - z_0} = \frac{1}{z - a} + \frac{z_0}{(z - a)^2} + \frac{z_0^2}{(z - a)^3} + \frac{z_0^3}{(z - a)^4} + \cdots,$$

e quindi

$$w_0 = \frac{1}{2\pi i}\left(\int \frac{wdz}{z - a} + z_0 \int \frac{wdz}{(z - a)^2} + z_0^2 \int \frac{wdz}{(z - a)^3} + \cdots\right).$$

Indicando con y la quantità $a + z_0$, che ha per indice Z_0, e con w semplicemente il valore corrispondente di w, finchè Z_0 sarà nell'interno di C, avremo

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{wdz}{z - a} + \frac{y - a}{2\pi i} \int \frac{wdz}{(z - a)^2} + \frac{(y - a)^2}{2\pi i} \int \frac{wdz}{(z - a)^3} + \cdots,$$

e ponendo

$$z - a = re^{\varphi i},$$

$$(4)\ w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\, d\varphi + \frac{y-a}{2\pi r}\int_0^{2\pi} w\, e^{-\varphi i}\, d\varphi + \frac{(y-a)^2}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} w\, e^{-2\varphi i}\, d\varphi + \cdots$$
$$+ \frac{(y-a)^n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w e^{-n\varphi i}\, d\varphi + \cdots.$$

Questa serie è convergente per tutti i valori di y, per i quali mod. $(y-a) < r$. Infatti, se diamo a w la forma $\varrho e^{\theta i}$, avremo

$$\int_0^{2\pi} w e^{-n\varphi i}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \varrho \cos(\theta - n\varphi)\, d\varphi + i\int_0^{2\pi} \varrho \operatorname{sen}(\theta - n\varphi)\, d\varphi\ ,$$

ed ambedue gl'integrali del secondo membro sono minori dell' integrale $\int_0^{2\pi} \varrho d\varphi$ che è eguale a una quantità finita M. Quindi

$$\text{mod.} \int_0^{2\pi} w e^{-n\varphi i}\, d\varphi < \mathrm{M}\sqrt{2},$$

qualunque sia n. Quindi la serie (4) sarà convergente quando sarà convergente la serie

$$1 + \frac{y-a}{r} + \frac{(y-a)^2}{r^2} + \cdots + \frac{(y-a)^n}{r^n} + \cdots,$$

cioè quando mod. $(y-a) < r$.

Osservando che la derivata n^{esima} di una funzione monogena di una variabile y, espressa da una serie convergente S, è eguale alla somma di una serie anch'essa convergente formata colle derivate n^{esime} dei termini della serie S, abbiamo

$$\frac{d^n w}{dy^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w e^{-n\varphi i}\, d\varphi + (y-a)\gamma,$$

dove γ è una funzione intera di y; e quindi indicando con $\left(\frac{d^n w}{dy^n}\right)_a$ il valore di $\frac{d^n w}{dy^n}$ per $y = a$, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w e^{-n\varphi i}\, d\varphi = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n w}{dy^n}\right)_a$$

e la serie (4) diviene

$$(5)\ w = w_a + (y-a)\left(\frac{dw}{dy}\right)_a + \frac{(y-a)^2}{1.2}\left(\frac{d^2 w}{dy^2}\right)_a + \cdots + \frac{(y-a)^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n w}{dy^n}\right)_a + \cdots$$

3.

Dal teorema 4 del numero precedente si deduce immediatamente, che tutte le funzioni le quali si mantengono monogene, monodrome, finite e continue per qualunque valore finito di una variabile complessa z sono funzioni analitiche intere di z, alle quali possono estendersi facilmente i teoremi fondamentali relativi alle funzioni razionali intere.

Teorema 1. *Una funzione intera w diviene sempre infinita per $z = \infty$.*

Una funzione intera w è sempre monogena, monodroma, finita e continua per tutti i valori finiti della variabile, quindi potrà porsi sotto la forma data dalla formula (4) del n. 2,

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w d\varphi + \frac{z-a}{2\pi r}\int_0^{2\pi} w e^{-\varphi i} d\varphi + \frac{(z-a)^2}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} w e^{-2\varphi i} d\varphi + \cdots,$$

dove r è il raggio di un circolo che ha il centro nel punto indice di a, di grandezza arbitraria. Prendiamo questo raggio infinito; se w non divenisse per questo valore anche esso eguale a infinito, gl'integrali avrebbero tutti un valore finito, e quindi tutti i termini della serie, eccettuato il primo, diverrebbero eguali a zero, e avremmo

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\, d\varphi = \text{costante}.$$

Dunque una funzione intera che non diviene infinita per $z = \infty$, non è una funzione di z, ma una costante.

Se diciamo *radice* di una funzione intera di z, un valore complesso di z per cui questa funzione si annulla, avremo il seguente

Teorema 2. *Una funzione intera w ha sempre almeno una radice.*

Infatti se la funzione intera w non avesse alcuna radice finita, la funzione monogena e monodroma $\frac{1}{w}$ sarebbe finita e continua per tutti i valori finiti della variabile z; quindi sarebbe una funzione intera, e per il teorema precedente diverrebbe infinita per $z = \infty$, e quindi w si annullerebbe per $z = \infty$. Dunque una funzione intera o ha almeno una radice finita, o una infinita.

Teorema 3. *Ogni funzione intera, che non ha radici finite, è della forma e^w, essendo w una funzione intera.*

Infatti, se W è una funzione intera che non ha radici finite, logW sarà evidentemente una funzione monogena, finita e continua per ogni valore complesso finito della variabile z. Dimostriamo che sarà anche monodroma. Perciò

basterà provare che tanto quando l'indice di z va da un punto z_1 a un altro z_2 per un cammino finito z_1mz_2, quanto quando va da z_1 a z_2 per un altro cammino qualunque differente z_1nz_2, pure finito, la funzione W prende sempre lo stesso valore in z_2. Poniamo $W=\varrho e^{\theta i}$, e indichiamo ordinatamente con Z_1, M, Z_2, N gl'indici dei valori di W corrispondenti ai valori di z, che hanno per indici i punti z_1, m, z_2, n. Gl'indici dei valori di W che corrispondono ai valori di z che hanno gl'indici nei punti dell'area finita $z_1\,m\,z_2\,n\,z_1$, si troveranno in un'area finita che non conterrà il polo, perchè ϱ non si annulla per nessuno di questi valori di z. Dunque la linea $Z_1\,M\,Z_2\,N\,Z_1$ sarà una linea chiusa che non conterrà nel suo interno il polo, e tanto quando l'indice di W va da Z_1 a Z_2 per la linea $Z_1\,MZ_2$, quanto quando va da Z_1 a Z_2 per la linea $Z_1\,NZ_2$, l'angolo θ prenderà nel punto Z_2 lo stesso valore, quindi $\log W=\log\varrho+\theta i$ prenderà lo stesso valore qualunque sia il cammino che percorre l'indice della variabile z per andare da z_1 a z_2. Dunque $\log W$ è una funzione monodroma, e quindi essendo anche monogena, finita e continua per ogni valore finito di z, sarà una funzione intera w, e avremo $\log W=w$, e quindi $W=e^w$, come volevamo dimostrare.

Diremo che una funzione intera w è divisibile per un'altra funzione intera w_1, quando esiste una funzione intera q, il cui prodotto per w_1 è eguale a w. La funzione q si dirà *quoziente* di w diviso per w_1, w_1 si dirà divisore o fattore di w.

Teorema 4. *Se a è radice della funzione intera w, questa funzione è divisibile per* $1-\frac{z}{a}$.

La formula (5) del numero precedente quando a è radice di w, e quindi $w_a=0$, dà

$$w=(z-a)\left[\left(\frac{dw}{dz}\right)_a+\frac{z-a}{1.2}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_a+\frac{(z-a)^2}{1.2.3}\left(\frac{d^3w}{dz^3}\right)_a+\cdots\right].$$

La serie tra parentesi è convergente per ogni valore finito di z, quindi è una funzione intera di z; dunque w è divisibile per $z-a$, e anche per $1-\frac{z}{a}$.

Se a oltre ad essere radice di w fosse radice anche delle funzioni intere

$$\frac{dw}{dz},\ \frac{d^2w}{dz^2},\ldots\ \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}},$$

w sarebbe divisibile per $\left(1-\frac{z}{a}\right)^n$, e si direbbe che a è n volte radice di z.

Teorema 5. *Una funzione intera w, che ha un numero finito di radici finite, e non ha radici infinite, è una funzione razionale intera.*

Siano α_1, α_2, α_3, ... α_n le sole radici di w: avremo

$$w=\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)w_1$$

e w_1 non si annullerà per nessun valore finito o infinito di z, e sarà una funzione intera; quindi per il teorema 2 sarà una costante, e w una funzione razionale intera.

Teorema 6. *Due funzioni intere w_1, w_2 che hanno le stesse radici non possono differire che per un fattore della forma e^w, dove w è funzione intera.*

Infatti, indicando con q il rapporto $\frac{w_1}{w_2}$, avremo $w_1=w_2q$, e q non avrà radici finite: dunque sarà della forma e^w, e w funzione intera.

4.

Da ciò che abbiamo dimostrato nel numero precedente si rileva, che le funzioni intere che non risultano dal prodotto di una funzione razionale per un esponenziale e^w, dove w è funzione intera, hanno tutte un numero infinito di radici. Dimostriamo che gl' indici di queste radici devono sodisfare alla condizione di non formare una linea continua in nessuna parte del piano.

Lemma 1. *Se w è una funzione intera di $z=x+iy$, riguardandola come funzione di p e di s, essendo p la lunghezza della normale a una data linea qualunque* S, *condotta dal punto di coordinate x e y, ed s la lunghezza dell'arco di questa linea contata a partire da un punto fisso fino al punto dove la normale incontra la linea* S, *avremo*

$$\frac{\partial w}{\partial p}+i\frac{\partial w}{\partial s}=0.$$

Infatti, avremo

$$\frac{\partial w}{\partial p}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+i\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p},$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+i\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

ed essendo

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{\partial y}{\partial s},\qquad \frac{\partial y}{\partial p}=-\frac{\partial x}{\partial s},$$

sarà anche

$$\frac{\partial w}{\partial p}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}+i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}-i\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}:$$

onde

$$\frac{\partial w}{\partial p}+i\frac{\partial w}{\partial s}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}+i\frac{\partial x}{\partial s}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}-i\frac{\partial y}{\partial s}\right).$$

Ma la funzione w è monogena, e quindi

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\,.$$

Dunque sarà

$$\frac{\partial w}{\partial p}+i\frac{\partial w}{\partial s}=0\,,$$

come volevamo dimostrare.

Lemma 2. *Se w e w' sono due funzioni intere, avremo*

$$\int\left(w\frac{\partial w'}{\partial p}-w'\frac{\partial w}{\partial p}\right)ds=0\,,$$

quando si estenda l'integrale a tutto il contorno di una linea chiusa S, *e p ed s abbiano il significato del lemma precedente.*

Ponendo $w=u+iv$, $w'=u'+iv'$, abbiamo

$$\int\left(w\frac{\partial w'}{\partial p}-w'\frac{\partial w}{\partial p}\right)ds=\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial p}-u'\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds-\int\left(v\frac{\partial v'}{\partial p}-v'\frac{\partial v}{\partial p}\right)ds$$
$$+i\int\left(u\frac{\partial v'}{\partial p}-v'\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds+i\int\left(v\frac{\partial u'}{\partial p}-u'\frac{\partial v}{\partial p}\right)ds\,.$$

Ora questi integrali sono tutti nulli quando siano estesi a tutto il contorno della linea S. Lo dimostreremo per uno soltanto, per gli altri valendo la stessa dimostrazione. Abbiamo

$$\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial p}-u'\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds=\int\left[\left(u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial s}-\left(u\frac{\partial u'}{\partial y}-u'\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s}\right]ds$$
$$=\iint\left(\frac{\partial\left(u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(u\frac{\partial u'}{\partial y}-u'\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}\right)dx\,dy$$
$$=\iint\left[u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)-u'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]dx\,dy,$$

estendendo gl'integrali semplici a tutto il contorno, e i doppî a tutta l'area di S. Ma w e w' essendo monogene, si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{\partial v'}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}=0;$$

onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}=0\,.$$

Quindi l'ultimo integrale doppio ha nulli tutti gli elementi, ed è eguale a zero. Dunque

$$\int\left(w\frac{\partial w'}{\partial p}-w'\frac{\partial w}{\partial p}\right)ds=0\;,$$

come volevamo dimostrare.

Teorema. *Gl'indici delle radici di una funzione intera non possono formare una linea continua.*

Supponiamo che tutti i punti di una linea continua S siano indici di radici di w. Prendiamo di questa linea una porzione arbitraria M_1NM_2. Descriviamo una circonferenza C che passi per M_1 e M_2, e abbia il centro in un punto O, chiamiamo c l'arco di questo circolo che termina in M_1 e M_2, e che racchiude colla linea M_1NM_2 un'area che non contiene il centro O. Siano x_0 e y_0 le coordinate del centro O, e poniamo

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,.$$

Le funzioni w e $\log r$ sono monogene, monodrome, finite e continue nell'area compresa da M_1NM_2 e l'arco c, quindi in questo intervallo vale per le medesime il lemma 2, e abbiamo

$$\int\left(w\frac{\partial \log r}{\partial p}-\log r\frac{\partial w}{\partial p}\right)ds=0\,,$$

avendo p ed s, rispetto alla linea formata da M_1NM_2 e da c, il significato che loro abbiamo dato nel lemma 1 ed estendendo l'integrale a tutta la linea M_1NM_2 e all'arco c.

Ora la parte dell'integrale relativa alla linea M_1NM_2 è nulla, perchè ivi è $w=0$, e $\frac{\partial w}{\partial p}$, che per il lemma 1 è eguale a $-i\frac{\partial w}{\partial s}$, è anche essa eguale a zero, perchè w si mantiene costante sopra questa linea.

La parte d'integrale relativa all'arco di circolo c, si trasforma nel modo seguente. Se indichiamo con R il raggio del circolo C, quando l'estremità mobile di s è sopra l'arco c, avremo

$$r=\mathrm{R}-p\,,$$

e quindi

$$\frac{\partial r}{\partial p}=-1\,,$$

onde

$$\frac{\partial \log r}{\partial p} = -\frac{1}{r},$$

e inoltre

$$ds = \mathrm{R}\, d\varphi,$$

onde l'integrale diverrà

$$-\int_0^c w\, d\varphi + i \log \mathrm{R} \int_0^c \frac{\partial w}{\partial s}\, ds = 0 .$$

Il secondo di questi integrali è nullo, perchè nei limiti M_1 e M_2 le parti reale e immaginaria di w sono nulle. Dunque il primo integrale sarà anche esso eguale a zero, e quindi

$$\int_0^c u\, d\varphi = 0 , \quad \int_0^c v\, d\varphi = 0.$$

Dunque u e v non possono conservare lo stesso segno sopra un arco c, piccolo quanto si vuole, che passi per due punti M_1 e M_2 della linea S. Se u e v non fossero nulli nella vicinanza di $M_1 N M_2$ dovrebbero dunque variare di segno a intervalli minori di una quantità qualunque data, e quindi non sarebbero continue, e w non sarebbe una funzione intera. Dunque se w è intera e si annulla sopra una linea continua, dovrà annullarsi anche nei punti esterni e prossimi a questa linea, e quindi si potrà condurre un'altra linea vicinissima a questa, e quindi un' altra, e così indefinitamente, sopra tutte le quali si annulli. Dunque si annullerà in tutto il piano, e non sarà una funzione di z, ma sarà zero.

Se gl' indici delle radici non possono formare una continuità, e devono essere in numero infinito quando la funzione non è il prodotto di una funzione razionale per una funzione intera che non ha radici altro che infinite, ne segue che le radici di una funzione intera non razionale non potranno esser mai contenute tutte in una porzione finita del piano.

5.

Il prodotto $\Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$ esteso agli infiniti valori di α che sono radici di una funzione intera W, se è convergente per qualunque valore finito di z, è una funzione intera di z [1], che ha per radici tutte e sole le quantità α;

---

[1] Vedi Briot e Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques* ecc., p. 135.

e in questo caso la funzione W può porsi sotto la forma

$$W = e^{w}\,\Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$$

essendo w una funzione intera, come risulta immediatamente dal teorema 6 del n. 3.

Per istudiare questa decomposizione delle funzioni intere, della quale è un caso particolare la decomposizione delle funzioni razionali intere in fattori di primo grado, è necessario riferirsi alle condizioni di convergenza dei prodotti infiniti.

Qualunque sia il valore finito di z, il numero delle radici α di una funzione intera W che hanno il modulo minore o eguale a quello di z diviso per un numero finito qualunque ε, sarà sempre finito per il teorema del n. 4. Quindi sarà finito il prodotto $\Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$ esteso a tutti i valori di α il cui modulo è minore o eguale a quello di z diviso per ε, e perchè sia convergente il prodotto totale basterà che sia tale il prodotto esteso a tutti i valori di α per i quali è $\varepsilon \bmod \alpha > \bmod z$, che indicheremo con $\Pi'\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$.

Ora, quando $\bmod z < \bmod \alpha$, abbiamo in serie convergente

$$\log\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) = -\frac{z}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha^2} - \frac{z^3}{\alpha^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{z}{\alpha} + \frac{1}{5}\frac{z^2}{\alpha^2} + \cdots\right).$$

Ma poichè il modulo di una somma è sempre minore della somma dei moduli, sarà

$$\bmod\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{z}{\alpha} + \frac{1}{5}\frac{z^2}{\alpha^2} + \cdots\right) < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{\bmod z}{\bmod \alpha} + \frac{1}{5}\frac{(\bmod z)^2}{(\bmod \alpha)^2} + \cdots$$
$$+ \cdots < \frac{1}{3}\left[1 + \frac{\bmod z}{\bmod \alpha} + \left(\frac{\bmod z}{\bmod \alpha}\right)^2 + \cdots\right];$$

ed essendo $\bmod z < \varepsilon \bmod \alpha$, se prendiamo $\varepsilon = \frac{2}{3}$, avremo

$$\frac{1}{3}\left(1 + \frac{\bmod z}{\bmod \alpha} + \frac{(\bmod z)^2}{(\bmod \alpha)^2} + \cdots\right) < 1,$$

e indicando con μ_α un numero complesso il cui modulo sia minore dell'unità, avremo

$$\log\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) = -\frac{z}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha^2} - \frac{z^3 \mu_\alpha}{\alpha^3},$$

e quindi

$$\log \Pi'\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)=-z\sum\frac{1}{\alpha}-\frac{z^2}{2}\sum\frac{1}{\alpha^2}-\frac{z^3}{\alpha^3}\sum\frac{\mu_\alpha}{\alpha^3}.$$

Se le serie $\sum\frac{1}{\alpha}$, $\sum\frac{1}{\alpha^2}$, $\sum\frac{1}{\alpha^3}$ sono convergenti, sarà convergente anche il prodotto infinito. Se una di esse è divergente, il prodotto infinito avrà per limite zero, o infinito, e non esprimerà una funzione intera. Dunque la convergenza di tutte tre queste serie è la condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto infinito sia eguale a una funzione intera.

Ora, relativamente a queste serie, abbiamo i seguenti teoremi.

Teorema 1. *Se gl'indici delle quantità α sono tutti sopra una stessa linea retta, e la distanza di due qualunque di essi è sempre maggiore di una quantità finita d, la serie $\sum\frac{1}{\alpha^\mu}$ sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini, quando è $\mu>1$.*

Infatti, se θ è l'angolo della retta sopra cui si trovano gl'indici di tutte le quantità α, avremo $\alpha=\beta e^{\theta i}$, essendo β una quantità reale, e quindi

$$\sum\frac{1}{\alpha^\mu}=e^{-\mu\theta i}\sum\frac{1}{\beta^\mu}.$$

Ora i numeri reali β si possono tutti porre sotto la forma $nd+\gamma$ essendo $\gamma<d$, e n un numero intero differente per due valori differenti di β, perchè la differenza di due valori di β è sempre maggiore di d; onde

$$\sum\frac{1}{\beta^\mu}=\sum\frac{1}{(nd+\gamma)^\mu};$$

ma

$$\sum\frac{1}{(nd+\gamma)^\mu}<\sum\frac{1}{n^\mu d^\mu},$$

ed essendo interi e differenti tutti i valori di n la serie $\sum\frac{1}{n^\mu d^\mu}$ sappiamo che è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini quando $\mu>1$, quindi sarà convergente anche la serie $\sum\frac{1}{\beta^\mu}$, e $\sum\frac{1}{\alpha^\mu}$ quando $\mu>1$, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *La serie $\sum\frac{1}{\alpha^\mu}$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini, quando $\mu>2$, se gl'indici di tutte le quantità α*

sono distribuiti nel piano in modo che la distanza di due qualunque di essi sia sempre maggiore di una quantità finita d.

Infatti, se conduciamo nel piano degl'indici due serie indefinite di parallele all'asse delle x e all'asse delle y, in modo che la distanza di due parallele successive sia $\frac{d}{\sqrt{2}}$, il piano rimarrà diviso in un numero infinito di quadrati, che avranno la diagonale di una lunghezza eguale a d, e quindi non potranno contenere nel loro interno più di un indice di una quantità α. Da questa costruzione risulta evidente che tutte le quantità α potranno porsi sotto la forma

$$[m+\varepsilon+(n+\eta)i]\frac{d}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

dove ε e η saranno quantità reali minori dell'unità, ed m e n numeri interi, e il sistema dei valori di m e n non potrà essere eguale per due differenti quantità α. Quindi i moduli delle quantità α saranno della forma

$$[(m+\varepsilon)^2+(n+\eta)^2]^{\frac{1}{2}}\frac{d}{\sqrt{2}},$$

e la serie de' moduli dei termini della serie $\sum\frac{1}{\alpha^\mu}$ sarà

$$\frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{d^\mu}\sum\sum\frac{1}{[(m+\varepsilon)^2+(n+\eta)^2]^{\frac{\mu}{2}}}, \tag{3}$$

dove la somma deve estendersi a un numero infinito di sistemi differenti di valori reali e interi di m e di n, ed ε e η possono variare da un termine all'altro, ma si mantengono sempre reali e compresi tra 0 e 1.

La serie

$$\sum\sum\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \tag{4}$$

moltiplicata per $\frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{d^\mu}$ ed estesa come la serie (3) ha i suoi termini rispettivamente non minori dei termini della serie (3), onde per dimostrare la convergenza della serie (3) basterà dimostrare la convergenza della serie (4).

Per giungere a questo, decomponiamo la serie (4) in serie parziali, in modo che in quelle di queste serie parziali, che indicheremo con (k_1, k_2), i valori di m e n siano tutti quelli che verificano le diseguaglianze

$$2^{k_1}\leq m\leq 2^{k_1+1},\qquad 2^{k_2}\leq n\leq 2^{k_2+1}. \tag{5}$$

Così avremo

$$(6)\qquad \sum\sum \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} = \sum_{k_1=0}^{k_1=\infty}\sum_{k_2=0}^{k_2=\infty} (k_1\,,k_2)\,.$$

È evidente che il numero dei termini di una serie parziale $(k_1\,,k_2)$ non potrà superare il numero

$$(2^{k_1+1}-2^{k_1})\,(2^{k_2+1}-2^{k_2}) = 2^{k_1+k_2} = 2^{2k}\,,$$

avendo posto $k_1+k_2=2k$.

Quanto al valore di questi medesimi termini, dalle diseguaglianze (5) si ricava

$$2^{2k_1}+2^{2k_2} \leq m^2+n^2 \leq 2^{2k_1+2}+2^{2k_2+2}\,.$$

Ma k essendo non maggiore di una delle due quantità k_1 e k_2, si avrà anche

$$2^{2k} \leq m^2+n^2\,,$$

e quindi

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \frac{1}{2^{k\mu}}\,.$$

Essendo tutti i termini di $(k_1\,,k_2)$ in numero non maggiore di 2^{2k}, e ciascuno non maggiore di $\frac{1}{2^{k\mu}}$, avremo

$$(k_1\,,k_2) \leq \frac{2^{2k}}{2^{k\mu}}\,,$$

ed essendo

$$\frac{2^{2k}}{2^{k\mu}} = \frac{1}{2^{2k(\frac{\mu}{2}-1)}} = \frac{1}{2^{k_1(\frac{\mu}{2}-1)}}\cdot\frac{1}{2^{k_2(\frac{\mu}{2}-1)}}\,,$$

sarà

$$(k_1\,,k_2) \leq \frac{1}{2^{k_1(\frac{\mu}{2}-1)}}\cdot\frac{1}{2^{k_2(\frac{\mu}{2}-1)}}\,.$$

Onde sostituendo nell'equazione (6), avremo

$$\sum\sum\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \sum_{k_1=0}^{k_1=\infty}\sum_{k_2=0}^{k_2=\infty}\frac{1}{2^{k_1(\frac{\mu}{2}-1)}}\cdot\frac{1}{2^{k_2(\frac{\mu}{2}-1)}}\,,$$

o anche

$$\sum\sum\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \left(\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{2^{k(\frac{\mu}{2}-1)}}\right)^2\,.$$

Ma se $\mu > 2$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^{k(\frac{\mu}{2}-1)}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\frac{\mu}{2}-1}}}.$$

Dunque, quando $\mu > 2$

$$\sum\sum \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \left(\frac{2^{\frac{\mu}{2}-1}}{2^{\frac{\mu}{2}-1}-1}\right)^2,$$

e quindi la serie (4) è convergente, e a più forte ragione la serie (3), e quindi, essendo convergente la serie dei moduli dei termini della serie $\sum \frac{1}{\alpha^\mu}$, questa serie sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, come volevamo dimostrare.

6.

Dato un sistema di quantità complesse in numero infinito, che non formano con i loro indici nessuna linea continua, si può sempre formare una funzione intera che abbia per radici tutte e sole queste quantità. Consideriamo separatamente due casi, secondo che gl'indici delle radici sono in linea retta; o distribuiti in tutto il piano.

Teorema 1. *Dato un numero infinito di quantità complesse α i cui indici siano in linea retta a distanze finite tra loro, e simmetricamente disposti rispetto a un punto* A *di questa retta, si può sempre formare un prodotto infinito con i fattori binomi $1-\frac{z}{\alpha}$, che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole queste quantità.*

Si può supporre che il punto A, rispetto al quale sono simmetricamente disposte le radici α, sia l'origine, perchè se fosse indice di una quantità β mutando z in $z-\beta$ il punto A diverrebbe l'origine.

Pertanto per ogni valore di α della forma $\varrho e^{\theta i}$, ve ne sarà un altro della forza $-\varrho e^{\theta i}$, quindi se nel prodotto infinito

$$z\Pi\left(1-\frac{z}{\alpha}\right) \tag{1}$$

i fattori che contengono questi valori si dispongono uno dopo l'altro, la serie $\sum \frac{1}{\alpha}$, in cui i valori di α terranno lo stesso ordine, avrà una somma nulla.

Essendo poi tutti gl'indici di α sopra la stessa retta, la serie $\sum \frac{1}{\alpha^2}$, $\sum \frac{1}{\alpha^3}$ sono sempre convergenti per il teorema 1 del numero precedente: dunque sarà convergente anche il prodotto (1), e darà una funzione intera, che avrà per radici tutte e sole le quantità α.

Teorema 2. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse α, che abbiano gl'indici a distanze finite tra loro, e disposti comunque sopra una retta, si può sempre formare un prodotto infinito di fattori binomi della forma $1 - \frac{z}{\alpha}$, e di fattori esponenziali della forma $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^z$, che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole le quantità α.*

Infatti, il prodotto

$$\Pi \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^z \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) \tag{1}$$

sarà convergente, quando sia convergente la serie

$$\sum \log\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) + z \sum \log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{z^2}{2}\sum \frac{1}{\alpha^2} - z^3 \sum \frac{\mu_\alpha}{\alpha^3} - \frac{z}{2}\sum \frac{1}{\alpha^2} + z\sum \frac{\mu'_\alpha}{\alpha^3},$$

Ora le serie del secondo membro sono convergenti per il teorema 1 del n. 5, dunque il prodotto (1) è convergente, ed è una funzione intera, che ha per radici tutte e sole le quantità α, come volevamo dimostrare.

Teorema 3. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse α, le quali abbiano gl'indici a distanze finite, e disposti egualmente negli angoli di due assi ortogonali* A *e* B, *si può sempre formare un prodotto infinito con i soli fattori binomi $1 - \frac{z}{\alpha}$, che sia una funzione intera che abbia per radici tutte e sole le quantità α.*

Possiamo supporre che i due assi ortogonali siano gli assi delle x e delle y, perchè se la intersezione dei due assi è indice di una quantità complessa β, e φ è l'angolo che l'asse A fa coll'asse della x, mutando z in $e^{\varphi i}z + \beta$, l'asse A diviene asse delle x, e l'asse B asse delle y.

Prendiamo il prodotto

$$\Pi \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right),$$

e osserviamo le serie $\sum \frac{1}{\alpha}$ e $\sum \frac{1}{\alpha^2}$. Essendo gl'indici delle quantità α disposti egualmente negli angoli opposti degli assi, per ogni valore di α della forma $\varrho e^{\theta i}$, ve ne saranno tre della forma: $-\varrho e^{\theta i}$, $\varrho e^{(\theta+\frac{\pi}{2})i}$, $-\varrho e^{(\theta+\frac{\pi}{2})i}$.

Quindi per ogni valore di α^2 della forma $\varrho^2 e^{2\theta i}$, ve ne saranno tre delle forme: $\varrho^2 e^{2\theta i}$, $-\varrho^2 e^{2\theta i}$, $-\varrho^2 e^{2\theta i}$. Se dunque nel prodotto si prendono i fattori in modo che si succedano sempre i valori di α di queste quattro forme, lo stesso avverrà nelle serie $\sum \frac{1}{\alpha}$ e $\sum \frac{1}{\alpha^2}$, e queste serie saranno identicamente eguali a zero. La serie $\sum \frac{1}{\alpha^3}$ è convergente per il teorema 2 del n. 5. Quindi il prodotto sarà convergente, ed esprimerà una funzione intera, come volevamo dimostrare.

Teorema 4. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse α, che abbiano gl'indici a distanze finite tra loro, disposti comunque nel piano, si può sempre formare un prodotto infinito di fattori binomi della forma $1 - \frac{z}{\alpha}$ e di fattori esponenziali della forma $(1+a)^z$, $(1+a)^{z^2}$, che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole le quantità α.*

Infatti, il prodotto

$$P = \Pi\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^z\left(1+\frac{1}{2\alpha^2}\right)^z\left(1+\frac{1}{2\alpha^2}\right)^{z^2}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$$

sarà convergente, perchè avremo

$$\log P = z\sum\frac{\mu_\alpha}{\alpha^3} - z\sum\frac{1}{8\alpha^4} + z\sum\frac{\mu'_\alpha}{8\alpha^6} - z^2\sum\frac{1}{8\alpha^4} + z^2\sum\frac{\mu''_\alpha}{8\alpha^6} - z^3\sum\frac{\mu'''_\alpha}{\alpha^3},$$

e tutte le serie che compariscono nel secondo membro sono convergenti per il teorema 2 del n. 5.

Da questi teoremi si deduce che le funzioni intere potranno decomporsi in un numero infinito di fattori di primo grado ed esponenziali, e qui comparisce una prima divisione delle funzioni intere. Quelle che hanno gl'indici delle radici in linea retta, e quelle che le hanno disposte comunque nel piano; le prime che sono espresse da un prodotto semplicemente infinito le chiameremo di prima classe, le seconde che sono espresse da un prodotto doppiamente infinito le diremo di seconda classe. Le funzioni di prima classe si dividono anch'esse in due specie, la prima che comprende quelle che hanno gl'indici delle radici disposti simmetricamente rispetto a un punto, e che possono esprimersi per un prodotto infinito di fattori di primo grado, le altre, che hanno gl'indici delle radici disposti comunque sopra la retta, le quali si decomporranno in fattori di primo grado ed esponenziali. Ogni funzione intera di prima classe della prima specie potrà decomporsi nel prodotto di più funzioni intere della stessa classe di seconda specie, e data una funzione della seconda specie se ne potrà sempre trovare un'altra che moltiplicata per la

medesima dia per prodotto una funzione della prima specie. Le funzioni di seconda classe si dividono anch'esse in due specie; la prima comprenderà quelle che hanno gl'indici delle radici disposti egualmente nei quattro angoli di due assi ortogonali, in modo che facendo una rotazione intorno all'origine di un quarto di circolo, gl'indici di tutte le radici vengano a sovrapporsi, le quali funzioni possono esprimersi per un prodotto doppiamente infinito di fattori di primo grado; la seconda comprenderà quelle che hanno gl'indici disposti comunque, e si decompongono in un prodotto doppiamente infinito di fattori di primo grado e di fattori esponenziali. Data una funzione della seconda specie se ne potrà sempre trovare un' altra che moltiplicata per quella dia una funzione della prima specie.

7.

Le funzioni monogene e monodrome che divengono infinite e discontinue per valori finiti di z in generale sono funzioni fratte. Per dimostrare ciò sarà necessario fondarsi sopra le proprietà dei residui integrali, come bisogna fare sempre quando voglionsi dimostrare proprietà delle funzioni senza supporre per esse alcuna espressione analitica.

Teorema 1. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma* $w = u + iv$, *rispetto a una linea chiusa* S, *è eguale a zero anche quando la funzione* w *diviene infinita o discontinua in un punto* D *dell'area racchiusa dalla linea* S, *se indicando con* ϱ *il raggio di una circonferenza* C *descritta col centro in* D, ϱu *e* ϱv *convergono indefinitamente verso zero col diminuire di* ϱ.

Infatti il residuo integrale di w rispetto ad S per il teorema 2 del n. 2, è eguale in questo caso al residuo integrale di w rispetto a C, per quanto piccolo sia il raggio ϱ di questa circonferenza. Onde indicando con φ l'angolo che il raggio mobile ϱ fa coll'asse delle x, avremo

$$(1) \qquad \int w dz = \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial x}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s} \right) \varrho d\varphi + i \int_0^{2\pi} \left(v \frac{\partial x}{\partial s} + u \frac{\partial y}{\partial s} \right) \varrho d\varphi .$$

Ora ϱu e ϱv col diminuire indefinitamente di ϱ convergono a zero $\frac{\partial x}{\partial s}$ e $\frac{\partial y}{\partial s}$ non sono maggiori dell'unità, perchè sono i coseni degli angoli, che la tangente alla curva C nel punto di coordinate x e y fa cogli assi, onde potrà sempre aversi un valor di ϱ, per cui sia

$$\left(u \frac{\partial x}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s} \right) \varrho < \varepsilon , \qquad \left(v \frac{\partial x}{\partial s} + u \frac{\partial y}{\partial s} \right) \varrho < \varepsilon ,$$

essendo ε una quantità piccola quanto si vuole, e quindi

$$\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial x}{\partial s}-v\frac{\partial y}{\partial s}\right)\varrho d\varphi<\varepsilon\int_0^{2\pi}d\varphi\,,\quad \int_0^{2\pi}\left(v\frac{\partial x}{\partial s}+u\frac{\partial y}{\partial s}\right)\varrho d\varphi<\varepsilon\int_0^{2\pi}d\varphi\,.$$

Integrando i secondi membri di queste uguaglianze, e sostituendo nella formula (1), avremo

$$\mathrm{mod}\int w dz<2\pi\varepsilon\sqrt{2}\,,$$

e dovendo essere ε più piccolo di qualunque quantità data, è chiaro che sarà $\int w dz$ eguale a zero, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *Una funzione w monogena e monodroma è finita e continua in tutti i punti dell'area* A *di una linea chiusa* S, *se per ogni punto* P *di* A, *indicando con z_1 l'indice di* P, *il prodotto $(z-z_1)\,w$ converge indefinitamente verso zero coll'avvicinarsi di z a z_1.*

Infatti, se nell'area A vi fosse un punto P nel quale w divenisse infinita o discontinua, si avrebbe anche in questo punto, coll'avvicinarsi indefinitamente di z a z_1,

$$\mathrm{mod}\,(z-z_1)\cdot\frac{w-w_0}{z-z_0}=0\,,$$

indicando con z_0 un valore che ha l'indice in un punto qualunque di A differente da P, e con w_0 il valore corrispondente di w. Quindi, per il teorema precedente, il residuo integrale di $\dfrac{w-w_0}{z-z_0}$ rispetto alla linea S sarebbe sempre eguale a zero, e per il ragionamento fatto per dimostrare il teorema 4 del n. 2, si avrebbe w espresso da una serie convergente per tutti i valori di z che hanno gl'indici nell'area A; onde w è sempre una funzione finita e continua nell'area A, come volevamo dimostrare.

Potrebbe il valore finito dato dalla serie nel punto P non coincidere col valore che ivi prende la funzione w; ma allora questa funzione si renderebbe finita e continua mutandone il valore soltanto in un punto, ed escluderemo dalle nostre considerazioni questa specie di funzioni.

Teorema 3. *Se una funzione w monogena e monodroma si mantiene finita e continua in tutta l'area* A *di una linea chiusa* S, *fuori che in un punto* Z_1 *indice di z_1, e se μ è la massima potenza di $z-z_1$, per la quale $(z-z_1)^\mu w$ converge indefinitamente verso una quantità differente da zero coll'avvicinarsi di z a z_1, μ sarà necessariamente un numero intero, e la funzione w potrà porsi sotto la forma:*

$$w=\frac{a_1}{z-z_1}+\frac{a_2}{(z-z_1)^2}+\cdots+\frac{a_\mu}{(z-z_1)^\mu}+w_1\,, \tag{1}$$

dove w_1 è una funzione finita e continua in tutta l'area A.

Infatti, sia n il numero intero superiormente prossimo a μ; la funzione $(z-z_1)^{n-1}w$ moltiplicata per $z-z_1$ convergerà indefinitamente verso zero all'avvicinarsi di z a z_1, quindi, per il teorema 2, sarà finita e continua in tutta l'area A. e per $z=z_1$ acquisterà un valore finito a_{n-1}. Quindi la funzione

$$(z-z_1)^{n-2}w-\frac{a_{n-1}}{z-z_1},$$

moltiplicata per $z-z_1$ convergerà indefinitamente verso zero coll'avvicinarsi di z a z_1, e perciò sarà finita e continua in tutta l'area A, e per $z=z_1$ acquisterà un valore finito a_{n-2}. Onde la funzione

$$(z-z_1)^{n-3}w-\frac{a_{n-1}}{(z-z_1)^2}-\frac{a_{n-2}}{z-z_1}$$

moltiplicata per $z-z_1$ convergerà a zero coll'avvicinarsi di z a z_1, e quindi sarà finita e continua in tutta l'area A, e prenderà per $z=z_1$ un valore finito a_{n-3}. Così seguitando, essendo n un numero intero e finito, arriveremo a una funzione

$$w-\frac{a_{n-1}}{(z-z_1)^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{(z-z_1)^{n-2}}-\cdots-\frac{a_2}{(z-z_1)^2}-\frac{a_1}{z-z_1}$$

che moltiplicata per $z-z_1$ convergerà verso zero coll'avvicinarsi di z a z_1, e sarà finita e continua in tutta l'area A. Indicandola con w_1 avremo

$$w=\frac{a_1}{z-z_1}+\frac{a_2}{(z-z_1)^2}+\frac{a_3}{(z-z_1)^3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(z-z_1)^{n-1}}+w_1.$$

Dunque la massima potenza μ per cui $(z-z_1)^{\mu}w$ converge indefinitamente verso una quantità differente da zero, coll'avvicinarsi di z a z_1, è un numero intero $n-1$, e la funzione w può porsi sotto la forma (1), come volevamo dimostrare.

Questo teorema ci mostra che le funzioni monogene e monodrome (coll'esclusione fatta nella dimostrazione del teorema 2) non possono divenire discontinue senza divenire infinite.

I valori di z per i quali w diviene infinita, li chiameremo, col signor Liouville, gl'*infiniti* di w.

Se n è il minimo numero intero per cui $(z-z_1)^n w$ convergerà a zero coll'avvicinarsi di z a z_1, diremo che z_1 è $n-1$ volte infinito di w.

Teorema 4. *Gl'indici degl'infiniti di una funzione w monogena e monodroma non possono formare una linea continua in alcuna parte del piano.*

Infatti, se w fosse infinito lungo una linea continua, la funzione monogena e monodroma $\frac{1}{w}$ sarebbe nulla lungo tutta questa linea; e quindi nulla in tutto il piano, per il teorema 3 del n. 4; e in conseguenza w sarebbe infinita in tutto il piano, e non sarebbe una funzione di z.

Teorema 5. *Una funzione monogena, monodroma, non intera e che non diviene mai discontinua senza divenire infinita, è una funzione fratta.*

Infatti, se una funzione monogena e monodroma w non è intera, ammetterà un numero finito o infinito d'infiniti, i quali indicheremo con β. Ora per i teoremi del n. 5, potrà sempre formarsi una funzione intera w_2, che abbia per radici tutte e sole le quantità β, perchè gl'indici di β, per il teorema 4, sono a distanze finite tra loro. Moltiplicando questa funzione w_2 per w avremo una funzione intera w_1, perchè $w_2 w$ non potrà divenire infinita e discontinua in nessun punto del piano. Infatti, $w_2 w$ non potrà evidentemente divenire infinita e discontinua altro che per i valori β, che sono infiniti di w. Ma per ogni valore β, abbiamo in un'area A che non racchiude altri infiniti di w, fuori che β, essendo n il grado di moltiplicità di questo infinito,

$$w = \frac{a_1}{z-\beta} + \frac{a_2}{(z-\beta)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(z-\beta)^n} + \varpi ,$$

dove ϖ ha un valore finito per $z=\beta$. La funzione w_2, avendo per radici tutti gl'infiniti di w collo stesso grado n di multiplicità, sarà della forma

$$w_2 = (z-\beta)^n \varpi_2 ,$$

essendo ϖ_2 una funzione intera. Onde

$$w_2 w = \varpi_2 \left[a_n + a_{n-1}(z-\beta) + \cdots + a_1 (z-\beta)^{n-1}\right] + \varpi\varpi_2 (z-\beta)^n ,$$

funzione che ha un valore finito per $z=\beta$. Dunque $w_2 w$ rimane finita e continua per ogni valore finito di z (1), ed è una funzione intera w_1, e abbiamo

$$w_2 w = w_1 ,$$

ossia

$$w = \frac{w_1}{w_2} ;$$

e la funzione w è una funzione fratta, come volevamo dimostrare.

Pertanto le funzioni monogene e monodrome (escluse quelle che possiedono discontinuità che possono togliersi, mutandone il valore soltanto in punti

(1) Vedi *Journal de Liouville*, 1ère série, vol. 1, pag. 300.

separati) sono intere o fratte, come le funzioni razionali, e la loro teorica si dividerà in due parti, nella prima delle quali studieremo le più semplici funzioni intere, e nella seconda le funzioni fratte che si ottengono dai rapporti delle funzioni intere considerate.

PARTE PRIMA

FUNZIONI INTERE.

1.

Le funzioni intere si dividono in due classi, come abbiamo veduto (Int. n. 6); funzioni intere di prima classe, le quali hanno gl'indici di tutte le radici sopra una medesima linea retta; funzioni intere di seconda classe, le quali hanno gl'indici delle loro radici disposti comunque in tutto il piano.

Cominceremo dal considerare le funzioni di prima classe, e ci limiteremo a quelle che hanno gl'indici delle radici a distanze eguali uno dall'altro.

Sia A il punto indice della quantità complessa α, AB la retta che passando per il punto A fa coll'asse delle x un angolo eguale all'argomento della quantità complessa ω e siano $p_1, p_2, p_3, \ldots$ una serie infinita di punti tutti da una stessa parte del punto A sopra la retta AB, disposti in modo che sia

$$Ap_1 = p_1p_2 = p_2p_3 = p_3p_4 = , \ldots$$

I punti A, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ saranno indici di quantità complesse tutte della forma

$$m\omega + \alpha, \tag{1}$$

dove m è un numero reale, intero, sempre positivo o sempre negativo: lo supporremo sempre negativo. Una funzione intera, che avrà per radici tutte e sole le quantità (1), sarà una funzione intera della prima classe e della seconda specie (Int. n. 6). Supporremo prima che sia $\alpha = 0$; cioè considereremo prima le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma

$$-m\omega, \tag{2}$$

dove ω è una quantità complessa qualunque, ed m è reale, intero e positivo.

Queste funzioni non potranno differire tra loro altro che per un fattore che non ammette radici finite. Basterà dunque considerarne una sola.

Il prodotto infinito

$$\frac{z}{\omega}\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(1+\frac{z}{m\omega}\right)$$

è convergente per qualunque valore finito di z (Int. n. 6); quindi esprime una funzione intera che ha per radici tutte e sole le quantità della forma (2). Questa funzione la indicheremo con es $\frac{z}{\omega}$, perchè avendo il sistema delle sue radici eguale alla metà del sistema delle radici di sen $\frac{\pi z}{\omega}$, la chiameremo *emiseno*. Pertanto ponendo z invece di $\frac{z}{\omega}$ la funzione da studiarsi sarà

$$\operatorname{es} z = z\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{m}\right),$$

oppure

$$\operatorname{es} z = z\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{m}\right): \tag{3}$$

alla quale può darsi anche la forma

$$\operatorname{es} z = \lim_{t=\infty} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{z}{t-1}\right)t^{-z}, \tag{4}$$

oppure

$$\operatorname{es} z = \lim_{t=\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\ldots\ldots(z+t-1)}{1.\,2.\,3.\ldots\ldots(t-1)}\,t^{-z}. \tag{5}$$

La funzione es z sodisfa all'equazione

$$\operatorname{es}(z+1) = \frac{1}{z}\operatorname{es} z. \tag{6}$$

Infatti, dall'equazione (3) abbiamo

$$\begin{aligned}\operatorname{es}(z+1) &= (z+1)\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{z}\left(\frac{m}{m+1}\right)\left(1+\frac{z+1}{m}\right)\\ &= \prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{m}\right) = \frac{\operatorname{es} z}{z}.\end{aligned}$$

La funzione es z sodisfa l'equazione

(7) $$\lim_{w=\infty} \frac{\mathrm{es}\,(z+w)}{\mathrm{es}\,w}\, w^z = 1\,.$$

Infatti, dalla (4) abbiamo

$$w^z \frac{\mathrm{es}\,(z+w)}{\mathrm{es}\,w}$$

$$= \lim_{t=\infty} \frac{\left(1+\frac{z}{w}\right)\left(1+\frac{z}{w}+\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2w}+\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{3w}+\frac{1}{w}\right)\cdots\left(\frac{1}{t-1}+\frac{z}{(t-1)w}+\frac{1}{w}\right)}{\left(1+\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{w}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w}\right)}\, t^{-z} w^z\,.$$

e quindi

$$\lim_{w=\infty} \frac{w^z\, \mathrm{es}(z+w)}{\mathrm{es}\,w} = 1\,.$$

Dalla (3) si ricava immediatamente l'equazione

(8) $$\lim_{z=0} \frac{\mathrm{es}\,z}{z} = 1\,.$$

L'equazioni (6), (7) e (8), unite all'equazione es $0 = 0$, esprimono le condizioni necessarie e sufficienti alla determinazione della funzione es z, come risulta dal seguente

Teorema 1. *Tutte e sole le funzioni intere* $\mathrm{F}(z)$ *che sodisfano all'equazioni*

(*a*) $\mathrm{F}(0) = 0\,,$ (*b*) $\mathrm{F}(z+1) = \frac{1}{z}\mathrm{F}(z),$

(*c*) $\lim_{w=\infty} w^z \frac{\mathrm{F}(z+w)}{\mathrm{F}(w)} = 1\,,$ (*d*) $\lim_{z=0} \frac{\mathrm{F}(z)}{z} = 1\,,$

sono necessariamente identiche colla funzione es z.

Sodisfacendo all'equazioni (*a*) e (*b*) la funzione intera $\mathrm{F}(z)$ avrà per radici tutte le quantità della forma $-m$, essendo m un numero reale, intero e positivo; quindi avrà per radici tutte le radici di es z, e divisa per es z darà per quoziente una funzione intera $\varphi(z)$ e avremo

$$\mathrm{F}(z) = \varphi(z)\, \mathrm{es}\, z\,.$$

Dovendo sodisfare alla equazione (*b*), avremo

$$\mathrm{F}(z+1) = \varphi(z+1)\, \mathrm{es}(z+1) = \frac{1}{z}\varphi(z)\, \mathrm{es}(z)\;,$$

e, a cagione della (6)

$$(e) \qquad \varphi(z+1) = \varphi(z).$$

La equazione (c) darà inoltre

$$\lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} \lim_{w=\infty} w^z \frac{\text{es}(z+w)}{\text{es}\, w} = 1\,;$$

onde, osservando la (7), abbiamo

$$(f) \qquad \lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} = 1\,;$$

ma l'equazioni (e) e (f) non possono coesistere, a meno che non sia $\varphi(z)$ eguale a una costante C; onde

$$\text{F}(z) = \text{C es}\, z\,.$$

Ponendo questo valore nell'equazione (d), e osservando la equazione (8), abbiamo

$$\text{C} = 1\,.$$

Dunque

$$\text{F}(z) = \text{es}\, z\,,$$

come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *La moltiplicazione dell'argomento per un numero reale e intero n nella funzione* es z *è data dalla formula seguente*

$$(9) \qquad \text{es}\, nz = n^{1-nz} \frac{\Pi_t{}_0^{n-1} \text{es}\left(z+\frac{t}{n}\right)}{\Pi_t{}_1^{n-1} \text{es}\, \frac{t}{n}}\,.$$

Infatti, le radici della funzione intera es nz, sono tutte e sole le quantità della forma

$$(a) \qquad -m\,, \quad -m-\frac{1}{n}\,, \quad -m-\frac{2}{n}\,, \;\ldots\ldots,\; -m-\frac{n-1}{n}\,,$$

dove m indica un numero reale, intero e positivo qualunque. Ora tutte le quantità della prima delle forme (a) sono le sole radici della funzione es z, tutte le quantità della seconda sono le sole radici di es$\left(z+\frac{1}{n}\right)$, quelle della terza sono le sole radici di es$\left(z+\frac{2}{n}\right)$, e così discorrendo. Onde il si-

stema delle radici di es nz è identico col sistema delle radici del prodotto

$$\text{es}\, z\ \text{es}\left(z+\frac{1}{n}\right)\text{es}\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots.\text{es}\left(z+\frac{n-1}{n}\right),$$

e abbiamo (Int. n. 3)

$$(b)\qquad \text{es}\, nz = e^{\psi(z)}\prod_{0}^{n-1}{}_t\ \text{es}\left(z+\frac{t}{n}\right),$$

indicando con $\psi(z)$ una funzione intera.

A cagione della equazione (6), ponendo $z+\frac{1}{n}$ invece di z, avremo

$$e^{\psi\left(z+\frac{1}{n}\right)}\prod_{0}^{n-1}\frac{\text{es}\left(z+\frac{t}{n}\right)}{z} = e^{\psi(z)}\prod_{0}^{n-1}\frac{\text{es}\left(z+\frac{t}{n}\right)}{nz},$$

onde

$$e^{\psi\left(z+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e^{\psi(z)}}{n},\qquad \psi\left(z+\frac{1}{n}\right) = \psi(z)+\log\frac{1}{n};$$

e integrando

$$\psi(z) = nz\log\frac{1}{n}+\varphi(z),$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione periodica, cioè una funzione che sodisfa all'equazione

$$(c)\qquad \varphi\left(z+\frac{1}{n}\right) = \varphi(z).$$

Avremo dunque, sostituendo nella equazione (b)

$$(d)\qquad \text{es}\, nz = n^{-nz}\, e^{\varphi(z)}\prod_{0}^{n-1}\text{es}\left(z+\frac{t}{n}\right).$$

Ponendo $z+w$ in luogo di z, abbiamo

$$(e)\qquad \text{es}\,(nz+nw) = n^{-nz-nw}\, e^{\varphi(z+w)}\prod_{0}^{n-1}\text{es}\left(z+w+\frac{t}{n}\right).$$

Dividendo la (e) moltiplicata per $n^{nz}\, w^{nz}$, per la (d), dove in luogo di z sia posto w, otterremo

$$\frac{\text{es}\,(nz+nw)}{\text{es}\, nw}(wn)^{nz} = e^{\varphi(z+w)-\varphi(w)}\prod_{0}^{n-1}\left(\frac{\text{es}\left(z+\frac{t}{n}+w\right)}{\text{es}\left(w+\frac{t}{n}\right)}\, w^{z}\right).$$

Passando al limite per $w=\infty$, e osservando la equazione (7), abbiamo

$$\lim_{w=\infty}\Big(\varphi(z+w)-\varphi(w)\Big)=0,$$

ossia

$$\lim_{w=\infty}\frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)}=1,$$

che è incompatibile colla (c), se $\varphi(z)$ non è una costante C. Sarà dunque $\varphi(z)=C$, e avremo

$$\text{es}\, nz = Cn^{-nz}\prod_0^{n-1}\text{es}\left(z+\frac{t}{n}\right).$$

Per determinare la costante C, divideremo ambedue i membri di questa equazione per nz, e porremo $z=0$; avremo, ponendo mente all'equazione (8),

$$C=\frac{n}{\prod_{t\,1}^{n-1}\text{es}\frac{t}{n}}$$

onde

$$\text{es}\, nz = n^{1-nz}\frac{\prod_{t\,0}^{n-1}\text{es}\left(z+\frac{t}{n}\right)}{\prod_{t\,1}^{n-1}\text{es}\frac{t}{n}}$$

come volevamo dimostrare.

L'integrale definito studiato da Eulero, rappresentato da Legendre colla notazione $\Gamma(x)$, si esprime per la funzione es x.

Infatti, è noto che, finchè x è quantità reale e positiva e ν un numero intero e positivo ([1]), si ha

$$\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^\nu\,dy=\frac{1.\,2.\,3.\ldots.\nu}{x(x+1)\ldots(x+\nu)},$$

e ponendo

$$y=\frac{z}{\nu},\qquad \int_0^\nu z^{x-1}\left(1-\frac{z}{\nu}\right)^\nu dz=\frac{1.\,2.\,3.\ldots.\nu}{x(x+1)\ldots(x+\nu)}\nu^x;$$

([1]) Vedi nel volume II delle *Commentationes Societatis regiæ scientiarum Gottingensis* la Memoria di Gauss intitolata: *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* etc.

e passando al limite per $\nu = \infty$

$$\int_0^\infty z^{x-1}\, e^{-z}\, dz = \frac{1}{\text{es}\, x};$$

onde

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\text{es}\, x}\cdot \tag{10}$$

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma

$$-m\omega - \alpha, \tag{11}$$

dove α e ω sono numeri complessi qualunque e m un intero, reale, positivo, si esprimeranno tutte per la funzione es x. Esse saranno tutte eguali a una funzione intera che non ha radici finite moltiplicata per la funzione intera

$$\prod_0^\infty \left(1 - \frac{1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(1 + \frac{z}{m\omega + \alpha}\right)\cdot$$

Questa funzione è data per mezzo di es z dalla seguente formula

$$\prod_0^\infty \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(1 + \frac{z}{m\omega + \alpha}\right) = \frac{\text{es}\,\dfrac{z+\alpha}{\omega}}{\text{es}\,\dfrac{\alpha}{\omega}}\,. \tag{12}$$

Infatti, dalla equazione (3) abbiamo

$$\text{es}\left(\frac{z+\alpha}{\omega}\right) = \frac{z+\alpha}{\omega} \prod_1^\infty \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{\omega}} \left(1 + \frac{z+\alpha}{m\omega}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\omega}\left(1 + \frac{z}{\alpha}\right) \prod_1^\infty \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{\omega}} \left(1 + \frac{\alpha}{m\omega}\right)\left(1 + \frac{z}{m\omega + \alpha}\right);$$

onde

$$\frac{\text{es}\left(\dfrac{z+\alpha}{\omega}\right)}{\text{es}\,\dfrac{\alpha}{\omega}} = \prod_0^\infty \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(1 + \frac{z}{m\omega + \alpha}\right).$$

Ponendo nell'equazione (12)

$$\alpha = \frac{\omega}{2},$$

si ha

$$\mathrm{es}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{es}\frac{1}{2}\prod_{0}^{\infty}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(1+\frac{2z}{(2m+1)\omega}\right)$$

e quindi, indicando con $\mathrm{ec}\, z$ la funzione $\dfrac{\mathrm{es}\left(\frac{1}{2}+z\right)}{\mathrm{es}\frac{1}{2}}$,

$$\mathrm{ec}\, z=\prod_{0}^{\infty}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{z}\left(1+\frac{2z}{2m+1}\right). \tag{13}$$

Rappresentiamo con $\mathrm{ec}\, z$, e denominiamo *emicoseno* di z la funzione $\dfrac{\mathrm{es}\left(\frac{1}{2}+z\right)}{\mathrm{es}\frac{1}{2}}$,
perchè il sistema delle sue radici è la metà del sistema delle radici del *coseno* di πz.

2.

Passiamo ora a considerare le funzioni di prima classe e di prima specie. Ci limiteremo a quelle che hanno tutti gl' indici delle loro radici a eguali distanze, cioè che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma

$$m\omega+\alpha\,,$$

dove ω e α sono numeri complessi qualunque, e m un numero intero e reale qualunque. Supporremo prima $\alpha=0$.

Le funzioni che avranno per radici tutte e sole le quantità della forma

$$m\omega \tag{1}$$

non potranno differire tra loro altrochè per un fattore, funzione intera che non ammette radici finite. Basterà dunque prendere a considerare una sola di queste funzioni.

Il prodotto infinito

$$z\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m\omega}\right)\left(1-\frac{z}{m\omega}\right)=z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2\omega^2}\right) \tag{2}$$

è una funzione intera, perchè è convergente per qualunque valore finito di z, ed ha per radici tutte e sole le quantità (1).

È chiaro che due funzioni (2) che differiscono per il valore di ω, si possono esprimere una per l'altra. Quindi per ω potremo prendere un valore qualunque. Prenderemo quel valore che fa acquistare alla funzione il valore eguale all'unità, quando $z = \frac{\omega}{2}$; cioè determineremo ω per l'equazione

$$\frac{\omega}{2} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{1}{4m^2}\right) = 1 ,$$

ossia

$$\frac{\omega}{2} = \prod_1^\infty \frac{4m^2}{4m^2 - 1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots\cdots$$

Ma questa è l'espressione di Wallis per il numero $\frac{\pi}{2}$; prenderemo dunque

$$\omega = \pi ,$$

e avremo

$$f(z) = z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{m^2 \pi^2}\right), \tag{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \tag{4}$$

Prendiamo le due funzioni

$$\text{es}\, \frac{z}{\pi} = \frac{z}{\pi} \prod_1^\infty \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\pi}} \left(1 + \frac{z}{m\pi}\right),$$

$$\text{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right) = -\frac{z}{\pi} \prod_1^\infty \left(\frac{m}{m+1}\right)^{-\frac{z}{\pi}} \left(1 - \frac{z}{m\pi}\right).$$

Moltiplicando tra loro, si ottiene

$$f(z) = -\frac{\pi^2}{z}\, \text{es}\, \frac{z}{\pi}\, \text{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right). \tag{5}$$

La funzione intera $f(z)$ sodisfa l'equazione

$$f(z + \pi) = -f(z). \tag{6}$$

Infatti, dalla (5) abbiamo

$$f(z + \pi) = -\frac{\pi^2}{z + \pi}\, \text{es}\left(\frac{z}{\pi} + 1\right) \text{es}\left(-\frac{z}{\pi} - 1\right);$$

ma dalla equazione (6) del numero precedente, si ha

$$\operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi}+1\right)=\frac{\pi}{z}\operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi}\right); \qquad \operatorname{es}\left(-\frac{z}{\pi}-1\right)=-\frac{z+\pi}{\pi}\operatorname{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right),$$

onde

$$f(z+\pi)=\frac{\pi^2}{z}\operatorname{es}\frac{z}{\pi}\operatorname{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right)=-f(z).$$

Dalla (6) si deduce immediatamente

$$f(z+2\pi)=f(z). \tag{7}$$

La funzione $f(z)$ sodisfa all'equazione

$$\lim_{w=\infty}\frac{f(z+w)}{e^{iz}f(w)}=1. \tag{8}$$

Infatti, avremo dall'equazione (5)

$$\frac{f(z+w)}{f(w)}=\frac{1}{1+\frac{z}{w}}\,\frac{\operatorname{es}\left(\frac{z+w}{\pi}\right)\operatorname{es}\left(-\frac{z+w}{\pi}\right)}{\operatorname{es}\frac{w}{\pi}\operatorname{es}\left(-\frac{w}{\pi}\right)}.$$

Ora, essendo $e^{\pi i x}=(-1)^x$, avremo

$$\frac{f(z+w)}{e^{iz}f(w)}=\frac{1}{1+\frac{z}{w}}\,\frac{\operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi}+\frac{w}{\pi}\right)}{\operatorname{es}\frac{w}{\pi}}\left(\frac{w}{\pi}\right)^{\frac{z}{\pi}}\frac{\operatorname{es}\left(-\frac{z+w}{\pi}\right)}{\operatorname{es}\left(-\frac{w}{\pi}\right)}\left(-\frac{w}{\pi}\right)^{-\frac{z}{\pi}}.$$

Passando al limite per $w=\infty$, e osservando la equazione (7) del numero precedente, si ottiene

$$\lim\frac{f(z+w)}{e^{iz}f(w)}=1,$$

come volevamo dimostrare.

Dalla (3) si deduce immediatamente

$$\lim_{z=0}\frac{f(z)}{z}=1. \tag{9}$$

Le equazioni (6), (8), (9) unite alla equazione $f(0)=0$, esprimono le condizioni necessarie e sufficienti alla determinazione di $f(z)$, come abbiamo dal seguente

Teorema. *Tutte e sole le funzioni intere che sodisfano a tutte quattro*

le equazioni

(*a*) $F(0)=0$, (*b*) $F(z+\omega)=-F(z)$,

(*c*) $\lim\limits_{w=\infty}\dfrac{F(z+w)}{e^{\frac{\pi i z}{\omega}}F(w)}=1$, (*d*) $\lim\limits_{z=0}\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{\omega}{\pi}$,

sono identiche alla funzione $f\left(\dfrac{z\pi}{\omega}\right)$.

Infatti, se la funzione $F(z)$ sodisfa contemporaneamente alle due equazioni (*a*) e (*b*) avrà per radici tutte le quantità della forma $m\omega$, e quindi avremo

$$F(z)=\varphi(z)f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right),$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera, che sodisfa all'equazione

(*e*) $$\varphi(z+\omega)=\varphi(z).$$

Sodisfacendo la $F(z)$ alla equazione (*c*), avremo

$$\lim_{w=\infty}\frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)}\lim_{w=\infty}\frac{f\left(\frac{z\pi}{\omega}+w\right)}{e^{\frac{\pi i z}{\omega}}f(w)}=1,$$

ed, osservando l'equazione (8),

$$\lim_{w=\infty}\frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)}=1,$$

equazione che contradice alla equazione (*e*), se $\varphi(z)$ non è una costante. Onde

$$\varphi(z)=C,$$

e

$$F(z)=C f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right).$$

Per le equazioni (*d*) e (9) abbiamo $C=1$, e quindi

$$F(z)=f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right),$$

come volevamo dimostrare.

Ora è noto che la funzione $\operatorname{sen} z$ sodisfa alle equazioni

$$\operatorname{sen}0=0,\quad \operatorname{sen}(z+\pi)=-\operatorname{sen}z,\quad \lim_{w=\infty}\frac{\operatorname{sen}(z+w)}{e^{iz}\operatorname{sen}w}=1,\quad \lim_{z=0}\frac{\operatorname{sen}z}{z}=1,$$

quindi

(10) $$f(z)=\operatorname{sen}z,$$

ed abbiamo

$$(11)\qquad \operatorname{sen} z = -\frac{\pi^2}{z}\operatorname{es}\frac{z}{\pi}\operatorname{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right),$$

e anche

$$(12)\qquad \operatorname{sen} z = \pi \operatorname{es}\frac{z}{\pi}\operatorname{es}\left(1-\frac{z}{\pi}\right).$$

Se poniamo nella equazione (12), $z=\frac{\pi}{2}$, abbiamo

$$(13)\qquad \operatorname{es}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Prendiamo per il radicale il segno positivo, perchè dalla (3) n. 1, risulta chiaramente che $\operatorname{es} z$ ha valori positivi per valori reali e positivi di z.

Dalla teorica algebrica della divisione della circonferenza è nota la formula

$$\prod_1^{n-1}\operatorname{sen}\frac{t\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Sostituendo i valori dei seni dati dalla (12), abbiamo

$$\prod_1^{n-1}\operatorname{sen}\frac{t\pi}{n}=\pi^{n-1}\prod_{t\,1}^{n-1}\operatorname{es}\frac{t}{n}\operatorname{es}\left(1-\frac{t}{n}\right)=\pi^{n-1}\prod_{t\,1}^{n-1}\operatorname{es}^2\frac{t}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

onde

$$(14)\qquad \prod_{t\,1}^{n-1}\operatorname{es}\frac{t}{n}=\frac{\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}};$$

e quindi l' equazione (9) del numero precedente diviene

$$(15)\qquad \operatorname{es} nz = n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{t\,0}^{n-1}\operatorname{es}\left(z+\frac{t}{n}\right).$$

Teorema. *La moltiplicazione dell' argomento delle funzioni* sen z *è data dalla seguente formula*

$$(16)\qquad \operatorname{sen} nz = 2^{n-1}\prod_{t\,0}^{n-1}\operatorname{sen}\left(z+\frac{t\pi}{n}\right).$$

Infatti dalla equazione (12) abbiamo

$$\operatorname{sen} nz = \pi\operatorname{es}\frac{nz}{\pi}\operatorname{es}\left(1-\frac{nz}{\pi}\right);$$

e sostituendo i valori di es $\frac{nz}{\pi}$ e di es $n\left(\frac{1}{n}-\frac{z}{\pi}\right)$ dati dalla formula (15), si ottiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} nz &= \pi(2\pi)^{n-1} \prod_0^{n-1}{}_t \operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi}+\frac{t}{n}\right) \operatorname{es}\left(\frac{1}{n}-\frac{z}{\pi}+\frac{t}{n}\right) \\ &= \pi(2\pi)^{n-1} \prod_0^{n-1}{}_t \operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi}+\frac{t}{n}\right) \operatorname{es}\left[1-\left(\frac{z}{\pi}+\frac{t}{n}\right)\right];\end{aligned}$$

onde, ponendo mente all'equazione (12),

$$\operatorname{sen} nz = 2^{n-1} \prod_0^{n-1}{}_t \operatorname{sen}\left(z+\frac{t\pi}{n}\right),$$

come volevamo dimostrare.

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma

$$m\omega + \alpha,$$

dove ω ed α sono quantità complesse, ed m è un numero intero e reale qualunque, si esprimeranno tutte per la funzione sen z. Poichè saranno eguali a una funzione intera, che non ha radici finite, moltiplicata per la funzione intera

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1-\frac{z}{m\omega+\alpha}\right);$$

e questa è data per mezzo di due seni dalla formula seguente

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1-\frac{z}{m\omega+\alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\omega}(\alpha-z)}{\operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{\omega}}. \tag{17}$$

Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{\pi(\alpha-z)}{\omega} &= \frac{\pi}{\omega}(\alpha-z) \prod_1^{\infty}{}_m \left(1-\frac{\alpha-z}{m\omega}\right)\left(1+\frac{\alpha-z}{m\omega}\right) \\ &= \frac{\pi\alpha}{\omega}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right) \prod_1^{\infty}{}_m \left(1-\frac{\alpha}{m\omega}\right)\left(1+\frac{\alpha}{m\omega}\right) \prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{m\omega-\alpha}\right)\left(1-\frac{z}{m\omega+\alpha}\right);\end{aligned}$$

onde

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1-\frac{z}{m\omega+\alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi(\alpha-z)}{\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{\omega}}.$$

Ponendo nella (17) $\omega = \pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, abbiamo

$$\mathop{\Pi_m}_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{2z}{(2m+1)\pi}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z;$$

ma dalla equazione (12) abbiamo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = \pi \operatorname{es}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{\pi}\right) \operatorname{es}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{\pi}\right);$$

onde, per la equazione (13),

$$\cos z = \operatorname{ec}\frac{z}{\pi}\operatorname{ec}\left(-\frac{z}{\pi}\right). \tag{18}$$

3.

Passiamo ora alle funzioni intere di seconda classe, e limitiamoci a quelle che hanno gl'indici di tutte le loro radici nei punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro.

Teorema 1. *I punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro sono indici di quantità tutte della forma*

$$m\omega + n\omega' + \alpha,$$

dove m ed n sono numeri interi e reali qualunque, α, ω *e* ω' *sono quantità complesse, ed il rapporto* $\frac{\omega'}{\omega}$ *non è reale; e reciprocamente.*

Infatti, per ottenere un sistema di punti che siano intersezioni di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, bisognerà prendere un punto A, e condurre per il medesimo due rette AB, AB′ che facciano rispettivamente coll'asse delle x gli angoli φ e φ', la differenza dei quali non sia un multiplo di π, prendere sopra AB una serie di punti

$$\ldots\ldots A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A, A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots$$

in modo che sia

$$\cdots = A_{-2}A_{-1} = A_{-1}A = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = r;$$

sopra AB′ una serie indefinita di punti

$$\ldots\ldots A'_{-3}, A'_{-2}, A'_{-1}, A, A'_1, A'_2\ \ A'_3, \ldots\ldots$$

in modo che sia

$$\cdots = A'_{-3}A'_{-2} = A'_{-2}A'_{-1} = A'_{-1}A = AA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \cdots = r',$$

e condurre per ogni punto A_m una retta $A_m B'_m$ parallela ad AB', e per ogni punto A'_n una retta $A'_n B_n$ parallela ad AB. I punti $A_{m,n}$ intersezioni delle rette $A_m B'_m$ e $A'_n B_n$ saranno i punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro. Ora è chiaro che, ponendo

$$\omega = re^{\varphi i}, \quad \omega' = r'e^{\varphi' i},$$

e indicando con α la quantità complessa che ha per indice il punto A, ogni punto $A_{m,n}$ sarà indice di una quantità complessa della forma

$$m\omega + n\omega' + \alpha, \tag{1}$$

dove m e n sono numeri interi e reali. Non dovendo gli angoli φ e φ' differire tra loro di un multiplo di π, è chiaro che il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ non potrà essere reale.

Se poniamo ω e ω' sotto la forma

$$\omega = a + bi, \quad \omega' = c + di, \tag{1'}$$

avremo

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{ac + bd + (ad - bc)i}{a^2 + b^2}.$$

Il determinante $ad - bc$, che chiameremo *determinante* del sistema degli indici delle quantità (1), dovrà essere differente da zero.

È facile a dimostrarsi che il valore di questo determinante preso positivamente esprime l'area dei parallelogrammi $A_{m,n} A_{m+1,n} A_{m,n+1} A_{m+1,n+1}$, che si chiameranno parallelogrammi *elementari*.

Teorema 2. *Gl'indici delle quantità*

$$m\omega + n\omega' + \alpha, \tag{1}$$

ed

$$M\Omega + N\Omega' + \alpha, \tag{2}$$

dove m, n *ed* M, N *sono numeri interi e reali qualunque, formano il medesimo sistema di punti, quando abbiansi le relazioni*

$$\Omega = \mu\omega + \nu\omega', \quad \Omega' = \varrho\omega + \sigma\omega'; \tag{3}$$

$$\mu\sigma - \varrho\nu = \pm 1 \tag{4}$$

essendo μ, ν, ϱ *e* σ *numeri interi e reali.*

Infatti è chiaro che, perchè sia

$$M\Omega + N\Omega' + \alpha = m\omega + n\omega' + \alpha, \tag{5}$$

è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le equazioni

$$M\mu + N\varrho = m, \quad M\nu + N\sigma = n. \tag{6}$$

Ora qualunque siano i numeri interi M ed N è chiaro che esisteranno valori interi per m ed n che sodisfaranno le equazioni (6) e quindi la equazione (5), e a cagione della equazione (4), qualunque siano i valori interi di m ed n, esisteranno anche valori interi di M ed N che sodisfaranno le (6) e quindi la (5). Dunque ogni punto che è indice di una delle quantità (1) è indice anche di una delle quantità (2), e viceversa.

Teorema 3. *I valori dei determinanti degl'indici delle quantità* (1) *e* (2), *quando sussistono le relazioni* (3) *e* (4), *sono eguali ovvero eguali in valore assoluto e di segno contrario, secondo che nel secondo membro della equazione* (4) *si ha il segno positivo o il negativo.*

Infatti, il determinante degli indici del sistema (2), a cagione delle equazioni (3) e (1'), sarà

$$\begin{vmatrix} \mu a + \nu c, \mu b + \nu d \\ \varrho a + \sigma c, \varrho b + \sigma d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \varrho & \sigma \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \pm (ad - bc);$$

onde risulta evidente il teorema che volevamo dimostrare.

Pertanto dato un sistema di punti che siano tutti intersezioni di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, si potranno riguardare sempre come indici di tutte le quantità della forma (2), e Ω e Ω' si potranno sempre prendere in modo che il determinante, e quindi il coefficiente di i nel rapporto $\frac{\Omega'}{\Omega}$ sia positivo.

È chiaro che se F(z) è una funzione intera, che ha per radici tutte e sole le quantità della forma (1), le tre funzioni

$$F(z), \quad F(z+\omega), \quad F(z+\omega'),$$

avranno le medesime radici e quindi non potranno differire altro che per fattori, i quali non abbiano radici finite. Ma è impossibile che siano tra loro eguali, come risulta dal seguente

Teorema 4. *Una funzione intera* F(z), *che è doppiamente periodica, ossia che sodisfa a due equazioni*

$$(a) \quad F(z+\omega) = F(z), \qquad (b) \quad F(z+\omega') = F(z),$$

dove il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ *non è reale, non è una funzione di* z, *ma una costante.*

Infatti, se $F(z)$ soddisfa alle due equazioni (a) e (b) è chiaro che prenderà i medesimi valori nei punti corrispondenti dei parallelogrammi elementari, e quindi non potrà prendere per qualunque valore di z, valori differenti da quelli che prende nei punti di un solo parallelogrammo elementare. Ma ogni funzione intera che non è costante diviene infinita per $z = \infty$ (Intr. n. 3); quindi $F(z)$, se non fosse una costante, dovrebbe diventare infinita per un valore di z, che ha l'indice in un parallelogrammo elementare qualunque, cioè per un valore finito di z, e non sarebbe una funzione intera.

4.

Le funzioni intere che avranno per indici delle loro radici i punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, per quello che abbiamo dimostrato nel numero precedente, avranno per radici le quantità della forma

$$m\omega + n\omega' + \alpha \,, \tag{1}$$

dove nel rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ il coefficiente di i è differente da zero e positivo, ed m e n sono interi reali.

Consideriamo prima quelle funzioni intere per le quali $\alpha = 0$, ed n è sempre negativo, ossia che hanno gl'indici delle loro radici tutti situati da una medesima parte di una retta AB che passa per l'origine. Queste funzioni che hanno per radici tutte e sole le quantità

$$\pm m\omega - n\omega', \tag{2}$$

dove m ed n sono interi, reali e positivi, non potranno differire tra loro altro che per una funzione intera che non ha radici finite. Basterà quindi considerarne una sola.

La funzione intera

$$\operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega}$$

ha per radici tutte e sole le quantità della forma

$$\pm m\omega .$$

La funzione intera

$$\frac{e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \operatorname{sen} \frac{\pi(n\omega' + z)}{\omega}}{\operatorname{sen} \frac{\pi n\omega'}{\omega}} = \frac{1 - e^{\frac{2\pi i n\omega'}{\omega} + \frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega}}}$$

ha per radici tutte e sole le quantità

$$\pm m\omega - n\omega',$$

nelle quali n ha un determinato valore, ed m prende tutti i valori interi, reali e positivi (n. 2, formula 17).

Onde il prodotto

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{C} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \left(\frac{1 - e^{\frac{2n\pi i \omega'}{\omega} + \frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - e^{\frac{2n\pi i \omega'}{\omega}}} \right)$$

se è convergente per qualunque valore finito di z, sarà una funzione intera che avrà per radici tutte e sole le quantità (2).

Questo prodotto è sempre convergente perchè la serie

$$\sum_0^\infty e^{\frac{2n\pi i \omega'}{\omega}}$$

è convergente indipendentemente dall' ordine dei termini. Infatti, abbiamo

$$\frac{\omega'}{\omega} = a + bi,$$

dove b è differente da zero, e positivo; quindi

$$e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}} = e^{-\pi b}\, e^{\pi i a},$$

e

$$\operatorname{mod} e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}} = e^{-\pi b} < 1.$$

Poniamo

$$q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}},$$

e prendiamo la costante C in modo che la funzione (3) divisa per $\frac{z}{\omega}$, e fatto $z = 0$, dia per valore l' unità, cioè prendiamo $\mathrm{C} = \frac{1}{\pi}$, e poniamo

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{et} \frac{z}{\omega} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n} e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - q^{2n}},$$

ossia

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{et} z = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi z \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n} e^{2\pi i z}}{1 - q^{2n}}.$$

Indichiamo questa funzione colla notazione et z, perchè avendo il sistema delle sue radici eguale alla metà del sistema delle radici di una funzione che suole indicarsi colla lettera Θ, la chiameremo *emiteta*.

Sono facili a dimostrarsi le equazioni

$$\text{et}\,(z+1) = -\,\text{et}\,z\,, \tag{6}$$

$$\text{et}\left(z+\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{i}{2}\,e^{-\pi i\left(z+\frac{\omega'}{\omega}\right)}\frac{\text{et}\,z}{\text{sen}\,\pi z} = \frac{\text{et}\,z}{q(1-e^{2\pi i z})}\,, \tag{7}$$

$$\text{et}\,0 = 0\,, \tag{8}$$

$$\lim_{z=0}\frac{\text{et}\,z}{z} = 1\,, \tag{9}$$

le quali sono le caratteristiche della funziòne, cioè sono l'equazioni necessarie e sufficienti alla sua definizione.

Infatti, se una funzione intera $F(z)$ sodisfa all'equazioni

(a) $F(z+1) = -F(z)$, (b) $F(z+\varpi) = \frac{i}{2}e^{-\pi i(z+\varpi)}\frac{F(z)}{\text{sen}\,\pi z}$,

(c) $F(0) = 0$, (d) $\lim\limits_{z=0}\frac{F(z)}{z} = 1$,

sarà identica alla funzione et z, nella quale $\omega' = \omega\varpi$.

Infatti, se la funzione intera $F(z)$ sodisfa all'equazioni (a), (b), (c) avrà per radici tutte le quantità della forma

$$\pm\, m - n\frac{\omega'}{\omega}\,,$$

cioè tutte le radici della funzione et z; avremo dunque, (Introd. n. 3),

$$F(z) = \varphi(z)\,\text{et}\,z\,, \tag{e}$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera di z. Sostituendo il valore (e) nell'equazioni (a) e (b) e ponendo mente all'equazioni (6) e (7), si ottiene

$$\varphi(z+1) = \varphi(z)\,, \qquad \varphi(z+\varpi) = \varphi(z)\,;$$

e quindi per il teorema 4 del n. 3, $\varphi(z)$ non è una funzione di z, ma una costante C, e abbiamo

$$F(z) = C\,\text{et}\,z\,.$$

Sostituendo nell'equazione (d) si ottiene $C = 1$, e quindi

$$F(z) = \text{et}\,z\,,$$

come volevamo dimostrare.

La funzione $e^{\pi i z}$ et z è intera non solo rispetto alla variabile z, ma anche rispetto alla quantità $e^{2\pi i z}$, quindi potrà esprimersi per una serie di potenze positive e intere di questa quantità, che sarà sempre convergente; cioè avremo

$$e^{\pi i z} \text{ et } z = \sum_0^\infty A_n e^{2n\pi i z}.$$

A cagione della equazione (7) avremo

$$\sum_0^\infty A_n q^{2n} e^{2n\pi i z} = \frac{\sum_0^\infty A_n e^{2n\pi i z}}{1 - e^{2\pi i z}};$$

onde

$$\sum_0^\infty \left(A_n (1 - q^{2n}) + A_{n-1} q^{2n-2}\right) e^{2n\pi i z} = 0;$$

dalla quale si deduce

$$A_n = -\frac{A_{n-1} q^{2n-2}}{1 - q^{2n}},$$

ossia

$$A_n = (-1)^n \frac{A_0 q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2i})},$$

e quindi

$$e^{\pi i z} \text{ et } z = A_0 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2i})} e^{2n\pi i z}.$$

Ponendo $z = \infty$, abbiamo, per la equazione (5),

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})};$$

onde

$$\text{(10)} \qquad \text{et } z = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2i})} e^{(2n-1)\pi i z}.$$

5.

La funzione intera et $\frac{z}{\omega}$ ha per radici, come abbiamo veduto, tutte e sole le quantità della forma

$$\pm m\omega - n\omega';$$

la funzione intera $\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)$ avrà per radici tutte e sole le quantità della forma

$$\pm m\omega + n\omega';$$

onde il prodotto

$$\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)$$

avrà per radici tutte e sole le quantità della forma

$$m\omega + n\omega', \tag{1}$$

dove m e n possono essere tanto positivi quanto negativi, e tutte radici semplici, fuori che le quantità della forma $m\omega$, le quali ne saranno tutte radici doppie; ma queste sono radici semplici della funzione intera $\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}$, onde la funzione intera

$$C\frac{\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}}$$

avrà per radici tutte e sole le quantità della forma (1). Prendiamo la costante C in modo che dividendo la funzione per z, e ponendo quindi $z=0$, si ottenga per valore l'unità; cioè prendiamo $C = -\pi\omega$, e poniamo

$$\theta(z) = -\pi\omega\frac{\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}} = \frac{\pi\omega\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}}. \tag{2}$$

Poichè dalla equazione (7) del n. 4, si ha

$$\operatorname{et}\left(\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{\omega}(\omega'-z)}\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{2i\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}},$$

alla funzione $\theta(z)$ potremo dare anche la forma

$$\theta(z) = -2\pi i\omega e^{-\frac{\pi i}{\omega}(z-\omega')}\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right) \tag{2'}$$

$$= 2\pi i\omega e^{-\frac{\pi i}{\omega}(z-\omega')}\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(1+\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right).$$

Osservando l'equazione (6) del n. 4, avremo immediatamente

$$\theta(z+\omega) = -\,\theta(z). \tag{3}$$

Aumentando z della quantità ω', si ottiene

$$\theta(z+\omega') = -\,\pi\omega\,\frac{\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{\omega}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{\omega}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{\omega}\right)};$$

ma dall'equazione (7) del n. 4, abbiamo

$$\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{\omega}\right) = -\,\frac{e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}\,\mathrm{et}\,\frac{z}{\omega}}{2iq\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}},$$

$$\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{\omega}\right) = q\,(1-e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}-\frac{2\pi i\omega'}{\omega}})\,\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right),$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{\omega}\right) = \frac{e^{\frac{\pi i}{\omega}(z+\omega')}(1-e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}-\frac{2\pi i\omega'}{\omega}})}{2i},$$

onde

$$\theta(z+\omega') = -\,e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\,\theta(z). \tag{4}$$

Abbiamo inoltre

$$\lim_{z=0}\frac{\theta(z)}{z} = 1. \tag{5}$$

L'equazioni (3), (4) e (5) unite all'equazione

$$\theta(0) = 0, \tag{6}$$

sono le caratteristiche della funzione $\theta(z)$.

Infatti, una funzione intera $\mathrm{F}(z)$ che sodisfa l'equazioni

(a) $\quad \mathrm{F}(z+\omega) = -\,\mathrm{F}(z)$, $\qquad (b)$ $\quad \mathrm{F}(z+\omega') = -\,e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\,\mathrm{F}(z)$,

(c) $\quad \mathrm{F}(0) = 0$, $\qquad (d)$ $\quad \lim_{z=0}\frac{\mathrm{F}(z)}{z} = 1$,

non può essere altro che la funzione $\theta(z)$.

Poichè se $F(z)$ sodisfa l'equazioni (c), (a) e (b) avrà per radici tutte le quantità della forma (1), e quindi sarà

$$F(z) = \varphi(z)\,\theta(z), \tag{e}$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera. Sostituendo il valore (e) nell'equazioni (a) e (b), abbiamo

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega') = \varphi(z),$$

onde $\varphi(z)$, per il teorema 4 del n. 3, è una costante C, e si ha

$$F(z) = C\,\theta(z).$$

Sostituendo questo valore nella (d) si ottiene $C = 1$; onde

$$F(z) = \theta(z)$$

come volevamo dimostrare.

La funzione $\theta(z)$ è una funzione dispari, cioè sodisfa l'equazione.

$$\theta(-z) = -\theta(z), \tag{7}$$

come risulta immediatamente dalla equazione (2).

Sostituendo nella formula (2) i valori dati dalla formula (4) del n. 4, abbiamo

$$\theta(z) = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^{\infty} \frac{\left(1 - q^{2n} e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n})^2}, \tag{8}$$

ossia

$$\theta(z) = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}. \tag{9}$$

6.

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità

$$m\omega + n\omega' + \alpha, \tag{1}$$

saranno della forma

$$\varphi(z)\,\theta(z-\alpha), \tag{2}$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

La quantità complessa α può sempre esprimersi per due quantità complesse ω' e ω, se $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale, nel modo seguente

$$\alpha = \frac{1-\mu}{2}\omega + \frac{1-\nu}{2}\omega',$$

dove μ e ν sono due quantità reali. Poichè se

$$\alpha = \varrho + \sigma i\,, \quad \omega = a + bi\,, \quad \omega' = c + di\,;$$

e $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale, il determinante $ad - bc$ sarà differente da zero, e quindi l'equazioni simultanee

$$\varrho = \frac{1-\mu}{2}a + \frac{1-\nu}{2}c\,, \qquad \sigma = \frac{1-\mu}{2}b + \frac{1-\nu}{2}d\,,$$

avranno sempre una soluzione, quando vi si riguardino μ e ν come incognite.

Indicando la funzione (2) con $\theta_{\mu,\nu}$, avremo

$$\theta_{\mu,\nu}(z) = \varphi(z)\,\theta\left(z + \frac{\mu-1}{2}\omega + \frac{\nu-1}{2}\omega'\right). \tag{3}$$

Determiniamo la funzione intera $\varphi(z)$ in modo che l'equazioni caratteristiche di $\theta_{\mu,\nu}(z)$ siano quelle stesse della funzione $\theta(z)$, che indicheremo con $\theta_{1,1}(z)$, quando $\mu = 1$, e $\nu = 1$, cioè siano le seguenti

$$\theta_{\mu,\nu}(z+\omega) = e^{\nu\pi i}\,\theta_{\mu,\nu}(z)\,, \tag{4}$$

$$\theta_{\mu,\nu}(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\mu\omega+\omega')}\,\theta_{\mu,\nu}(z)\,, \tag{5}$$

$$\theta_{\mu,\nu}\left((\mu-1)\frac{\omega}{2} + (\nu-1)\frac{\omega'}{2}\right) = 0\,, \tag{6}$$

$$\theta_{\mu,\nu}(0) = 1\,. \tag{7}$$

Sostituendo il valore (3) nelle equazioni (4) e (5), abbiamo

$$\varphi(z+\omega) = e^{(\nu-1)\pi i}\,\varphi(z)\,, \qquad \varphi(z+\omega') = e^{(\nu-1)\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\,\varphi(z)\,;$$

e ponendo

$$\varphi(z) = e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\psi(z)\,,$$

si ha

$$\psi(z+\omega)=\psi(z)\,, \qquad \psi(z+\omega')=\psi(z)\,;$$

onde $\psi(z)$ è eguale a una costante C, e

$$\varphi(z)=\mathrm{C}e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,,$$

$$\theta_{\mu,\nu}(z)=\mathrm{C}e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}\left(z+\frac{\mu-1}{2}\,\omega+\frac{\nu-1}{2}\,\omega'\right).$$

Sostituendo nella (7) si ottiene

$$\mathrm{C}=\frac{1}{\theta_{1,1}\left((\mu-1)\,\frac{\omega}{2}+(\nu-1)\,\frac{\omega'}{2}\right)}\,,$$

e quindi

$$\theta_{\mu,\nu}(z)=e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\frac{\theta_{1,1}\left(z+\frac{\mu-1}{2}\,\omega+\frac{\nu-1}{2}\,\omega'\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\mu-1}{2}\,\omega+\frac{\nu-1}{2}\,\omega'\right)}\,. \tag{8}$$

La equazione caratteristica (7) per le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$, nelle quali μ e ν sono ambedue dispari, non vale, perchè diviene in contradizione colla (6); allora invece abbiamo

$$\lim_{z=0}\frac{\theta_{\mu,\nu}(z)}{z}=1\,. \tag{9}$$

Le due equazioni caratteristiche (4) e (5) si possono comprendere nella sola seguente

$$\theta_{\mu,\nu}(z+r\omega+s\omega')=(-1)^{r\nu+s\mu}\,e^{-\frac{\pi i s}{\omega}(2z+s\omega')}\,\theta_{\mu,\nu}(z)\,, \tag{10}$$

dove r ed s sono due interi reali qualunque.

Teorema. *Le funzioni* $\theta_{\mu,\nu}(z)$, *nelle quali i valori di* μ, ν *sono congrui rispetto al modulo* 2, *sono identiche.*

Infatti, due funzioni:

$$\theta_{\mu,\nu}(z)\,, \qquad \theta_{\mu+2r\,,\,\nu+2s}(z)$$

dove r ed s sono interi e reali hanno le medesime caratteristiche.

La caratteristica (6) rimane evidente che è la medesima per ambedue, se si pone mente che le due funzioni hanno le medesime radici. La (7) e la (9) rimangono invariate quando si aumenti μ di $2r$ e ν di $2s$. La ca-

ratteristica (10) finalmente, non muta per questo cangiamento, il quale non fa che aumentare l'esponente di e di un multiplo di $2\pi i$.

Pertanto le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$ nelle quali μ e ν sono interi, si riducono soltanto a quattro funzioni distinte

$$\theta_{1,1}(z), \quad \theta_{1,0}(z), \quad \theta_{0,1}(z), \quad \theta_{0,0}(z).$$

Queste funzioni le chiameremo funzioni jacobiane, perchè non differiscono altro che per fattori indipendenti da z da quelle che Jacobi introdusse nell' Analisi.

7.

Dalla equazione (8) del numero precedente si deduce facilmente la equazione

$$(1) \qquad \theta_{\mu+\mu',\nu+\nu'}(z)$$

$$= \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\mu-1}{2}\omega+\frac{\nu-1}{2}\omega'\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\mu'+\mu-1}{2}\omega+\frac{\nu'+\nu-1}{2}\omega'\right)} e^{\frac{\pi}{\omega}\left(\nu' z-\frac{(\nu-1)}{2}(\mu'\omega+\nu'\omega')\right)} \theta_{\mu,\nu}\left(z+\frac{\mu'}{2}\omega+\frac{\nu'}{2}\omega'\right),$$

la quale insieme colla (8) ora ricordata serve ad esprimere tre qualunque delle funzioni jacobiane per mezzo della quarta e si hanno le seguenti formule

$$(2) \qquad \theta_{1,0}(z) = e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)},$$

$$(3) \qquad \theta_{0,1}(z) = \frac{\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$(4) \qquad \theta_{0,0}(z) = e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)}:$$

$$(5) \qquad \theta_{1,1}(z) = -\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right) e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)} \theta_{1,0}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right),$$

$$(6) \qquad \theta_{0,1}(z) = -\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)} \theta_{1,0}\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$

$$(7)\qquad \theta_{0,0}(z)=-\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}e^{\frac{\pi i}{2}}\theta_{1,0}\left(z+\frac{\omega}{2}\right);$$

$$(8)\qquad \theta_{1,1}(z)=-\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)\theta_{0,1}\left(z+\frac{\omega}{2}\right),$$

$$(9)\qquad \theta_{1,0}(z)=-\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\theta_{0,1}\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$

$$(10)\qquad \theta_{0,0}(z)=\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\theta_{0,1}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right);$$

$$(11)\qquad \theta_{1,1}(z)=-\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)}\theta_{0,0}\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$

$$(12)\qquad \theta_{1,0}(z)=\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}e^{\frac{\pi i}{2}}\theta_{0,0}\left(z+\frac{\omega}{2}\right),$$

$$(13)\qquad \theta_{0,1}(z)=\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}\theta_{0,0}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right).$$

Prendendo la formula (2) del n. 5, e sostituendo il valore di $\theta_{1,1}(z)$ dato dalla medesima nelle equazioni (2), (3) e (4), abbiamo

$$(14)\qquad \theta_{1,1}(z)=-\frac{\pi\omega\ \mathrm{et}\frac{z}{\omega}\ \mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{\mathrm{sen}\frac{\pi z}{\omega}},$$

$$(15)\qquad \theta_{1,0}(z)=\mathrm{sen}\frac{\pi\omega'}{2\omega}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\frac{\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{2\omega}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{et}\frac{\omega'}{2\omega}\ \mathrm{et}\left(-\frac{\omega'}{2\omega}\right)},$$

$$(16)\qquad \theta_{0,1}(z)=\frac{\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{\pi z}{\omega}\ \mathrm{et}\frac{1}{2}\ \mathrm{et}\left(-\frac{1}{2}\right)},$$

$$(17)\qquad \theta_{0,0}(z)=\cos\frac{\pi\omega'}{2\omega}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\frac{\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{2\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{2\omega}-\frac{1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{et}\left(\frac{\omega'}{2\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{\omega'}{2\omega}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Mediante l'equazioni (2), (3) e (4), richiamando le formule (8) e (9) del n. 5, abbiamo

$$(18)\qquad \theta_{1,1}(z)=\frac{\omega}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{2n}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n})^2}$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2},$$

$$(19)\qquad \theta_{1,0}(z)=\prod_{0}^{\infty}\frac{\left(1-q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n+1})^2}$$

$$=\prod_{0}^{\infty}\frac{1-2q^{2n+1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n+2}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

$$(20)\qquad \theta_{0,1}(z)=\cos\frac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1+q^{2n}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1+q^{2n})^2}$$

$$=\cos\frac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2},$$

$$(21)\qquad \theta_{0,0}(z)=\prod_{0}^{\infty}\frac{\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1+q^{2n+1})^2}$$

$$=\prod_{0}^{\infty}\frac{1+2q^{2n+1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n+2}}{(1+q^{2n+1})^2}.$$

Da queste equazioni si deduce immediatamente che le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$ sono pari se $\mu\nu\equiv 0 \pmod{2}$, sono dispari se $\mu\nu\equiv 1 \pmod{2}$; ossia

$$(22)\qquad \theta_{\mu,\nu}(-z)=(-1)^{\mu\nu}\,\theta_{\mu,\nu}(z).$$

8.

Le quattro funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ contengono due soli argomenti $\frac{z}{\omega}$ e $\frac{\omega'}{\omega}$; quindi tra i valori delle medesime corrispondenti allo stesso sistema di valori dei

due argomenti dovranno esistere due sole equazioni distinte. Queste sono le due equazioni algebriche seguenti

$$(1)\qquad \theta^2_{1,0}(z)=\theta^2_{0,1}(z)+\frac{\theta^{\,2}_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\theta^2_{1,1}(z)\,,$$

$$(2)\qquad \theta_{1,0}(z)=\theta^2_{0,0}(z)+\frac{\theta^{\,2}_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}\,\theta^2_{1,1}(z)\,.$$

Per dimostrare queste equazioni osserviamo che dall'equazione (9) del n. 6, si deduce

$$\theta_{1,1}\left(r\omega+s\omega'+\frac{\omega}{2}\right)=(-1)^{r+s}\,e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(\omega+s\omega')}\,\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\theta_{1,0}\left(r\omega+s\omega'+\frac{\omega}{2}\right)=(-1)^{s}\;\;e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(\omega+s\omega')}\,\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right);$$

onde

$$\theta_{1,0}\left(2r\omega+s\omega'+\frac{\omega}{2}\right)-\frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\theta_{1,1}\left(2r\omega+s\omega'+\frac{\omega}{2}\right)=0\,,$$

$$\theta_{1,0}\left((2r+1)\omega+s\omega'+\frac{\omega}{2}\right)+\frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\theta_{1,1}\left((2r+1)\omega+s\omega'+\frac{\omega}{2}\right)=0\,.$$

Dunque la funzione

$$\theta^{\,2}_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^{\,2}_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\theta^2_{1,1}(z)$$

ha per radici tutte le quantità della forma

$$r\omega+s\omega'+\frac{\omega}{2}\,,$$

dove r ed s sono numeri interi e reali qualunque, e quindi sarà divisibile

per la funzione $\theta_{0,1}(z)$ che ha per radici tutte e sole queste quantità, e avremo

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta^2_{1,1}(z) = \theta_{0,1}(z)\,\varphi(z),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera.

Ora da questa equazione, ponendo mente alla equazione (9) del n. 6, si ha

$$\varphi(z+\omega) = -\varphi(z), \quad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\varphi(z), \quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0, \quad \varphi(0) = 1;$$

che sono le quattro equazioni caratteristiche della funzione $\theta_{0,1}(z)$; dunque $\varphi(z) = \theta_{0,1}(z)$, e abbiamo

$$\theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta^2_{1,1}(z),$$

come volevamo dimostrare.

Dall'equazione (9) del n. 6, si ricava ancora:

$$\theta_{1,1}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = (-1)^{r+s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(\omega+(s+1)\omega')} \theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right),$$

$$\theta_{1,0}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = (-1)^{s}\; e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(\omega+(s+1)\omega')} \theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right);$$

onde

$$\theta_{1,0}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) - \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} \theta_{1,1}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = 0,$$

$$\theta_{1,0}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) + \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} \theta_{1,1}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = 0.$$

Dunque la funzione intera

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} \theta^2_{1,1}(z)$$

ha per radici tutte le quantità della forma

$$r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2},$$

le quali sono le sole radici di $\theta_{0,0}(z)$: e quindi sarà divisibile per $\theta_{0,0}(z)$, e avremo

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}\theta^2_{1,1}(z) = \varphi(z)\,\theta_{0,0}(z),$$

dove $\varphi(z)$ è funzione intera. Ma da questa si deduce facilmente

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z),\quad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\varphi(z),\quad \varphi\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = 0,\quad \varphi(0) = 1;$$

equazioni caratteristiche di $\theta_{0,0}(z)$: dunque $\varphi(z) = \theta_{0,0}(z)$, e quindi

$$\theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,0}(z) + \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}\theta^2_{1,1}(z),$$

come volevamo dimostrare.

Ora osserviamo che i due argomenti delle funzioni jacobiane sono i rapporti di z e di ω' alla quantità ω; quindi per ω si potrà prendere una quantità qualunque, purchè si varino contemporaneamente z ed ω' in modo che quei rapporti non mutino. Infatti, ponendo $\frac{\omega'}{\omega} = \varpi$, dall'equazioni (18), (19), (20) e (21) del n. 7, abbiamo

$$\theta_{1,1}(z, \varpi, \omega_1) = \frac{\omega_1}{\omega}\theta_{1,1}\left(\frac{z\omega}{\omega_1}, \varpi, \omega\right), \tag{3}$$

$$\theta_{\mu,\nu}(z, \varpi, \omega_1) = \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z\omega}{\omega_1}, \varpi, \omega\right), \text{ quando } \mu\nu = 0. \tag{4}$$

Potremo dunque disporre della quantità ω come meglio ci conviene, e stabilire tra ω e il rapporto ϖ, una relazione qualunque. Prendiamo questa relazione in modo da rendere più semplice la equazione (1); cioè prendiamo la relazione

$$\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right), \tag{5}$$

la quale, sostituendo i valori dati dall'equazioni (18) e (19) del n. 7, dà

$$\frac{\omega}{\pi} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n-1})^2 (1-q^{2n})^2}{(1-q^{2n-1})^2 (1+q^{2n})^2}. \tag{6}$$

Con questa relazione tra ω e $\frac{\omega'}{\omega}$, la equazione (1) diviene

$$\theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + \theta^2_{1,1}(z). \tag{7}$$

Poniamo quindi

$$\frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} = k, \tag{8}$$

e la (2) diverrà

$$\theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,0}(z) + k^2 \theta^2_{1,1}(z). \tag{9}$$

La quantità k, sostituendo i valori delle funzioni jacobiane dati dalle equazioni (18) e (19) del n. 7, è espressa in funzione di q dalla formula

$$k = 4\sqrt{q} \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n})^4}{(1+q^{2n-1})^4}, \tag{10}$$

e suol chiamarsi *modulo* delle funzioni jacobiane.

Dalla equazione (9), ponendovi $z = \frac{\omega}{2}$, si ricava

$$1 - k^2 = \frac{\theta^2_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Se prendiamo la relazione

$$k^2 + k'^2 = 1, \tag{11}$$

avremo

$$k' = \frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}; \tag{12}$$

e, sostituendo i valori dati dalle equazioni (19) e (21) del n. 7,

$$k' = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n-1})^4}{(1+q^{2n-1})^4}. \tag{13}$$

La quantità k' suol chiamarsi *modulo complementare* delle funzioni jacobiane.

Dall' equazioni (7), (9) e (11) si deduce

$$(14)\qquad \theta^2_{0,0}(z) = k'^2\,\theta^2_{1,0}(z) + k^2\,\theta^2_{0,1}(z)\,,$$

$$(15)\qquad \theta^2_{0,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + k'^2\,\theta^2_{1,1}(z)\,.$$

9.

Esprimiamo ora i valori delle funzioni jacobiane corrispondenti ai valori $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}$ della variabile z.

Dall' equazioni (19) e 21 del n. 7, si ottiene

$$\theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1\,.$$

Da queste e dall' equazioni (5) e (12) del n. 8, abbiamo

$$(1)\quad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,,\qquad (2)\quad \theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{k'}\,,\qquad (3)\quad \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,.$$

Dall'equazioni (19) e (20) del n. 7, si ricava

$$\theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{1}{i\sqrt{q}}\,,$$

dalla quale, dalla equazione (8) e dalla (7) dove sia posto $\frac{\omega+\omega'}{2}$ in luogo di z, si deduce:

$$(4)\quad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{kk'}}\,,\qquad (5)\quad \theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{k}{k'}}\,,$$

$$(6)\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = -\frac{i}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{k'}{k}}\,.$$

Dalle formule (2), (3) e (4) del n. 7, si deduce finalmente

$$(7)\quad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{k}}\,,\qquad (8)\quad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{k}}\,,$$

$$(9)\qquad \theta_{0,0}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{k}\,.$$

Dalle formule (2) e (2′) del n. 5, mediante i valori (1), (4), (7), si ottiene

$$(10)\qquad \operatorname{et}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi\omega}\,\sqrt[4]{k'}},\qquad (11)\qquad \operatorname{et}\frac{\omega'}{2\omega}=\frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}\,\sqrt[4]{k}\,\sqrt[8]{q^3}},$$

$$(12)\qquad \operatorname{et}\frac{\omega'+\omega}{2\omega}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}\,\sqrt[4]{kk'}\,\sqrt[8]{q^3}}.$$

Ponendo

$$A_0=\prod_1^\infty(1-q^{2n}),\qquad A_1=\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}),$$

$$B_0=\prod_1^\infty(1+q^{2n}),\qquad B_1=\prod_1^\infty(1+q^{2n-1});$$

abbiamo

$$\operatorname{et}\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\frac{B_0}{A_0},\qquad \operatorname{et}\frac{\omega'}{2\omega}=\frac{i}{2\pi\sqrt{q}}\frac{A_1}{A_0},\qquad \operatorname{et}\frac{\omega'+\omega}{2\omega}=\frac{1}{2\pi\sqrt{q}}\frac{B_1}{A_0};$$

onde

$$B_0=A_0\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\frac{1}{\sqrt[4]{k'}},\qquad A_1=\frac{A_0\sqrt{2\pi}\,\sqrt[8]{q}}{\sqrt{\omega}\,\sqrt[4]{k}},\qquad B_1=A_0\frac{\sqrt{2\pi}\,\sqrt[8]{q}}{\sqrt{\omega}\,\sqrt[4]{kk'}};$$

ma

$$A_0\,B_0\,A_1\,B_1=A_0,\qquad B_0\,A_1\,B_1=1;$$

onde

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{A_0^2}=2A_0\dfrac{\pi}{\omega}q^{\frac14}\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega kk'}}, & \dfrac{1}{B_0^2}=2A_0\,q^{\frac14}\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega k}},\\[2ex] \dfrac{1}{A_1^2}=A_0\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega k'}}, & \dfrac{1}{B_1^2}=A_0\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}. \end{cases}$$

Sostituendo i valori (13) nelle formule (18), (19), (20) e (21) del n. 7, abbiamo

$$(11)\qquad \begin{cases} \theta_{1,1}(z)=2A_0\,q^{\frac14}\sqrt{\dfrac{\pi}{kk'\omega}}\operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{\omega}\prod\limits_1^\infty\left(1-2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}\right),\\[2ex] \theta_{1,0}(z)=A_0\sqrt{\dfrac{\pi}{k'\omega}}\prod\limits_0^\infty\left(1-2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega}+q^{4n+2}\right),\\[2ex] \theta_{0,1}(z)=2A_0\,q^{\frac14}\sqrt{\dfrac{\pi}{k\omega}}\cos\dfrac{\pi z}{\omega}\prod\limits_1^\infty\left(1+2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}\right),\\[2ex] \theta_{0,0}(z)=A_0\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}\prod\limits_0^\infty\left(1+2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega}+q^{4n+2}\right). \end{cases}$$

10.

Se nelle formule (14), (15), (16) e (17) del n. 7, sostituiamo alle funzioni $\operatorname{et}\left(\pm\frac{z}{\omega}+\alpha\right)$ le serie di potenze intere di $e^{\frac{\pi i z}{\omega}}$ convergenti per qualunque valore finito di z dato nel n. 4, e a $\operatorname{sen}\left(\pm\frac{\pi z}{\omega}+\alpha\right)$ il suo valore in esponenziali, essendo i numeratori divisibili per i denominatori, avrem evidentemente in serie convergente per qualunque valore finito di z

$$\theta_{\mu,\nu}(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{n\pi i z}{\omega}}.$$

Applicando l'equazione caratteristica (5) del n. 6, si otterrà

$$A_{n+2}=(-1)^{\mu} A_n q^{n+1},$$

onde

$$A_{2n}=(-1)^{\mu n} A_0 q^{n^2}, \qquad A_{2n+1}=(-1)^{\mu n} A_1 q^{-\frac{1}{4}} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2};$$

e quindi

$$\theta_{\mu,\nu}(z)=A_0\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}}+A_1 q^{-\frac{1}{4}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i z}{\omega}}.$$

Applicando la equazione caratteristica (4) del n. 6, avremo

$$(1)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z)=A_{\mu,\nu}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)\frac{\pi i z}{\omega}}.$$

Poniamo

$$(2)\qquad \Theta_{\mu,\nu}(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)\frac{\pi i z}{\omega}};$$

ossia

$$(3)\qquad \Theta_{1,1}(z)=2i\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega},$$

$$(4)\qquad \Theta_{1,0}(z)=1+2\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n} q^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega},$$

(5) $$\Theta_{0,1}(z)=2\sum_{0}^{\infty}q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\frac{\pi z}{\omega},$$

(6) $$\Theta_{0,0}(z)=1+2\sum_{1}^{\infty}q^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega};$$

avremo

(7) $$\theta_{\mu,\nu}(z)=A_{\mu,\nu}\,\Theta_{\mu,\nu}(z),$$

dove $A_{\mu,\nu}$ sarà soltanto funzione di q. Jacobi indicò colla lettera H la funzione $\Theta_{1,1}$, colla lettera Θ la funzione $\Theta_{1,0}$.

Dalla (2) si deducono immediatamente l'equazioni

(8) $$\Theta_{\mu+2r,\nu}(z)=\Theta_{\mu,\nu}(z),\qquad (9)\quad \Theta_{\mu,\nu+2r}(z)=(-1)^{r\mu}\,\Theta_{\mu,\nu}(z),$$

(10) $$\Theta_{\mu+\mu',\,\nu+\nu'}(z)=e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(\nu' z+\frac{\nu'^2\omega'}{4}-\nu\frac{\mu'\omega}{2}\right)}\Theta_{\mu,\nu}\left(z+\frac{\mu'\omega}{2}+\frac{\nu'\omega'}{2}\right).$$

Dalle formule (2), (3) e (4) del n. 7, sostituendo i valori dati dalle equazioni (1), (4) e (7) del n. 9, abbiamo

(11) $$\begin{cases}\theta_{1,0}(z)=\dfrac{q^{\frac14}\sqrt{k}}{i}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\theta_{1,1}\left(z+\dfrac{\omega'}{2}\right),\qquad \theta_{0,1}(z)=\sqrt{k'}\,\theta_{1,1}\left(z+\dfrac{\omega}{2}\right),\\ \theta_{0,0}(z)=q^{\frac14}\sqrt{kk'}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\theta_{1,1}\left(z+\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\omega'}{2}\right),\end{cases}$$

e sostituendo in queste i valori dati dalla equazione (2), osservando la (7), e ponendo

$$A_{1,1}=\frac{A}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}},$$

si ottiene

$$A_{1,1}=\frac{A}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}},\qquad A_{1,0}=A\sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}},$$

$$A_{0,1}=A\sqrt{\frac{\pi}{k\omega}},\qquad A_{0,0}=A\sqrt{\frac{\pi}{\omega}};$$

e quindi

$$(12)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}(z) = \dfrac{A}{i}\sqrt{\dfrac{\pi}{kk'\omega}}\,\Theta_{1,1}(z)\,, & \theta_{1,0}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{k'\omega}}\,\Theta_{1,0}(z)\,, \\ \theta_{0,1}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{k\omega}}\,\Theta_{0,1}(z)\,, & \theta_{0,0}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}\,\Theta_{0,0}(z)\,. \end{cases}$$

Confrontando le equazioni (12) colle (11) del n. 9, e osservando che A ed A_0 sono funzioni soltanto di q, e che quindi il loro rapporto si potrà indicare con $\varphi(q)$, avremo

$$(13)\quad \begin{cases} \Theta_{1,1}(z) = 2i\varphi(q)\,q^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi z}{\omega}\,\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1 - 2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right), \\ \Theta_{1,0}(z) = \varphi(q)\,\prod\limits_{0}^{\infty}\left(1 - 2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n+2}\right), \\ \Theta_{0,1}(z) = 2\varphi(q)\,q^{\frac{1}{4}}\cos\dfrac{\pi z}{\omega}\,\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1 + 2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right), \\ \Theta_{0,0}(z) = \varphi(q)\,\prod\limits_{0}^{\infty}\left(1 + 2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n+2}\right). \end{cases}$$

Per determinare $\varphi(q)$ osserviamo che ponendo x in luogo di $\dfrac{\pi z}{\omega}$, si hanno le due identità

$$(14)\quad \sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\,\mathrm{sen}\,(2n+1)x = \varphi(q)\,\mathrm{sen}\,x\,\prod_{1}^{\infty}(1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}),$$

$$(15)\quad 1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx = \varphi(q)\,\prod_{0}^{\infty}(1 - 2q^{2n+1}\cos 2x + q^{4n+2})\,.$$

Ponendo in queste identità q^2 in luogo di q, moltiplicando una per l'altra, e osservando che si ha identicamente

$$\prod_{1}^{\infty}(1 - 2q^{4n}\cos 2x + q^{4n})\,\prod_{0}^{\infty}(1 - 2q^{4n+2}\cos 2x + q^{8n+4})$$
$$= \prod_{1}^{\infty}(1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n})\,,$$

si ottiene

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi(q)}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\,\mathrm{sen}\,(2n+1)x$$
$$= \sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{2n(n+1)}\,\mathrm{sen}\,(2n+1)x\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{2n^2}\cos 2nx\right).$$

Riducendo il secondo membro, mediante la formula

$$2 \operatorname{sen} px \cos qx = \operatorname{sen}(p+q)x + \operatorname{sen}(p-q)x,$$

ed eguagliando i termini che contengono $\operatorname{sen} x$, nei due membri, si ha

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi(q)} = 1 + \sum_1^\infty q^{2n(2n+1)} + \sum_1^\infty q^{2n(2n-1)} = \sum_0^\infty q^{n(n+1)}.$$

Ma ponendo nella (14) $x = \frac{\pi}{2}$, abbiamo

$$\sum_0^\infty q^{n(n+1)} = \varphi(q) \prod_1^\infty (1+q^{2n})^2.$$

Onde

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi^2(q)} = \prod_1^\infty (1+q^{2n})^2, \qquad \frac{\varphi(q^2)}{\varphi(q)} = \prod_1^\infty (1+q^{2n}) = \frac{\prod_1^\infty (1-q^{4n})}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})},$$

$$\frac{\varphi(q)}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})} = \frac{\varphi(q^2)}{\prod_1^\infty (1-q^{4n})} = \frac{\varphi(q^4)}{\prod_1^\infty (1-q^{8n})} = \cdots = \frac{\varphi(q^{2^r})}{\prod_1^\infty (1-q^{2^r n})}.$$

Ma essendo $\operatorname{mod} q < 1$, ed avendosi dalla (14) $\varphi(0) = 1$, sarà

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varphi(q^r)}{\prod_1^\infty (1-q^{2^r n})} = 1,$$

onde

$$\varphi(q) = \prod_1^\infty (1-q^{2n}) = A_0.$$

Sostituendo questo valore nelle equazioni (13), e confrontando colle (11) del n. 9, si ottiene

$$(16) \quad \begin{cases} \theta_{1,1}(z) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}}\,\Theta_{1,1}(z), & \theta_{1,0}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}\,\Theta_{1,0}(z), \\ \theta_{0,1}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k\omega}}\,\Theta_{0,1}(z), & \theta_{0,0}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,\Theta_{0,0}(z). \end{cases}$$

Combinando l'equazioni (16) colle prime nove del n. 9, si hanno i seguenti valori per $\Theta_{\mu,\nu}(0)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega'}{2}\right)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)$

$$(17) \quad \Theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = i\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}, \qquad (18) \quad \Theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = -q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}},$$

(19) $\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$, (20) $\Theta_{1,0}(0)=\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}}$,

(21) $\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$, (22) $\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}$,

(23) $\Theta_{0,1}(0)=\sqrt{\frac{k\omega}{\pi}}$, (24) $\Theta_{0,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$,

(25) $\Theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=-iq^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}}$, (26) $\Theta_{0,0}(0)=\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$,

(27) $\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{k'\omega}{\pi}}$, (28) $\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}$.

11.

Passiamo ora alla determinazione delle relazioni che esistono tra le funzioni jacobiane della somma e della differenza di due quantità qualunque e le funzioni jacobiane di queste medesime quantità.

Teorema. *Qualunque siano i numeri interi μ, ν, μ', ν' e le quantità z e w abbiamo sempre*

$$(1)\qquad \begin{aligned} &2\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)\\ &=P_{0,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{0,1}(z)+P_{1,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{1,1}(z), \end{aligned}$$

dove

$$(2)\qquad P_{\eta,\varepsilon}(z)=\Theta_{\mu+\eta,\nu+\varepsilon}(z)\,\Theta_{\mu'+\eta,\nu'+\varepsilon}(z)\,\Theta_{\mu-\mu'+\eta,\varepsilon}(w)\,\Theta_{\eta,\nu-\nu'+\varepsilon}(w).$$

Le radici delle funzioni intere $\Theta_{\mu,\nu}(z+w)$ e $\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)$ sono rispettivamente le quantità delle due forme

$$-w+(2r+\mu-1)\frac{\omega}{2}+(2s+\nu-1)\frac{\omega'}{2},$$

$$w+(2r+\mu'-1)\frac{\omega}{2}+(2s+\nu'-1)\frac{\omega'}{2}.$$

Ora queste quantità sono tutte anche radici della funzione intera

$$(3)\qquad F(z)=P_{0,0}(z)+P_{1,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{0,1}(z)+(-1)^{\mu}P_{1,1}(z).$$

Infatti, dalla equazione (10) del numero precedente, riducendo colle equazioni (8) e (9) dello stesso numero, abbiamo

$$P_{\eta,\varepsilon}\left(w + (2r + \mu' - 1)\frac{\omega}{2} + (2s + \nu' - 1)\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$= (-1)^{\varepsilon(\mu'-1)} e^{\sigma}\, \Theta_{\mu-\mu'+\eta+1,\nu-\nu'+\varepsilon+1}(w)\, \Theta_{\eta+1,\varepsilon+1}(w)\, \Theta_{\mu-\mu'+\eta,\varepsilon}(w)\, \Theta_{\eta,\nu-\nu'+\varepsilon}(w)\,,$$

$$P_{\eta,\varepsilon}\left(- w + (2r + \mu - 1)\frac{\omega}{2} + (2s + \nu - 1)\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$= (-1)^{\varepsilon(\mu'-1)} e^{\sigma'}\, \Theta_{\mu-\mu'+\eta+1,\nu-\nu'+\varepsilon+1}(w)\, \Theta_{\eta+1,\varepsilon+1}(w)\, \Theta_{\mu-\mu'+\eta,\varepsilon}(w)\, \Theta_{\eta,\nu-\nu'+\varepsilon}(w)\,,$$

dove σ e σ' sono quantità indipendenti da ε e da η.

Sostituendo questi valori nel secondo membro della equazione (3), si ottiene in ambedue i casi per risultato il prodotto di un fattore esponenziale moltiplicato per la somma

$$\begin{aligned} &\Theta_{\mu-\mu'+1,\nu-\nu'+1}(w)\, \Theta_{1,1}(w)\, \Theta_{\mu-\mu',0}(w)\, \Theta_{0,\nu-\nu'}(w) \\ +\, &\Theta_{\mu-\mu',\nu-\nu'+1}(w)\, \Theta_{0,1}(w)\, \Theta_{\mu-\mu'+1,0}(w)\, \Theta_{1,\nu-\nu'}(w) \\ -\, &\Theta_{\mu-\mu'+1,\nu-\nu'}(w)\, \Theta_{1,0}(w)\, \Theta_{\mu-\mu',1}(w)\, \Theta_{0,\nu-\nu'+1}(w) \\ -\, &\Theta_{\mu-\mu',\nu-\nu'}(w)\, \Theta_{0,0}(w)\, \Theta_{\mu-\mu'+1,1}(w)\, \Theta_{1,\nu-\nu'+1}(w)\,. \end{aligned}$$

Ora, se $\mu - \mu'$ è pari il primo termine è eguale e di segno contrario al quarto, il secondo è eguale e di segno contrario al terzo; se $\mu - \mu'$ è dispari il primo termine è eguale e di segno contrario al terzo, il secondo è eguale e di segno contrario al quarto; quindi questa somma è sempre identicamente eguale a zero, e abbiamo

$$F\left(w + (2r + \mu' - 1)\frac{\omega}{2} + (2s + \nu' - 1)\frac{\omega'}{2}\right) = 0\,,$$
$$F\left(- w + (2r + \mu - 1)\frac{\omega}{2} + (2s + \nu - 1)\frac{\omega'}{2}\right) = 0\,,$$

e tutte le radici delle due funzioni intere $\Theta_{\mu,\nu}(z + w)$ e $\Theta_{\mu',\nu'}(z - w)$ sono anche radici della funzione intera $F(z)$.

Dunque, avremo

$$F(z) = \varphi(z)\, \Theta_{\mu,\nu}(z + w)\, \Theta_{\mu',\nu'}(z - w)\,, \tag{4}$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera.

Ora, rammentando l'equazioni caratteristiche delle funzioni jacobiane, si ottiene

$$F(z + \omega) = (-1)^{\nu+\nu'} F(z)\,, \qquad F(z + \omega') = (-1)^{\mu+\mu'} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(2z+\omega')} F(z)\,,$$

nelle quali sostituendo il valore (4), e riducendo coll'equazioni caratteristiche delle funzioni jacobiane, abbiamo

$$\varphi(z + \omega) = \varphi(z)\,, \qquad \varphi(z + \omega') = \varphi(z)\,,$$

e quindi $\varphi(z)$ eguale a una costante C; e

$$F(z) = C\,\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)\,. \tag{5}$$

Per determinare la costante C, poniamo nella equazione (5)

$$w = 0\,, \qquad z = \mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\,.$$

Poichè dalla equazione (10) del numero precedente, si ottiene

$$P_{\eta,\varepsilon}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right) = (-1)^{\varepsilon\mu+\nu'(\mu-\mu')}\, e^{-\frac{\pi i}{2\omega}(\nu'^2\omega' - \mu(\nu+\nu')\omega)}\,\Theta^2_{\mu-\mu'+\eta,\varepsilon}(0)\,\Theta^2_{\eta,\nu-\nu'+\varepsilon}(0)$$

e

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right)\Theta_{\mu'\nu'}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$= (-1)^{\nu'(\mu-\mu')}\, e^{-\frac{\pi i}{2\omega}(\nu'^2\omega' - \mu(\nu+\nu')\omega)}\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)$$

avremo

$$C\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0) = \Theta^2_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu'}(0) + \Theta^2_{\mu-\mu'+1,0}(0)\,\Theta^2_{1,\nu-\nu'}(0)$$

$$+\,\Theta^2_{\mu-\mu',1}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu'+1}(0) + \Theta^2_{\mu-\mu'+1,1}(0)\,\Theta^2_{1,\nu-\nu'+1}(0)\,.$$

Ora se $\mu - \mu' = 1$, $\nu - \nu' = 1$, si annullano il secondo e il terzo termine, e il primo è eguale al quarto; se $\mu - \mu' = 1$, $\nu - \nu' = 0$, si annullano il terzo e il quarto termine, e il primo è eguale al secondo; se $\mu - \mu' = 0$, $\nu - \nu' = 1$, si annullano il secondo e il quarto termine, e il primo è eguale al terzo. Dunque in questi tre casi, abbiamo

$$C\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0) = 2\Theta^2_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu'}(0)\,,$$

ossia

$$C = 2\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)\,.$$

Se poi $\mu - \mu' = 0$ e $\nu - \nu' = 0$, il solo quarto termine si annulla, e si ha

$$C\,\Theta^2_{0,0}(0) = \Theta^4_{0,0}(0) + \Theta^4_{1,0}(0) + \Theta^4_{0,1}(0)\,.$$

Ma dall'equazioni (20), (23) e (26) del n. 10, abbiamo

$$\Theta^4_{0,1}(0) + \Theta^4_{1,0}(0) = \Theta^4_{0,0}(0)\,,$$

onde

$$C = 2\Theta^2_{0,0}(0)\,.$$

Dunque, qualunque siano $\mu - \mu'$ e $\nu - \nu'$, avremo sempre

$$C = 2\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)\,,$$

e quindi

$$2\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)=F(z)$$

come volevamo dimostrare.

Prendendo nella equazione (1) per μ, ν, μ' e ν' le 16 differenti combinazioni dei valori 0 e 1, e sostituendo alle funzioni $\Theta_{\mu,\nu}$ i loro valori espressi per le funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ dalle equazioni (16) del n. 10, abbiamo le seguenti formule di addizione per le funzioni jacobiane

$$(6)\qquad \theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w)=\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{1,0}(w)-\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{1,1}(w),$$

$$(7)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w)=\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{1,0}(w)-k^2\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{1,1}(w),$$

$$(8)\qquad \theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w)=\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{0,1}(w)-\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{0,0}(w),$$

$$(9)\qquad \theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w)=\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{0,0}(w)-k^2\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{0,1}(w);$$

$$(10)\qquad \theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)+\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w),$$

$$(11)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)-\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w),$$

$$(12)\qquad \theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w)=\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)-k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w),$$

$$(13)\qquad \theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w)=\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)+k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w);$$

$$(14)\qquad \theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,0}(w)+\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,1}(w),$$

$$(15)\qquad \theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,0}(w)-\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,1}(w),$$

$$(16)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w)=\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,0}(w)+k^2\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{1,1}(w),$$

$$(17)\qquad \theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w)=\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,0}(w)-k^2\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{1,1}(w);$$

$$(18)\qquad \theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)+\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,0}(w),$$

$$(19)\qquad \theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)-\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,0}(w).$$

$$(20)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w)=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)+\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,1}(w),$$

$$(21)\qquad \theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w)=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)-\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,1}(w).$$

12.

Ponendo nelle formule (10) e (11) del numero precedente $z+w$ in luogo di z, si ottiene

$$\theta_{1,1}(z+2w)\,\theta_{1,0}(z)=\theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)$$
$$+\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,$$

$$\theta_{1,0}(z+2w)\,\theta_{1,1}(z)=\theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)$$
$$-\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,.$$

onde

$$\theta_{1,0}(z)\,\{\theta_{1,1}(z+2w)-\theta_{1,1}(z)\}-\theta_{1,1}(z)\,\{\theta_{1,0}(z+2w)-\theta_{1,0}(z)\}$$
$$=2\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,.$$

Dividendo i due membri di questa equazione per $2w$, e passando quindi al limite per $w=0$, si ottiene

$$\theta_{1,0}(z)\frac{\partial\theta_{1,1}(z)}{\partial z}-\theta_{1,1}(z)\frac{\partial\theta_{1,0}(z)}{\partial z}=\theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,. \tag{1}$$

Analogamente dall'equazioni (12) e (13), abbiamo

$$\theta_{0,1}(z)\frac{\partial\theta_{0,0}(z)}{\partial z}-\theta_{0,0}(z)\frac{\partial\theta_{0,1}(z)}{\partial z}=k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,, \tag{2}$$

e dall'equazioni (14) e (15)

$$\theta_{0,1}(z)\frac{\partial\theta_{1,1}(z)}{\partial z}-\theta_{1,1}(z)\frac{\partial\theta_{0,1}(z)}{\partial z}=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,; \tag{3}$$

e dall'equazioni (16) e (17)

$$\theta_{0,0}(z)\frac{\partial\theta_{1,0}(z)}{\partial z}-\theta_{1,0}(z)\frac{\partial\theta_{0,0}(z)}{\partial z}=k^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,, \tag{4}$$

e dalle ultime quattro

$$\theta_{0,0}(z)\frac{\partial\theta_{1,1}(z)}{\partial z}-\theta_{1,1}(z)\frac{\partial\theta_{0,0}(z)}{\partial z}=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,, \tag{5}$$

$$\theta_{0,1}(z)\frac{\partial\theta_{1,0}(z)}{\partial z}-\theta_{1,0}(z)\frac{\partial\theta_{0,1}(z)}{\partial z}=\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,. \tag{6}$$

Di queste sei equazioni tre sono una conseguenza delle altre tre, come è facile a verificarsi. Basterà dunque considerarne tre sole. Prenderemo le tre (1), (4), (6) che contengono $\theta_{1,0}$, e le scriveremo sotto la forma

$$\frac{\partial\log\theta_{1,1}(z)}{\partial z}-\frac{\partial\log\theta_{1,0}(z)}{\partial z}=\frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)}\,, \tag{7}$$

$$(8)\qquad \frac{\partial \log \theta_{1,0}(z)}{\partial z} - \frac{\partial \log \theta_{0,1}(z)}{\partial z} = \frac{\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)}.$$

$$(9)\qquad \frac{\partial \log \theta_{1,0}(z)}{\partial z} - \frac{\partial \log \theta_{0,0}(z)}{\partial z} = k^2\,\frac{\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z)}{\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)}.$$

Derivando queste tre equazioni, e riducendo colle altre equazioni di questo numero, si ottiene

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 \log \theta_{1,1}(z)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \log \theta_{1,0}(z)}{\partial z^2} = -\frac{\theta_{1,0}^2(z)}{\theta_{1,1}^2(z)} + k^2\,\frac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)},$$

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 \log \theta_{0,1}(z)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \log \theta_{1,0}(z)}{\partial z^2} = -\frac{\theta_{0,0}^2(z)}{\theta_{0,1}^2(z)} + k^2\,\frac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)},$$

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 \log \theta_{0,0}(z)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \log \theta_{1,0}(z)}{\partial z^2} = -k^2\,\frac{\theta_{0,1}^2(z)}{\theta_{0,0}^2(z)} + k^2\,\frac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)};$$

onde

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 \log \theta_{1,1}(z)}{\partial z^2} + \frac{\theta_{1,0}^2(z)}{\theta_{1,1}^2(z)} = \frac{\partial^2 \log \theta_{1,0}(z)}{\partial z^2} + k^2\,\frac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)}$$

$$= \frac{\partial^2 \log \theta_{0,1}(z)}{\partial z^2} + \frac{\theta_{0,0}^2(z)}{\theta_{0,1}^2(z)} = \frac{\partial^2 \log \theta_{0,0}(z)}{\partial z^2} + k^2\,\frac{\theta_{0,1}^2(z)}{\theta_{0,0}^2(z)} = \varphi(z).$$

La funzione $\varphi(z)$ sarà una funzione intera, non potendo divenire infinita per nessun valore finito di z; perchè le quattro espressioni eguali a $\varphi(z)$ non possono avere infiniti comuni, non avendo le funzioni $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,0}$, $\theta_{0,1}$, $\theta_{0,0}$ radici comuni.

Ora, poichè

$$\theta_{\mu,\nu}(z+\omega) = (-1)^\nu\,\theta_{\mu,\nu}(z),$$

$$\theta_{\mu,\nu}(z+\omega') = (-1)^\mu\,e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\,\theta_{\mu,\nu}(z),$$

sarà

$$\frac{\partial^2 \log \theta_{\mu,\nu}(z+\omega)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \log \theta_{\mu,\nu}(z)}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial^2 \log \theta_{\mu,\nu}(z+\omega')}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \log \theta_{\mu,\nu}(z)}{\partial z^2};$$

e quindi

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega') = \varphi(z);$$

e perciò $\varphi(z)$ dovrà essere eguale a una costante C, e avremo

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \theta_{1,1}(z)}{\partial z^2} + \dfrac{\theta_{1,0}^2(z)}{\theta_{1,1}^2(z)} = C, & \dfrac{\partial^2 \log \theta_{0,1}(z)}{\partial z^2} + \dfrac{\theta_{0,0}^2(z)}{\theta_{0,1}^2(z)} = C. \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \log \theta_{1,0}(z)}{\partial z^2} + k^2\,\dfrac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)} = C, & \dfrac{\partial^2 \log \theta_{0,0}(z)}{\partial z^2} + k^2\,\dfrac{\theta_{0,1}^2(z)}{\theta_{0,0}^2(z)} = C. \end{cases}$$

Per determinare la costante C poniamo

$$(15)\qquad \chi_{\mu,\nu}(z) = e^{-\frac{Cz^2}{2}}\,\theta_{\mu,\nu}(z):$$

e sostituendo nelle equazioni (14), avremo

$$(16)\quad \frac{\partial^2 \log \chi_{1,1}(z)}{\partial z^2} = -\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}, \qquad (17)\quad \frac{\partial^2 \log \chi_{1,0}(z)}{\partial z^2} = -k^2 \frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)},$$

$$(18)\quad \frac{\partial^2 \log \chi_{0,1}(z)}{\partial z^2} = -\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}, \qquad (19)\quad \frac{\partial^2 \log \chi_{0,0}(z)}{\partial z^2} = -k^2 \frac{\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)},$$

Dalla equazione (15), ponendo mente all' equazioni caratteristiche delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}$, si ottiene

$$\log \chi_{\mu,\nu}(z+\omega) = -C\omega z - C\frac{\omega^2}{2} + \pi i\nu + \log \chi_{\mu,\nu}(z),$$

$$\log \chi_{\mu,\nu}(z+\omega') = -\left(C\omega' + \frac{2\pi i}{\omega}\right)\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) + \pi i\mu + \log \chi_{\mu,\nu}(z);$$

onde

$$(20)\quad \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega)} \frac{\partial \chi_{\mu,\nu}(z+\omega)}{\partial z} - \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z)} \frac{\partial \chi_{\mu,\nu}(z)}{\partial z} = -C\omega,$$

$$(21)\quad \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega')} \frac{\partial \chi_{\mu,\nu}(z+\omega')}{\partial z} - \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z)} \frac{\partial \chi_{\mu,\nu}(z)}{\partial z} = -\left(C\omega' + \frac{2\pi i}{\omega}\right).$$

Prendo nella equazione (20) $\mu = 1$, $\nu = 0$, $z = -\frac{\omega}{2}$, e osservando che $\chi_{1,0}(z)$ è una funzione intera pari, e quindi la sua derivata è dispari, ottengo

$$-C\omega = \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Nella equazione (21), pongo $\mu = 1$, $\nu = 0$, $z = \frac{\omega - \omega'}{2}$, ed osservando che dalla equazione (20) si ha

$$\frac{\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)} = -C\omega - \frac{\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)},$$

ottengo

$$(22)\quad \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} = -C\omega - C\omega' - \frac{2\pi i}{\omega}.$$

Pongo

$$(23)\qquad \eta = \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,, \qquad \eta' = \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} - \eta\,.$$

ed ho

$$(24)\qquad C = -\frac{\eta}{\omega}\,.$$

Sostituendo nella (22)

$$(25)\qquad \eta\omega' - \eta'\omega = 2\pi i\,,$$

e le equazioni (20) e (21) divengono

$$\frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+\omega)}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega)} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = \eta\,, \qquad \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+\omega')}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega')} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = \eta'\,;$$

onde

$$(26)\qquad \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+m\omega+n\omega')}{\chi_{\mu,\nu}(z+m\omega+n\omega')} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = m\eta + n\eta'\,.$$

13.

Le funzioni intere $\chi_{\mu,\nu}(z)$ sodisfano ad equazioni differenziali di secondo ordine che ci permettono di calcolare i coefficienti delle serie di potenze positive e intere di z, per le quali si possono esprimere. Ripeteremo qui il processo di calcolo impiegato a questo modo dal sig. Weierstrass (1).

Se poniamo

$$(1)\qquad \frac{\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)} = x\,,$$

l'equazione (1) del n. 12 darà

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)\,;$$

onde

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3\,.$$

Si derivi la equazione (2) riguardandovi x funzione di k: avremo

$$\frac{\partial x}{\partial z}\,\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial k} = \left(-(1+k^2)x + 2k^2x^3\right)\frac{\partial x}{\partial k} - kx^2(1-x^2)\,,$$

(1) Vedi *Journal von Crelle*, t. 52. La funzione $\chi_{1,0}(z)$ è la funzione $\mathrm{Al}(z)$ del sig. Weierstrass.

$$\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial k}-\frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-kx^2(1-x^2),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial k}:\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\partial z}=\frac{-kx^2}{1-k^2x^2}=-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1-k^2x^2}-1\right). \tag{3}$$

Ma dall'equazione (12) del n. 12 si ha

$$\frac{\partial^2\log\frac{\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)}}{\partial z^2}=\frac{k^2\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)}-\frac{k^2\theta_{0,1}^2(z)}{\theta_{0,0}^2(z)},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log(1-k^2x^2)}{\partial z^2}=k^2x^2-\frac{k^2(1-x^2)}{1-k^2x^2},$$

e a cagione della equazione (17)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log(1-k^2x^2)}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^2}+\frac{1-k^2}{1-k^2x^2}-1,$$

onde

$$\frac{1-k^2}{1-k^2x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log(1-k^2x^2)}{\partial z}+z\right)}{\partial z}.$$

Confrontando colla equazione (3)

$$k(1-k^2)\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial k}:\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\partial z}-(1-k^2)=-\frac{\partial\left(\frac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log(1-k^2x^2)}{\partial z}+z\right)}{\partial z}.$$

Integrando rispetto a z, e osservando che annullandosi per $z=0$, $\frac{\partial x}{\partial k}$, $\chi'_{1,0}(z)$, $\theta'_{0,0}(z)$, la costante dell'integrazione deve essere eguale a zero, si ha

$$k(1-k^2)\frac{\partial x}{\partial k}:\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial\log(1-k^2x^2)}{\partial z}-k^2z,$$

ed essendo

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\log(1-k^2x^2)}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{k^2x}{1-k^2x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2=k^2x(1-x^2),$$

si ottiene

$$k(1-k^2)\frac{\partial x}{\partial k}=k^2x(1-x^2)-\left(k^2z+\frac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial z}. \tag{4}$$

Moltiplicando per $4k^2x$, e osservando che dall'equazione (17) del n. 12 si ha

$$k^2x^2=-\frac{\partial^2\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^2}, \tag{5}$$

e perciò

$$2k^2x\frac{\partial x}{\partial k}=-\frac{\partial^3\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^2\,\partial k}-2kx^2\,,\qquad 2k^2x\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\partial^3\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^3}\,,$$

otteniamo

$$(6)\quad 2k(1-k^2)\frac{\partial^3\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^2\,\partial k}+2k^2z\frac{\partial^3\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^3}+2\frac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}\;\frac{\partial^3\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^3}\,.$$
$$+4k^2x^2-4k^4x^4=0\,;$$

onde, poichè

$$2k^2z\frac{\partial^3\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^3}=2\frac{\partial^2\left(k^2z\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}\right)}{\partial z^2}-4k^2\frac{\partial^2\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^2}\,,$$

$$2\frac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}\;\frac{\partial^3\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^3}=\frac{\partial^2\left(\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2}{\partial z^2}-2\left(\frac{\partial^2\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^2}\right)^2$$
$$=\frac{\partial^2\left(\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2}{\partial z^2}-2k^4x^4\,;$$

avremo

$$\frac{\partial^2\left\{2k(1-k^2)\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial k}+2k^2z\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}+\left(\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2\right\}}{\partial z^2}$$
$$+4k^2(1+k^2)x^2-6k^4x^4=0\,.$$

Ma dalla (5) si ha

$$\frac{\partial^4\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^4}=-2k^2x\frac{\partial^2x}{\partial z^2}-2k^2\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2=-2k^2+4k^2(1+k^2)x^2-6k^4x^4\,.$$

onde

$$\frac{\partial^2\left\{2k(1-k^2)\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}+2k^2z\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}+\left(\dfrac{\partial\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2\right\}}{\partial z^2}$$
$$+\frac{\partial^4\log\chi_{1,0}(z)}{\partial z^2}+2k^2=0\,.$$

Integrando, e osservando che si ha

$$\chi_{1,0}(z)\;\chi''_{1,0}(z)-\chi'^2_{1,0}(z)=-k^2\chi^2_{1,1}(z)\,,$$

e quindi

$$\chi''_{1,0}(0)=0\,,$$

ed anche

$$\chi'''_{1,0}(0) = 0\,,$$

perchè $\chi_{1,0}(z)$ è pari, e che perciò non deve aggiungersi alcuna costante, si ottiene

$$\frac{\partial^2 \log \chi_{1,0}(z)}{\partial z^2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \log \chi_{1,0}(z)}{\partial k} + 2k^2 z \frac{\partial \log \chi_{1,0}(z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial \log \chi_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2 + k^2 z^2 = 0\,,$$

$$(7)\quad \frac{\partial^2 \chi_{1,0}(z)}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial \chi_{1,0}(z)}{\partial z} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \chi_{1,0}(z)}{\partial k} + k^2 z^2 \chi_{1,0}(z) = 0\,.$$

Analogamente si trova

$$(8)\quad \frac{\partial^2 \chi_{1,1}(z)}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial \chi_{1,1}(z)}{\partial z} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \chi_{1,1}(z)}{\partial k} + (1-k^2+k^2 z^2)\chi_{1,1}(z) = 0\,,$$

$$(9)\quad \frac{\partial^2 \chi_{0,1}(z)}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial \chi_{0,1}(z)}{\partial z} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \chi_{0,1}(z)}{\partial k} + (1+k^2 z^2)\chi_{0,1}(z) = 0\,,$$

$$(10)\quad \frac{\partial^2 \chi_{0,0}(z)}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial \chi_{0,0}(z)}{\partial z} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \chi_{0,0}(z)}{\partial k} + (k^2+k^2 z^2)\chi_{0,0}(z) = 0\,.$$

Ora $\chi_{1,0}(z)$ è una funzione intera pari che diviene eguale all'unità per $z=0$, come risulta dall'equazione (15) del n. 12; dunque avremo

$$\chi_{1,0}(z) = 1 + A_1 z^2 + A_2 z^4 + A_3 z^6 + \cdots$$

Dall'equazione (7) si deduce

$$A_1 = 0\,,\quad 3.4A_2 + k^2 = 0\,,\quad 5.6A_3 + 2.4k^2 A_2 + 2k(1-k^2)\frac{\partial A_2}{\partial k} = 0\,,$$

$$2r(2r-1)A_r + 4(r-1)k^2 A_{r-1} + k^2 A_{r-2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial A_{r-1}}{\partial k} = 0\,;$$

onde i valori dei coefficienti in funzione di k. Analogamente per le altre funzioni $\chi_{\mu,\nu}(z)$.

Ottenute l'espressioni analitiche delle funzioni $\chi_{\mu,\nu}(z)$ possiamo riguardare compiutamente determinati mediante l'equazioni (23) del numero precedente i valori di η e di η', e quindi il valore della costante C, che comparisce nelle equazioni (14) dello stesso numero, e abbiamo

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \theta_{1,1}(z)}{\partial z^2} = -\dfrac{\eta}{\omega} - \dfrac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}\,, & \dfrac{\partial^2 \log \theta_{1,0}(z)}{\partial z^2} = -\dfrac{\eta}{\omega} - k^2\dfrac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \log \theta_{0,1}(z)}{\partial z^2} = -\dfrac{\eta}{\omega} - \dfrac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}\,, & \dfrac{\partial^2 \log \theta_{0,0}(z)}{\partial z^2} = -\dfrac{\eta}{\omega} - k^2\dfrac{\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}\,. \end{cases}$$

Sostituendo alle funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ le loro espressioni per mezzo delle $\Theta_{\mu,\nu}(z)$, abbiamo le quattro formule

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 \log \Theta_{1,1}(z)}{\partial z^2} = -\frac{\eta}{\omega} + k\,\frac{\Theta_{1,0}^2(z)}{\Theta_{1,1}^2(z)},$$

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 \log \Theta_{1,0}(z)}{\partial z^2} = -\frac{\eta}{\omega} + k\,\frac{\Theta_{1,1}^2(z)}{\Theta_{1,0}^2(z)},$$

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 \log \Theta_{0,1}(z)}{\partial z^2} = -\frac{\eta}{\omega} - k\,\frac{\Theta_{0,0}^2(z)}{\Theta_{0,1}^2(z)},$$

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 \log \Theta_{0,0}(z)}{\partial z^2} = -\frac{\eta}{\omega} - k\,\frac{\Theta_{0,1}^2(z)}{\Theta_{0,0}^2(z)}.$$

14.

Le funzioni $\Theta_{\mu,\nu}$ sono a due variabili $\frac{\pi z}{\omega}$ e q, e sodisfano a una equazione a derivate parziali molto semplice. Poniamo

$$(1)\qquad \frac{\pi z}{\omega} = x;$$

avremo

$$(2)\qquad \Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\mu n}\, q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)ix},$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 \Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\partial x^2} = -\sum (-1)^{\mu n} (2n+\nu)^2\, q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)ix},$$

$$\frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\partial q} = \frac{1}{4}\sum (-1)^{\mu n} (2n+\nu)^2\, q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2 - 1} e^{(2n+\nu)ix};$$

onde

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 \Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\partial x^2} = -4q\,\frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\partial q}.$$

Le quantità k, k' e ω sono tutte funzioni di q, delle quali facilmente determineremo le derivate, valendosi delle equazioni differenziali che abbiamo trovate.

Prendiamo l'equazione (10) del n. 12, cioè

$$(4)\qquad \frac{1}{\theta_{1,1}(z)}\frac{\partial^2 \theta_{1,1}(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{\theta_{1,0}(z)}\frac{\partial^2 \theta_{1,0}(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{\theta_{1,0}^2(z)}\left(\frac{\partial \theta_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{\theta_{1,1}^2(z)}\left(\frac{\partial \theta_{1,1}(z)}{\partial z}\right)^2 = -\frac{\theta_{1,0}^2(z)}{\theta_{1,1}^2(z)} + k^2\,\frac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)}.$$

Ora, abbiamo

$$\frac{1}{\theta_{1,1}(z)}\frac{\partial^2\theta_{1,1}(z)}{\partial z^2}-\frac{1}{\theta_{1,0}(z)}\frac{\partial^2\theta_{1,0}(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{\Theta_{1,1}(z)}\frac{\partial^2\Theta_{1,1}(z)}{\partial z^2}-\frac{1}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial^2\Theta_{1,0}(z)}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{\Theta_{1,1}(z)}\frac{\partial^2\Theta_{1,1}(z)}{\partial x^2}-\frac{1}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial^2\Theta_{1,0}(z)}{\partial x^2}\right)=-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\log\dfrac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}}{\partial q},$$

e a cagione dell'equazione (1) del n. 12

$$\frac{1}{\theta_{1,1}^2(z)}\left(\frac{\partial\theta_{1,1}(z)}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{\theta_{1,0}^2(z)}\left(\frac{\partial\theta_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2$$

$$=\frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}^2(z)\,\theta_{1,1}^2(z)}\left(\theta_{1,0}(z)\frac{\partial\theta_{1,1}(z)}{\partial z}+\theta_{1,1}(z)\frac{\partial\theta_{1,0}(z)}{\partial z}\right).$$

Onde l'equazione (1) diviene

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\log\dfrac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}}{\partial q}-\frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,1}^2(z)\,\theta_{1,0}^2(z)}\left(\theta_{1,0}(z)\frac{\partial\theta_{1,1}(z)}{\partial z}+\theta_{1,1}(z)\frac{\partial\theta_{1,0}(z)}{\partial z}\right)$$

$$=k^2\frac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)}-\frac{\theta_{1,0}^2(z)}{\theta_{1,1}^2(z)}.$$

Poniamo $x=\frac{\pi}{2}$, e quindi $z=\frac{\omega}{2}$, ed, essendo

$$\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{1}{i\sqrt{k}}\frac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}=1,\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)=0,$$

avremo

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\log\sqrt{k}}{\partial q}=k^2-1,$$

ossia

(5)
$$\frac{\partial k}{\partial q}=\frac{kk'^2\omega^2}{2q\pi^2},$$

e poichè

$$k\frac{\partial k}{\partial q}+k'\frac{\partial k'}{\partial q}=0,$$

sarà

$$\frac{\partial k'}{\partial q} = -\frac{k'k^2\omega^2}{2q\pi^2}. \tag{6}$$

Dalla equazione (15) del n. 13, abbiamo

$$\frac{1}{\Theta_{0,0}(z)}\frac{\partial^2\Theta_{0,0}(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{\Theta_{0,0}^2(z)}\left(\frac{\partial\Theta_{0,0}(z)}{\partial z}\right)^2 = -\frac{\eta}{\omega} - k\frac{\Theta_{0,1}^2(z)}{\Theta_{0,0}^2(z)}.$$

Ora a cagione della equazione (3), è

$$\frac{1}{\Theta_{0,0}(z)}\frac{\partial^2\Theta_{0,0}(z)}{\partial z^2} = -4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\log\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\partial q}$$

onde

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\log\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\partial q} - \frac{1}{\Theta_{0,0}^2(z)}\left(\frac{\partial\Theta_{0,0}(z)}{\partial z}\right)^2 = -\frac{\eta}{\omega} - k\frac{\Theta_{0,1}^2(z)}{\Theta_{0,0}^2(z)}.$$

Ponendo $z = 0$, e osservando che si ha

$$\Theta_{0,0}(0) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}, \qquad \left(\frac{\partial\Theta_{0,0}(z)}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \qquad \Theta_{0,1}(0) = \sqrt{\frac{k\omega}{\pi}},$$

si ottiene

$$4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\log\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}}{\partial q} = \frac{\eta}{\omega} + k^2,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial q} = \frac{(\eta + k^2\omega)\omega^2}{2q\pi^2}. \tag{7}$$

15.

Passiamo ora alla determinazione delle formule che danno la moltiplicazione dell'argomento nelle funzioni jacobiane per un numero reale e intero, cioè alla determinazione delle espressioni delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}(nz)$ per mezzo delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$.

Le radici della funzione intera $\theta_{\mu,\nu}(nz)$ sono tutte e sole le quantità

$$\frac{(2r + \mu - 1)\omega + (2s + \nu - 1)\omega'}{2n}. \tag{1}$$

Qualunque siano i numeri interi reali r ed s potranno sempre porsi sotto la forma

$$r = nr' + \left(\frac{n-1}{2}\right)(\mu - 1) + \alpha, \qquad s = ns' + \left(\frac{n-1}{2}\right)(\nu - 1) + \beta,$$

dove α e β sono interi reali minori di n. Quindi le radici di $\theta_{\mu,\nu}(nz)$ saranno tutte e sole le quantità

$$r'\omega + s'\omega' + \frac{(\mu-1)\omega + (\nu-1)\omega'}{2} + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}. \tag{2}$$

Ma il prodotto

$$\overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_\alpha}}\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_\beta}}\ \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)$$

ha evidentemente anch' esso per radici tutte e sole le quantità della forma (2): dunque avremo

$$\theta_{\mu,\nu}(nz) = \varphi(z)\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_\alpha}}\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_\beta}}\ \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right), \tag{3}$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z+\omega$, e osservando l' equazione (4) del n. 6, si ottiene

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z). \tag{4}$$

Mutando z in $z+\omega'$, e osservando l' equazione (5) del n. 6, si ha

$$e^{-\frac{\pi n^2}{\omega}(2z+\omega')}\theta_{\mu,\nu}(nz)$$

$$= \varphi(z+\omega')e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[n^2(2z+\omega')+2\sum\limits_0^{n-1}\sum\limits_0^{n-1}\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right]}\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi}}\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi}}\ \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right),$$

$$\theta_{\mu,\nu}(nz) = \varphi(z+\omega')e^{-n(n-1)\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi}}\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi}}\ \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right),$$

e, dividendo per la equazione (3), si ottiene

$$\varphi(z+\omega') = e^{n(n-1)\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\varphi(z). \tag{5}$$

Ponendo

$$\varphi(z) = e^{n(n-1)\frac{\pi iz}{\omega}}\psi(z),$$

l' equazioni (4) e (5) danno

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega') = \psi(z);$$

onde $\psi(z)$ che dev' essere una funzione intera, non può essere altro che una costante C, e si ha

$$\theta_{\mu,\nu}(nz) = \mathrm{C}e^{n(n-1)\frac{\pi iz}{\omega}}\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi}}\ \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi}}\ \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right).$$

Per determinare la costante C, se $\mu\nu = 0$ pongo $z = 0$, se $\mu\nu = 1$ divido i due membri per z e poi pongo $z = 0$, ed ho

$$C = \frac{n^{\mu\nu}}{\prod\limits_0^{n-1}{}' \prod\limits_0^{n-1}{}' \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)},$$

dove gli apici alle lettere Π indicano che si deve escludere il fattore che corrisponde ad $\alpha = \beta = 0$. Pertanto abbiamo

$$\theta_{\mu,\nu}(nz) = e^{n(n-1)\frac{\pi i z}{\omega}} n^{\mu\nu} \frac{\prod\limits_0^{n-1} \prod\limits_0^{n-1} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\prod\limits_0^{n-1}{}' \prod\limits_0^{n-1}{}' \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}. \tag{6}$$

Trasformiamo il secondo membro di questa equazione in una funzione razionale di $\theta_{1,1}(z)$ e $\theta_{1,0}(z)$.

Osservando l'equazioni caratteristiche delle funzioni jacobiane, e la equazione (6) del n. 11, si ha

$$\frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right) \theta_{1,1}\left(z + \frac{(n-\alpha)\omega + (n-\beta)\omega'}{n}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right) \theta_{1,1}\left(\frac{(n-\alpha)\omega + (n-\beta)\omega'}{n}\right)}$$

$$= - e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right) \theta_{1,1}\left(z - \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}$$

$$= e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} \left\{ \theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)} \theta^2_{1,1}(z) \right\}.$$

Onde sostituendo nella equazione (6) dove sia $\mu = \nu = 1$, si ottiene, per n dispari,

$$\theta_{1,1}(nz) = n\, \theta_{1,1}(z)\, \Pi_\alpha \Pi_\beta \left\{ \theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)} \theta^2_{1,1}(z) \right\} \tag{7}$$

dove il segno $\Pi_\alpha \Pi_\beta$ indica che il prodotto deve estendersi a tutti i valori positivi di α minori di $\frac{n+1}{2}$, e a tutti i valori positivi di β minori di n, ma per $\alpha = 0$ si devono prendere per β soltanto i valori minori di $\frac{n+1}{2}$ escluso $\beta = 0$.

Analogamente per mezzo delle equazioni (7), (8), (9) del n. 11, si ha, sempre per n dispari,

$$(8)\qquad \theta_{1,0}(nz)=\theta_{1,0}(z)\,\Pi_\alpha\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\},$$

$$(9)\qquad \theta_{0,1}(nz)=\theta_{0,1}(z)\,\Pi_\alpha\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\},$$

$$(10)\qquad \theta_{0,0}(nz)=\theta_{0,0}(z)\,\Pi_\alpha\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\}.$$

16.

Le funzioni jacobiane sono in generale funzioni di tre quantità z, ω' e ω, e quando tra ω' e ω non esiste la relazione (5) del n. 8, le indicheremo colla notazione $\theta_{\mu,\nu}(z,\omega',\omega)$, e quando esiste questa relazione essendo funzioni delle sole due quantità z ed $\frac{\omega'}{\omega}$ le indicheremo colla notazione $\theta_{\mu,\nu}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right)$, e con $\theta_{\mu,\nu}(z)$ semplicemente nei casi nei quali non possa cader dubbio sul valore del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$. Quindi essendo

$$\frac{\omega'_1}{\omega_1}=\frac{\omega'}{\omega},\quad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2},\omega',\omega\right)=\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2},\omega',\omega\right),$$

l'equazioni (3) del n. 8, daranno

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases}\theta_{1,1}(z,\omega'_1,\omega_1)=\frac{\omega_1}{\omega}\,\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{\omega_1}z,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\[1ex] \theta_{\mu,\nu}(z,\omega'_1,\omega_1)=\theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega}{\omega_1}z,\frac{\omega'}{\omega}\right);\quad \mu\nu=0.\end{cases}$$

Fin qui abbiamo considerato le relazioni tra le funzioni jacobiane nelle quali era eguale il valore della seconda variabile $\frac{\omega'}{\omega}$. Passiamo ora alla determinazione delle relazioni che esistono tra le funzioni jacobiane $\theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega)$ e $\theta_{\mu,\nu}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right)$ quando sia

$$(1)\qquad \omega=\alpha\Omega+\beta\Omega',\qquad \omega'=\gamma\Omega+\delta\Omega',$$

dove α, β, γ e δ sono numeri interi e reali. La risoluzione di questo problema costituisce ciò che suol dirsi la *trasformazione* di queste funzioni. Il numero a cui è eguale il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ dicesi l'*ordine* della trasformazione. Cominciamo dalle trasformazioni di primo ordine, cioè sia

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1\,. \tag{2}$$

Le radici di $\theta_{\mu,\nu}(z\,,\Omega'\,,\Omega)$ sono evidentemente tutte le quantità

$$(2m + \mu - 1)\frac{\Omega}{2} + (2n + \nu - 1)\frac{\Omega'}{2}\,,$$

le quali, sostituendo i valori di Ω e Ω' dati dall'equazioni (1) e ponendo

$$\left\{\begin{array}{l} \mu' - 1 \equiv (\mu - 1)\delta - (\nu - 1)\gamma \\ \nu' - 1 \equiv (\nu - 1)\alpha - (\mu - 1)\beta \end{array}\right. \pmod{2}, \tag{3}$$

prendono la forma

$$(2m' + \mu' - 1)\frac{\omega}{2} + (2n' + \nu' - 1)\frac{\omega'}{2}\,. \tag{4}$$

Osservando che a cagione dell'equazione (2) non possono essere contemporaneamente numeri pari δ e γ, α e β, si ha

$$(\delta + 1)(\gamma + 1) \equiv 0\,,\ (\alpha + 1)(\beta + 1) \equiv 0 \pmod{2},$$

e le congruenze (3) possono scriversi

$$\begin{array}{l} \mu' \equiv \mu\delta + \nu\gamma + \delta\gamma \\ \nu' \equiv \nu\alpha + \mu\beta + \alpha\beta \end{array} \pmod{2}. \tag{5}$$

Ora le quantità (4) sono tutte le radici di $\theta_{\mu',\nu'}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right)$; quindi

$$\theta_{\mu,\nu}(z\,,\Omega'\,,\Omega) = \varphi(z)\,\theta_{\mu',\nu'}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right), \tag{6}$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z + \omega$, abbiamo

$$(-1)^{\alpha\nu+\beta\mu}\, e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z+\beta\Omega')}\, \theta_{\mu,\nu}(z\,,\ \Omega'\,,\ \Omega) = (-1)^{\nu'}\, \theta_{\mu',\nu'}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right)\varphi(z + \omega)\,.$$

Dividendo per la equazione (6), e osservando la seconda congruenza (5), e la prima dell'equazioni (1) si ottiene

$$\varphi(z + \omega) = e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z+\omega)}\,\varphi(z)\,. \tag{7}$$

Mutando z in $z + \omega'$ nella equazione (6), si ha

$$(-1)^{\gamma\nu+\delta\mu}\, e^{-\frac{\pi i\delta}{\Omega}(2z+\delta\Omega')}\, \theta_{\mu,\nu}(z\,,\Omega'\,,\Omega) = (-1)^{\mu'}\, e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\, \varphi(z+\omega')\,\theta_{\mu',\nu'}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Dividendo per la equazione (6), e osservando la prima delle congruenze (5), e l'equazioni (1) e (2), si ottiene

$$\text{(8)}\qquad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i\beta\omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega')}\varphi(z).$$

Ponendo

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\psi(z),$$

l'equazioni (7) e (8) dànno

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega') = \psi(z);$$

onde $\psi(z)$ essendo necessariamente una funzione intera, sarà una costante C, e avremo

$$\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = \mathrm{C}e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Se $\mu\nu = 1$, sarà anche $\mu'\nu' = 1$, e dividendo per z e ponendo $z = 0$, si ha $\mathrm{C} = 1$. Se $\mu\nu = 0$ sarà anche $\mu'\nu' = 0$, e ponendo $z = 0$, si ha $\mathrm{C} = 1$. Dunque

$$\text{(9)}\qquad \theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi\beta z^2}{\omega\Omega}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Ponendo

$$\text{(10)}\qquad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\Omega'}{\Omega}, \quad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right), \quad \frac{\Omega}{\Lambda} = \mathrm{M}$$

avremo dall'equazioni (A)

$$\text{(11)}\qquad \begin{cases} \mathrm{M}\theta_{1,1}\left(\dfrac{z}{\mathrm{M}}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}\omega\Lambda}}\theta_{1,1}\left(z, \dfrac{\omega'}{\omega}\right), \\[2ex] \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{z}{\mathrm{M}}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}\omega\Lambda}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \dfrac{\omega'}{\omega}\right), \quad \mu\nu = \mu'\nu' = 0. \end{cases}$$

Per determinare M e il modulo λ delle prime funzioni per mezzo del modulo k delle seconde, poniamo nell'equazioni (11)

$$z = \frac{\Omega}{2} = \frac{\delta\omega - \beta\omega'}{2}.$$

Dividendole una per l'altra, e osservando le congruenze (5) e l'equazioni (10), si ottiene

$$\text{(12)}\qquad \mathrm{M} = \frac{\theta_{1,1}\left(\dfrac{\delta\omega - \beta\omega'}{2}, \dfrac{\omega'}{\omega}\right)}{\theta_{\delta(\gamma+1), \beta(\alpha+1)}\left(\dfrac{\delta\omega - \beta\omega'}{2}, \dfrac{\omega'}{\omega}\right)}.$$

Poniamo poi nelle medesime equazioni (11)

$$z=\frac{\Omega+\Omega'}{2}=(\delta-\gamma)\frac{\omega}{2}+(\alpha-\beta)\frac{\omega'}{2}.$$

Dividendole una per l'altra, e osservando le congruenze (5), l'equazioni (10) e l'equazione (8) del n. 8, si ottiene

$$\lambda^2=\mathrm{M}^2\frac{\theta^2_{\delta(\gamma+1),\,\beta(\alpha+1)}\left((\delta-\gamma)\frac{\omega}{2}+(\alpha-\beta)\frac{\omega'}{2},\ \frac{\omega'}{\omega}\right)}{\theta^2_{1,1}\left((\delta-\gamma)\frac{\omega}{2}+(\alpha-\beta)\frac{\omega'}{2},\ \frac{\omega'}{\omega}\right)}. \tag{13}$$

Considerando ora separatamente i sei casi distinti che possono darsi per i valori di α, β, γ, δ rispetto al modulo 2, e rammentando l'equazioni del n. 8, si ottiene

1° caso. $\alpha\equiv1,\ \beta\equiv1,\ \gamma\equiv0,\ \delta\equiv1:$

$$\left\{\begin{aligned}&\theta_{1,1}\left(kz,\frac{A'}{A}\right)=ke^{-\frac{\pi ik\beta z^2}{\omega A}}\,\theta_{1,1}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\&\theta_{\mu,\nu}\left(kz,\frac{A'}{A}\right)=e^{-\frac{\pi ik\beta z^2}{\omega A}}\,\theta_{\mu,\mu+\nu+1}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\&\lambda^2=\frac{1}{k^2}.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

2° caso. $\alpha\equiv1,\ \beta\equiv1,\ \gamma\equiv1,\ \delta\equiv0:$

$$\left\{\begin{aligned}&\theta_{1,1}\left(ikz,\frac{A'}{A}\right)=ike^{\frac{\pi k\beta z^2}{\omega A}}\,\theta_{1,1}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\&\theta_{\mu,\nu}\left(ikz,\frac{A'}{A}\right)=e^{\frac{\pi k\beta z^2}{\omega A}}\,\theta_{\nu,\mu+\nu+1}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\&\lambda^2=-\frac{k'^2}{k^2}.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

3° caso. $\alpha\equiv1,\ \beta\equiv0,\ \gamma\equiv1,\ \delta\equiv1:$

$$\left\{\begin{aligned}&\theta_{1,1}\left(k'z,\frac{A'}{A}\right)=k'e^{-\frac{\pi ik'\beta z^2}{\omega A}}\,\theta_{1,1}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\&\theta_{\mu,\nu}\left(k'z,\frac{A'}{A}\right)=e^{-\frac{\pi ik'\beta z^2}{\omega A}}\,\theta_{\mu+\nu+1,\nu}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\&\lambda^2=-\frac{k^2}{k'^2}.\end{aligned}\right. \tag{16}$$

4° caso. $\alpha \equiv 1\,,\ \beta \equiv 0\,,\ \gamma \equiv 0\,,\ \delta \equiv 1$:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_{1,1}\left(z\,,\ \frac{\varLambda'}{\varLambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \varLambda}}\,\theta_{1,1}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\ &\theta_{\mu,\nu}\left(z\,,\ \frac{\varLambda'}{\varLambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \varLambda}}\,\theta_{\mu,\nu}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\ &\lambda^2 = k^2\,. \end{aligned}\right.$$

5° caso. $\alpha \equiv 0\,,\ \beta \equiv 1\,,\ \gamma \equiv 1\,,\ \delta \equiv 1$:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_{1,1}\left(ik'z\,,\frac{\varLambda'}{\varLambda}\right) = ik'e^{\frac{\pi k' \beta z^2}{\omega \varLambda}}\,\theta_{1,1}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\ &\theta_{\mu,\nu}\left(ik'z\,,\frac{\varLambda'}{\varLambda}\right) = e^{\frac{\pi k' \beta z^2}{\omega \varLambda}}\,\theta_{\mu+\nu+1,\mu}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\ &\lambda^2 = \frac{1}{k'^2}\,. \end{aligned}\right.$$

6° caso. $\alpha \equiv 0\,,\ \beta \equiv 1\,,\ \gamma \equiv 1\,,\ \delta \equiv 0$:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_{1,1}\left(iz\,,\ \frac{\varLambda'}{\varLambda}\right) = i\,e^{\frac{\pi \beta z^2}{\omega \varLambda}}\,\theta_{1,1}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\ &\theta_{\mu,\nu}\left(iz\,,\ \frac{\varLambda'}{\varLambda}\right) = e^{\frac{\pi \beta z^2}{\omega \varLambda}}\,\theta_{\nu,\mu}\left(z\,,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\ &\lambda^2 = k'^2\,. \end{aligned}\right.$$

17.

Passiamo ora alle trasformazioni di secondo ordine, cioè determiniamo le relazioni che esistono tra le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z\,,\varOmega'\,,\varOmega)$ e $\theta_{\mu,\nu}(z)$, quando è

$$(1)\qquad \omega = \alpha\varOmega + \beta\varOmega'\,,\qquad \omega' = \gamma\varOmega + \delta\varOmega'\,;$$

$$(2)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 2\,.$$

La funzione $\theta_{1,1}(z\,,\varOmega'\,,\varOmega)$ ha per radici tutte le quantità della forma

$$(3)\qquad m\varOmega + n\varOmega' = (m\delta - n\gamma)\,\frac{\omega}{2} + (n\alpha - m\beta)\frac{\omega'}{2}\,.$$

Se prendiamo per r ed s i valori 0 od 1, non ambedue eguali a zero,

che sodisfano alle congruenze

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r\alpha + s\gamma \equiv 0 \\ r\beta + s\delta \equiv 0 \end{array} \right. \pmod{2},$$

il che è sempre possibile a cagione della (2), e indichiamo con ε zero o l'unità; avremo contemporaneamente

$$\begin{array}{l} m\delta - n\gamma \equiv \varepsilon r \\ n\alpha - m\beta \equiv \varepsilon s \end{array} \pmod{2},$$

e le quantità (3) prenderanno tutte la forma

$$(5) \qquad m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\left(\frac{r\omega + s\omega'}{2}\right).$$

Ora le quantità (5) sono evidentemente tutte le radici della funzione intera

$$\theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,1+s}(z);$$

dunque avremo

$$\theta_{1,1}(z\,,\Omega'\,,\Omega) = \varphi(z)\ \theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,1+s}(z),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Osservando l'equazioni caratteristiche di $\theta_{1,1}(z)$, e le congruenze

$$\begin{array}{l} \alpha\beta + \alpha + \beta + s \equiv 0 \\ \gamma\delta + \gamma + \delta + r \equiv 0 \end{array} \pmod{2},$$

che sono conseguenza delle congruenze (4) e dell'equazione (2), ottengo per determinare $\varphi(z)$ l'equazioni

$$\varphi(z+\omega) = e^{-\frac{\pi i\beta\omega}{\omega\Omega}(2z+\omega)}\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i\beta\omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega')}\varphi(z),$$

dalle quali deduco nel solito modo

$$\varphi(z) = \mathrm{C}e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}};$$

onde

$$\theta_{1,1}(z\,,\Omega'\,,\Omega) = \mathrm{C}e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,1+s}(z).$$

Dividendo per z, e facendo $z = 0$, ottengo $\mathrm{C} = 1$. Quindi

$$(6) \qquad \theta_{1,1}(z\,,\Omega'\,,\Omega) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,1+s}(z).$$

Poniamo

$$(7) \qquad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\Lambda'}{\Lambda}\,,\ \frac{\Omega}{\Lambda} = \mathrm{M}\,, \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2}\,,\Lambda'\,,\Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2}\,,\Lambda'\,,\Lambda\right),$$

ed avremo dall' equazioni (A) del n. 16

$$(8) \qquad M\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Delta'}{\Delta}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{M\omega\Delta}} \theta_{1,1}(z)\, \theta_{1+r,1+s}(z).$$

Le radici della funzione intera $\theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega)$ sono evidentemente tutte le quantità della forma

$$(9) \qquad m\Omega + n\Omega' + \frac{\Omega'}{2} = (m\delta - n\gamma)\frac{\omega}{2} + (n\alpha - m\beta)\frac{\omega'}{2} + \frac{\alpha}{4}\omega' - \frac{\gamma}{4}\omega.$$

1° caso. Se $\alpha \equiv \gamma \equiv 0$ (mod. 2) le quantità (9) hanno la forma

$$m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\left(\frac{r\omega + s\omega'}{2}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{\omega'}{2} - \frac{\gamma}{2}\frac{\omega}{2},$$

dove r, s ed ε hanno il significato che loro abbiamo dato precedentemente. Quindi si dimostra in modo analogo la equazione

$$(10) \qquad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega\Omega}} \theta_{1+\frac{\gamma}{2}, 1+\frac{\alpha}{2}}(z)\, \theta_{1+\frac{\gamma}{2}+r, 1+\frac{\alpha}{2}+s}(z),$$

e per le equazioni (7)

$$(11) \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Delta'}{\Delta}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{M\omega\Delta}} \theta_{1+\frac{\gamma}{2}, 1+\frac{\alpha}{2}}(z)\, \theta_{1+\frac{\gamma}{2}+r, 1+\frac{\alpha}{2}+s}(z).$$

2° caso. Se $\alpha \equiv 1$, $\gamma \equiv 0$ sarà $\delta \equiv 0$ (mod. 2), e le quantità (9), ponendo $\frac{\gamma}{2} = \varepsilon$, avranno tutte la forma

$$(12) \qquad m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{4}.$$

Ora dall' equazione (7) del n. 11, ponendo mente all' equazioni (18) e (19) del n. 7, abbiamo

$$\frac{\theta_{1,1}^2\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta_{1,0}^2\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)} = -\frac{1}{k} = -\frac{\theta_{0,1}^2\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta_{0,0}^2\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)} = -\frac{\theta_{1,1}^2\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta_{1,0}^2\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)};$$

onde

$$\frac{\theta_{1,1}^2\left(m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{4}\right)}{\theta_{1,0}^2\left(m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{4}\right)} = (-1)^{\varepsilon}\frac{\theta_{1,1}^2\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta_{1,0}^2\left(\frac{\omega'}{4}\right)},$$

e le quantità (12) sono tutte radici della funzione intera

$$\theta_{1,0}^2(z) - (-1)^\varepsilon \frac{\theta_{1,0}^2\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta_{1,1}^2\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta_{1,1}^2(z),$$

e quindi potremo dimostrare nel solito modo l'equazione

$$(13) \qquad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \Omega}} \left\{ \theta_{1,0}^2(z) - (-1)^\varepsilon \frac{\theta_{1,0}^2\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta_{1,1}^2\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta_{1,1}^2(z) \right\},$$

e per le posizioni (7)

$$(14) \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\mathrm{M}\omega \Omega}} \left\{ \theta_{1,0}^2(z) - (-1)^\varepsilon \frac{\theta_{1,0}^2\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta_{1,1}^2\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta_{1,1}^2(z) \right\}.$$

3° caso. Se $\alpha \equiv 0$, $\gamma \equiv 1$ sarà $\beta \equiv 0$ (mod. 2), e le quantità (9), ponendo $\frac{\alpha}{2} = \varepsilon$, prenderanno la forma

$$(15) \qquad m'\omega + n'\omega' + \varepsilon \frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}.$$

Ora dall' equazione (8) del n. 11, si ricava

$$\frac{\theta_{1,1}^2\left(\varepsilon \frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)}{\theta_{1,0}^2\left(\varepsilon \frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)} = \frac{1}{1+(-1)^\varepsilon k'};$$

onde

$$\frac{\theta_{1,1}^2\left(m'\omega + n'\omega' + \varepsilon \frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)}{\theta_{1,0}^2\left(m'\omega + n'\omega' + \varepsilon \frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)} = \frac{1}{1+(-1)^\varepsilon k'},$$

e quindi le quantità (15) sono tutte radici della funzione intera

$$\theta_{1,0}^2(z) - (1 + (-1)^\varepsilon k')\ \theta_{1,1}^2(z),$$

e si dimostra nel modo solito

$$(16)\ \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\mathrm{M}\omega\Lambda}} [\theta_{1,0}^2(z) - (1+(-1)^\varepsilon k')\theta_{1,1}^2(z)].$$

4° caso. Se $\alpha \equiv \gamma \equiv 1$ (mod. 2) sarà $\beta \equiv \delta \equiv \varepsilon$, e le quantità (9) avranno tutte la forma

$$(17) \qquad m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon} \frac{\omega'}{4}\right).$$

Ma dall'equazione (9) del n. 11, si ottiene

$$\frac{\theta_{1,1}^2 \left[\pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon} \frac{\omega'}{4}\right)\right]}{\theta_{1,0}^2 \left[\pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon} \frac{\omega'}{4}\right)\right]} = 1 - (-1)^{\varepsilon} \frac{ik'}{k}.$$

onde

$$\frac{\theta_{1,1}^2 \left[m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon} \frac{\omega'}{4}\right)\right]}{\theta_{1,0}^2 \left[m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon} \frac{\omega'}{4}\right)\right]} = 1 - (-1)^{\varepsilon} \frac{ik'}{k},$$

e le quantità (17) sono tutte radici della funzione intera

$$\theta_{1,0}^2(z) - \frac{k}{k - (-1)^{\varepsilon} ik'} \theta_{1,1}^2(z),$$

e quindi si dimostra nel solito modo

$$(18) \quad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) = e^{-\frac{\pi\beta i z^2}{\mathrm{M}\omega\varDelta}} \left(\theta_{1,0}^2(z) - \frac{k}{k - (-1)^{\varepsilon} ik'} \theta_{1,1}^2(z)\right).$$

Le relazioni delle altre due funzioni $\theta_{0,1}(z, \Omega', \Omega)$, $\theta_{0,0}(z, \Omega', \Omega)$ con le $\theta_{\mu,\nu}(z)$ si possono ottenere in modo analogo, oppure si possono dedurre da quelle ottenute per le due funzioni $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,0}$.

Per la determinazione del moltiplicatore M e del modulo λ della funzione trasformata ci limiteremo ai soli casi ai quali si riducono come vedremo tutti gli altri (n. 19).

Sia $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 2$; avremo $s = 1$, $r = 0$, $\varepsilon = 0$, e quindi

$$(19) \quad \mathrm{M}\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) = \theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z), \quad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) = \theta_{1,0}^2(z) + k\theta_{1,1}^2(z).$$

Pongo $z = \frac{\omega}{2} = \frac{\mathrm{M}\varDelta}{2}$, divido queste equazioni una per l'altra, e ponendo mente all'equazioni (1) e (3) del n. 9, ottengo

$$(20) \qquad \mathrm{M} = \frac{1}{1+k}, \quad \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{k'}$$

onde

$$\lambda' = \frac{1-k}{1+k}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}. \tag{21}$$

Sia $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$; avremo $r = 1$, $s = 0$,

$$\mathrm{M}\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) = \theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z), \quad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) = \theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(z); \tag{22}$$

quindi, a cagione della equazione (10) del n. 11

$$\theta_{1,0}^2\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) - k^2\mathrm{M}^2\,\theta_{1,1}^2\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) = \theta_{0,0}(2z).$$

Pongo $z = \frac{\omega}{4} = \frac{\varDelta\mathrm{M}}{2}$, ho

$$\frac{1-k^2\mathrm{M}^2}{\lambda'} = \sqrt{k'}. \tag{23}$$

Fo $z = \frac{\omega'}{2} = \frac{\varDelta'\mathrm{M}}{2}$ ed osservando che si ha $\frac{\varDelta'}{\varDelta} = \frac{2\omega'}{\omega}$, dalla prima delle equazioni (22) ottengo

$$\frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{k}. \tag{24}$$

Dall'equazioni (23) e (24) si ricava

$$\mathrm{M} = \frac{1}{1+k'}, \tag{25}$$

$$\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}. \tag{26}$$

18.

Determiniamo ora le trasformazioni di ordine primo dispari p; cioè essendo

$$\omega = \alpha\Omega + \beta\Omega', \qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega'; \tag{1}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = p; \tag{2}$$

p numero primo dispari qualunque, cerchiamo la relazione che esiste tra la funzione $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$, e le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$.

Le radici della funzione $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$ sono tutte e sole le quantità

$$(2m+\mu-1)\frac{\Omega}{2} + (2n+\nu-1)\frac{\Omega'}{2} = \tag{3}$$

$$\Big((2m+\mu-1)\delta - (2n+\nu-1)\gamma\Big)\frac{\omega}{2p} + \Big((2n+\nu-1)\alpha - (2m+\mu-1)\beta\Big)\frac{\omega'}{2p}.$$

Se prendiamo per r ed s i valori minori di p, ma ambedue non eguali a zero contemporaneamente, che sodisfano alle congruenze

$$\left\{\begin{array}{l} r\alpha + s\gamma \equiv 0 \\ r\beta + s\delta \equiv 0 \end{array}\right. \pmod{p}, \tag{4}$$

il che è sempre possibile a cagione dell'equazione (2), e indichiamo con t' un numero intero minore di p, avremo

$$\begin{array}{l} m\delta - n\gamma \equiv t'r \\ n\alpha - m\beta \equiv t's \end{array} \pmod{p};$$

ed essendo t'' un numero intero minore di p, sarà

$$\begin{array}{l} (\mu-1)\delta - (\nu-1)\gamma = (2l + \mu' - 1)p + 2t''r \\ (\nu-1)\alpha - (\mu-1)\beta = (2l' + \nu' - 1)p + 2t''s; \end{array}$$

e quindi le quantità (3) prendono tutte la forma

$$m'\omega + n'\omega' + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right) + \frac{(\mu'-1)\omega + (\nu'-1)\omega'}{2}, \tag{5}$$

dove

$$\begin{array}{l} \mu' - 1 \equiv (\mu-1)\delta - (\nu-1)\gamma \\ \nu' - 1 \equiv (\nu-1)\alpha - (\mu-1)\beta \end{array} \pmod{2},$$

ossia

$$\begin{array}{l} \mu' \equiv \delta\mu + \nu\gamma + \gamma\delta \\ \nu' \equiv \alpha\nu + \mu\beta + \alpha\beta \end{array} \pmod{2}, \tag{6}$$

e per t bisogna prendere tutti i p residui differenti rispetto al modulo p.

Ora le quantità (5) sono tutte le radici anche della funzione intera

$$\overset{p-1}{\underset{0}{\Pi_t}}\, \theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right],$$

quindi avremo

$$\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = \varphi(z) \overset{p-1}{\underset{0}{\Pi_t}}\, \theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right] \tag{7}$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z + \omega$ nella equazione (7), ottengo

$$(-1)^{\nu\alpha+\mu\beta} e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z+\beta\Omega')} \theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega) = (-1)^{\nu'} \varphi(z+\omega) \overset{p-1}{\underset{0}{\Pi_t}}\, \theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right].$$

Dividendo per la (7), e osservando la seconda congruenza (6) e l'equazioni (1), si ottiene

$$\varphi(z + \omega) = e^{-\frac{\pi i\beta\omega}{\omega\Omega}(2z+\omega)}\, \varphi(z). \tag{8}$$

Mutando z in $z+\omega'$ la equazione (7) diviene

$$(-1)^{\nu\gamma+\mu\delta}\, e^{-\frac{\pi i\delta}{\Omega}(2z+\delta\Omega')}\,\theta_{\mu,\nu}(z\,,\Omega'\,,\Omega) =$$

$$(-1)^{\mu'}\, e^{-\frac{\pi i p}{\omega}\left[2z+(p-1)\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)+\omega'\right]}\,\varphi(z+\omega')\prod_{0}^{p-1}\theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right];$$

onde

$$\theta_{\mu,\nu}(z\,,\Omega'\,,\Omega) = e^{\frac{\pi i\beta\omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega')-(p-1)\frac{\pi i s\omega'}{\omega}}\,\varphi(z+\omega')\prod_{0}^{p-1}\theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right]$$

e dividendo per la equazione (7)

$$(9)\qquad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i\beta\omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega')+(p-1)\frac{\pi i s\omega'}{\omega}}\,\varphi(z)\,.$$

Ponendo

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}+\frac{(p-1)\pi i s z}{\omega}}\,\psi(z)\,,$$

si ha dall' equazioni (8) e (9)

$$\psi(z+\omega) = \psi(z)\,,\qquad \psi(z+\omega') = \psi(z)\,,$$

onde $\psi(z)$ essendo funzione intera, per il teorema 4 del n. 3, sarà una costante C, e quindi

$$\theta_{\mu,\nu}(z\,,\Omega'\,,\Omega) = \mathrm{C}e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\Omega}-(p-1)sz\right)}\prod_{0}^{p-1}{}_t\,\theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right].$$

Se $\mu\nu\equiv\mu'\nu'\equiv 1$, divido per z e pongo $z=0$, se $\mu\nu\equiv\mu'\nu'\equiv 0$ pongo $z=0$, ed ho

$$\frac{1}{\mathrm{C}} = \prod_{1}^{p-1}{}_t\,\theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right];$$

dunque finalmente

$$(10)\quad \theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\Omega}-(p-1)sz\right)}\,\frac{\prod_{0}^{p-1}{}_t\,\theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right]}{\prod_{1}^{p-1}{}_t\,\theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right]}.$$

Pongo

$$(11)\quad \frac{\Omega'}{\Omega}=\frac{A'}{A}\,,\ \frac{\Omega}{A}=\mathrm{M}\,,\qquad \theta_{1,1}\left(\frac{A}{2}\,,A'\,,A\right)=\theta_{1,0}\left(\frac{A}{2}\,,A'\,,A\right),$$

ed ho

$$(12)\quad \mathrm{M}\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varLambda'}{\varLambda}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}\varLambda} - (p-1)sz\right)} \frac{\prod_0^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}{\prod_1^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]},$$

$$(13)\quad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\varLambda'}{\varLambda}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}\varLambda} - (p-1)sz\right)} \prod_0^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}{\theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]};$$

$$\mu\nu \equiv \mu'\nu' \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

Qualunque siano i numeri interi α, β, γ, δ e in conseguenza i numeri r ed s, le trasformazioni differenti di ordine primo dispari p non possono essere in numero maggiore di $p + 1$.

Infatti è facile a vedersi che quando $s = 0$, sono identici i secondi membri delle equazioni (12) e (13) qualunque siano i valori di r, e che quando s è differente da zero sono identiche tutte quelle trasformazioni per le quali lo stesso valore di σ rende

$$(a)\quad s\sigma \equiv r \ (\mathrm{mod.}\ p).$$

Quindi, quando è sodisfatta questa congruenza ponendo

$$\varpi_\sigma = \frac{\omega' + \sigma\omega}{p},$$

e quando $s = 0$

$$\varpi_\infty = \frac{\omega}{p},$$

avremo soltanto $p + 1$ trasformazioni differenti corrispondenti ai p valori di σ eguali ai differenti residui rispetto al modulo p, e a $\sigma = \infty$.

Le formule (12) e (13) divengono

$$(14)\quad \mathrm{M}_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \frac{\varLambda'_\sigma}{\varLambda_\sigma}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\varLambda_\sigma} - (p-1)z\right)} \frac{\prod_0^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}(z + t\varpi_\sigma)}{\prod_1^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(15)\quad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \frac{\varLambda'_\sigma}{\varLambda_\sigma}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\varLambda_\sigma} - (p-1)z\right)} \prod_0^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}(z + t\varpi_\sigma)}{\theta_{\mu',\nu'}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(16)\quad \mathrm{M}_\infty\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\infty}, \frac{\varLambda'_\infty}{\varLambda_\infty}\right) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\infty\omega\varLambda_\infty}} \frac{\prod_0^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}(z + t\varpi_\infty)}{\prod_1^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}(t\varpi_\infty)},$$

$$(17)\quad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\infty}, \frac{\varLambda'_\infty}{\varLambda_\infty}\right) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\infty\omega\varLambda_\infty}} \prod_0^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}(z + t\varpi_\infty)}{\theta_{\mu',\nu'}(t\varpi_\infty)}.$$

Queste formule possono trasformarsi in modo che contengano nel secondo membro soltanto razionalmente funzioni jacobiane tutte dello stesso argomento z.

Infatti l'equazioni caratteristiche delle $\theta_{\mu,\nu}$ dànno

$$\frac{\theta_{\mu,\nu}[z+(p-t)\varpi_\sigma]}{\theta_{\mu,\nu}[(p-t)\varpi_\sigma]}=(-1)^{\mu\nu}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\frac{\theta_{\mu,\nu}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta_{\mu,\nu}(t\varpi_\sigma)},$$

$$\frac{\theta_{\mu,\nu}[z+(p-t)\varpi_\infty]}{\theta_{\mu,\nu}[(p-t)\varpi_\infty]}=(-1)^{\mu\nu}\frac{\theta_{\mu,\nu}(z-t\varpi_\infty)}{\theta_{\mu,\nu}(t\varpi_\infty)};$$

quindi sostituendo nei secondi membri delle formule (14), (15), (16) e (17) ai fattori nei quali $t>\frac{p-1}{2}$ i valori dati da queste equazioni, abbiamo, per qualunque valore di σ,

$$(18)\quad M_\sigma\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{A'_\sigma}{A_\sigma}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega A_\sigma}}\theta_{1,1}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{\theta_{1,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(19)\quad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{A'_\sigma}{A_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega A_\sigma}}\theta_{\mu',\nu'}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{\theta_{\mu',\nu'}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{\mu',\nu'}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{\mu',\nu'}(t\varpi_\sigma)}.$$

Ma dall'equazioni (6) e seguenti del n. 11, si ha

$$\frac{\theta_{1,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}=\frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)-\theta^2_{1,0}(z),$$

$$\frac{\theta_{1,0}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,0}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z).$$

$$\frac{\theta_{0,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{0,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z),$$

$$\frac{\theta_{0,0}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{0,0}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z).$$

onde l'equazioni (18) e (19) daranno

$$(20)\quad M_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{A'_\sigma}{A_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega A_\sigma}}\theta_{1,1}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right).$$

$$(21)\quad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{A'_\sigma}{A_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega A_\sigma}}\theta_{1,0}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right),$$

$$(22)\quad \theta_{0,1}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{A'_\sigma}{A_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega A_\sigma}}\theta_{0,1}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right),$$

$$(23)\quad \theta_{0,0}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{A'_\sigma}{A_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega A_\sigma}}\theta_{0,0}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right).$$

19.

Prima di passare alla determinazione del moltiplicatore M_σ e del modulo λ_σ delle funzioni jacobiane trasformate, converrà osservare che relativamente ai valori di α, β, γ e δ basta limitarsi a due soli casi distinti, come risulta dal seguente

Teorema. *Ogni trasformazione di ordine primo p equivale a due trasformazioni successive, una di primo ordine, e l'altra della forma*

$$\omega = \Omega, \qquad \omega' = \varrho\Omega + p\Omega', \tag{1}$$

oppure della forma

$$\omega = p\Omega, \qquad \omega' = \Omega'. \tag{2}$$

Infatti, sia una trasformazione qualunque di ordine primo p

$$\omega = \alpha\Omega + \beta\Omega', \qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega', \tag{3}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = p. \tag{4}$$

Essendo p un numero primo, α e β o saranno primi tra loro, o avranno p per massimo comun divisore.

Se α e β sono primi tra loro, potrà risolversi in numeri interi, rispetto a γ' e δ' l'equazione

$$\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1,$$

e quindi γ e δ avranno la forma

$$\gamma = \gamma' p + \varrho\alpha, \qquad \delta = \delta' p + \varrho\beta,$$

essendo ϱ un intero qualunque $< p$, che sodisferà le due congruenze

$$\varrho\alpha - \gamma \equiv 0, \qquad \varrho\beta - \delta \equiv 0 \pmod{p}. \tag{5}$$

Ora è chiaro che le due trasformazioni successive, la prima di primo ordine

$$\omega_1 = \alpha\Omega + \beta\Omega', \qquad \omega'_1 = \gamma'\Omega + \delta'\Omega';$$

la seconda di ordine p e della forma

$$\omega = \omega_1, \qquad \omega' = \varrho\omega_1 + p\omega'_1$$

equivarranno alla unica trasformazione (3).

Se α e β hanno per massimo comun divisore il numero p, sarà

$$\alpha = p\alpha', \qquad \beta = p\beta', \qquad \alpha'\delta - \beta'\gamma = 1,$$

e le due trasformazioni successive

$$\omega_1 = \alpha'\Omega + \beta'\Omega', \qquad \omega'_1 = \gamma\Omega + \delta\Omega'$$

di primo ordine, e

$$\omega = p\omega_1 , \qquad \omega' = \omega'_1 ,$$

di ordine p, equivarranno alla unica trasformazione (3).

Dunque nelle trasformazioni di ordine primo p, relativamente ai valori di α, β, γ e δ basterà limitarsi ai soli casi seguenti

$$\alpha = 1 , \quad \beta = 0 , \quad \gamma < p , \quad \delta = p ,$$
$$\alpha = p , \quad \beta = 0 , \quad \gamma = 0 , \quad \delta = 1 .$$

Confrontando le congruenze (4) ed (a) del numero precedente colle congruenze (5) abbiamo

$$\rho \equiv -\sigma \pmod{p} , \tag{6}$$

e le congruenze (6) del numero precedente dànno

$$\nu' \equiv \nu \pmod{2} ,$$
$$\mu' \equiv \mu , \text{ se } \nu \equiv 1 ; \quad \mu' \equiv \mu + \rho \text{ se } \nu \equiv 0 .$$

Poniamo nelle formule (18) e (19) del numero precedente

$$z = \frac{\omega}{2} .$$

Per la trasformazione (1) avremo

$$z = \frac{\varDelta_\sigma \mathrm{M}_\sigma}{2} ,$$

e per la trasformazione (2)

$$z = \frac{p\varDelta_\infty \mathrm{M}_\infty}{2} .$$

Quindi dividendo l' equazione (18) per la (19) in cui sia posto $\mu = \mu' = 1$, $\nu = \nu' = 0$, avremo supponendo ρ pari,

$$\mathrm{M}_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta_{1,0}^2(t\varpi_\sigma)}{\theta_{1,1}^2(t\varpi_\sigma)} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\sigma\right) \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\sigma\right) \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\sigma\right)} ,$$

$$\mathrm{M}_\infty = \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta_{1,0}^2(t\varpi_\infty)}{\theta_{1,1}^2(t\varpi_\infty)} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\infty\right) \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\infty\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\infty\right) \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\infty\right)} ;$$

ed essendo

$$\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} \pm x\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} \pm x\right)} = \frac{\theta_{0,1}(x)}{\theta_{0,0}(x)} ,$$

sarà

$$(7)\qquad M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(8)\qquad M_\infty = \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\infty)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\infty)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\infty)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\infty)}.$$

Poichè il segno del moltiplicatore non muta le formule (18) e (19) del numero precedente quando $\beta = 0$, potremo per uniformità prendere

$$M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\Omega_\infty}{\Lambda_\infty},$$

e così avremo M dato sempre dalla medesima formula

$$(9)\qquad M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Ponendo nella equazione (19) del numero precedente $\mu = 0$, $\nu = 0$, e quindi $\mu = 1$, $\nu = 0$, dividendo l'una per l'altra l'equazioni ottenute, e osservando la equazione (12) del n. 8, abbiamo

$$(10)\qquad \lambda'^2_\sigma = k'^{2p} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^8_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^8_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Prendendo nell'equazioni (18) e (19), dove $\mu = 1$, $\nu = 0$,

$$z = \frac{\omega + \omega'}{2}$$

e quindi

$$z = \frac{pM_\sigma \Lambda'_\sigma + (\varrho + 1) M_\sigma \Lambda_\sigma}{2}, \qquad z = \frac{M_\infty \Lambda'_\infty + p\Lambda_\infty M_\infty}{2};$$

dividendo l'equazioni ottenute una per l'altra, osservando l'equazione (8) del n. 8, e prendendo ϱ pari, si ottiene

$$(11)\qquad \lambda^2_\sigma = k^{2p} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^8_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^8_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Il moltiplicatore M_σ, e i moduli λ_σ e λ'_σ della funzione trasformata si possono esprimere facilmente per mezzo della quantità $q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$.

Infatti riprendiamo dalle formule (6), (10) e (13) del n. 8, e **ricaviamo** dalle formule (4), (5), (6), (21), (23), (26), (27) del n. 10 i valori di ω, k e k' espressi per la quantità q:

$$(12) \qquad \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} = \prod_1^\infty \frac{(1+q^{2n-1})(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})(1+q^{2n})} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2},$$

$$(13) \qquad \sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q} \prod_1^\infty \frac{(1+q^{2n})^2}{(1+q^{2n-1})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}},$$

$$(14) \qquad \sqrt{k'} = \prod_1^\infty \frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1+q^{2n-1})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}:$$

Ora se poniamo

$$q_\sigma = e^{\frac{\pi i \Omega'_\sigma}{\Omega_\sigma}} = e^{\frac{\pi i A'_\sigma}{A_\sigma}},$$

sarà

$$q_\sigma = e^{\pi i \left(\frac{\omega'}{p\omega} + \frac{\sigma}{p}\right)} = q^{\frac{1}{p}} \alpha^{\frac{\sigma}{2}}, \qquad q_\infty = e^{\pi i \frac{p\omega'}{\omega}} = q^p,$$

essendo α una radice immaginaria p^{esima} dell'unità; ed essendo σ un numero pari, e quindi $\frac{\sigma}{2}$ un intero h, avremo che i valori di q per le funzioni jacobiane trasformate saranno della forma q^p e $\alpha^h q^{\frac{1}{p}}$, quindi

$$(15) \qquad \sqrt{\frac{A_\sigma}{\pi}} = \prod_1^\infty \frac{\left(1+q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h}\right)\left(1-q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh}\right)}{\left(1-q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h}\right)\left(1+q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh}\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2 h},$$

$$(16) \qquad \sqrt{\frac{A_\infty}{\pi}} = \prod_1^\infty \frac{(1+q^{(2n-1)p})(1-q^{2np})}{(1-q^{(2n-1)p})(1+q^{2np})} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2 p},$$

$$(17) \qquad \sqrt{\lambda_\sigma} = 2\sqrt[4]{q^{\frac{1}{p}}\alpha^h} \prod_1^\infty \frac{\left(1+q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh}\right)^2}{\left(1+q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h}\right)^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{p}\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\alpha^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 h}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2 h}},$$

$$(18) \qquad \sqrt{\lambda_\infty} = 2\sqrt[4]{q^p} \prod_1^\infty \frac{(1+q^{2np})^2}{(1+q^{(2n-1)p})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 p}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2 p}},$$

$$(19)\qquad \sqrt{\lambda'_\sigma} = \prod_1^\infty \frac{(1 - q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h})^2}{(1 + q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2 h}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2 h}},$$

$$(20)\qquad \sqrt{\lambda'_\infty} = \prod_1^\infty \frac{(1 - q^{(2n-1)p})^2}{(1 + q^{(2n-1)p})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m^2 p}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2 p}}.$$

I moltiplicatori M_σ saranno dati dalle formule

$$\mathrm{M}_\sigma = \frac{\Omega_\sigma}{\Lambda_\sigma} = \frac{\omega}{\Lambda_\sigma}, \qquad \mathrm{M}_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{\Omega_\infty}{\Lambda_\infty} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{\omega}{p\Lambda_\infty},$$

onde dall'equazioni (12), (15) e (16) avremo

$$(21)\qquad \sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}_\sigma}} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2 h}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}, \qquad (22)\qquad \sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}} = \frac{\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2 p}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}.$$

Per mezzo dell'equazione (5) del n. 14, considerando λ_σ come funzione di k, k di q e q di q_σ, si ottiene facilmente la relazione

$$(23)\qquad \mathrm{M}_\sigma^2 = \frac{1}{p}\,\frac{\lambda_\sigma \lambda'^2_\sigma}{k k'^2}\,\frac{dk}{d\lambda_\sigma}.$$

20.

Le due trasformazioni corrispondenti a $\sigma = 0$ ed a $\sigma = \infty$ effettuate successivamente danno la moltiplicazione dell'argomento.

Infatti, sia

$$(1)\qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{p\Lambda'}{\Lambda}, \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right),$$

avremo dalle formule (14) e (15) del n. 18

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}_0\,\theta_{1,1}\left(\dfrac{z}{\mathrm{M}_0}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}(z)\,\prod_\alpha{}_1^{p-1} \dfrac{\theta_{1,1}\left(z + \dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,1}\left(\dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)}, \\[2ex] \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{z}{\mathrm{M}_0}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\prod_\alpha{}_0^{p-1} \dfrac{\theta_{\mu,\nu}\left(z + \dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)}, \qquad \mu\nu = 0, \\[2ex] \mathrm{M}_0 = \dfrac{\omega}{\Lambda}, \end{cases}$$

Dalla equazione (1) abbiamo anche

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta} = \frac{\omega'}{p\omega},$$

quindi dalle formule (16), (17) del n. 18 si deduce

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}_\infty\, \theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\infty}\right) = \theta_{1,1}\left(z, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) \prod_{1}^{p-1}{}_\beta \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\beta\varDelta}{p}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)}, \\ &\theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\infty}\right) = \prod_{0}^{p-1}{}_\beta \frac{\theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\beta\varDelta}{p}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)}{\theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)}, \qquad \mu\nu = 0, \\ &\mathrm{M}_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\varDelta}{p\omega}. \end{aligned}\right.$$

Ponendo nell' equazioni (3) $\frac{z}{\mathrm{M}_0}$ invece di z, sostituendo nei secondi membri i valori dati dall' equazioni (2), e osservando che si ha

$$\mathrm{M}_0\,\mathrm{M}_\infty = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}, \qquad \mathrm{M}_0\,\varDelta = \omega,$$

otterremo

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned} &\theta_{1,1}(pz) = \frac{p\, e^{p(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod_{0}^{p-1}{}_\alpha \prod_{0}^{p-1}{}_\beta\, \theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right)}{\mathrm{M}_0^{p-1} \prod_{1}^{p-1}{}_\beta\, \theta_{1,1}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) \left\{\prod_{1}^{p-1}{}_\alpha\, \theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p}. \\ &\theta_{\mu,\nu}(pz) = \frac{e^{p(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod_{0}^{p-1}{}_\alpha \prod_{0}^{p-1}{}_\beta\, \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right)}{\prod_{1}^{p-1}{}_\beta\, \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) \left\{\prod_{1}^{p-1}{}_\alpha\, \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p}, \quad \mu\nu = 0. \end{aligned}\right.$$

Confrontando l' equazioni (4) coll' equazioni (6) del n. 15, abbiamo

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned} &\prod_{0}^{p-1}{}'_\alpha \prod_{0}^{p-1}{}'_\beta\, \theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right) = \mathrm{M}_0^{p-1} \prod_{1}^{p-1}{}_\beta\, \theta_{1,1}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) \left\{\prod_{1}^{p-1}{}_\alpha\, \theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p, \\ &\prod_{0}^{p-1}{}'_\alpha \prod_{0}^{p-1}{}'_\beta\, \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right) = \prod_{1}^{p-1}{}_\beta\, \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}, \frac{\varDelta'}{\varDelta}\right) \left\{\prod_{1}^{p-1}{}_\alpha\, \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p, \ \mu\nu = 0. \end{aligned}\right.$$

Ponendo

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)} = \mathrm{A}\,, \qquad \prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha} \frac{\theta_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)} = \mathrm{B}\,, \qquad \prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha} \frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)} = \mathrm{C}\,;$$

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{\beta} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}\,,\,\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}\,,\,\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)} = \mathrm{P}\,, \quad \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta} \frac{\theta_{0,1}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}\,,\,\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}\,,\,\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)} = \mathrm{Q}\,, \quad \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta} \frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}\,,\,\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\varDelta}{p}\,,\,\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)} = \mathrm{R}\,,$$

e indicando con λ e λ' i moduli di $\theta_{\mu,\nu}\left(z\,,\,\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)$, e con k e k' quelli di $\theta_{\mu,\nu}(z)$, si ha dalle formule (9), (10) e (11) del n. 19

$$\mathrm{M}_0 = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{AC}}\,, \qquad \sqrt{\lambda} = \sqrt{k^p}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\,, \qquad \sqrt{\lambda'} = \frac{\sqrt{k'^p}}{\mathrm{C}}$$

$$\mathrm{M}_\infty = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{PR}}\,, \quad \sqrt{k} = \sqrt{\lambda^p}\,\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}\,, \quad \sqrt{k'} = \frac{\sqrt{\lambda'^p}}{\mathrm{R}}\,, \quad \frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{ACPR}} = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}\,;$$

onde dalle (5) si ottiene

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha} \prod_{0}^{p-1}{}'_{\beta} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)} = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p}{\sqrt{k^{p^2-1}}}\,,\\
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha} \prod_{0}^{p-1}{}'_{\beta} \frac{\theta_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)} = \sqrt{\frac{k'^{p^2-1}}{k^{p^2-1}}}\,,\\
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha} \prod_{0}^{p-1}{}'_{\beta} \frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)} = \sqrt{k'^{p^2-1}}\,.
\end{aligned}\right.$$

PARTE SECONDA

FUNZIONI FRATTE.

1.

Il quoziente di due *emiseni*, gli argomenti dei quali differiscono di una data quantità costante, dà origine a una funzione fratta che indicheremo colla notazione f, cioè porremo

$$f(z)=\frac{\mathrm{A}\ \mathrm{es}\,\frac{z}{a}}{\mathrm{es}\left(\frac{z}{a}+b\right)}.$$

Determineremo la costante A in modo che sia

$$\lim_{z=\infty}\frac{f(z)}{z^b}=1. \tag{1}$$

Rammentando l'equazione (7) del n. 1, Parte I, avremo

$$\lim_{z=\infty}\frac{f(z)}{z^b}=\frac{\mathrm{A}}{a^b}\lim_{z=\infty}\frac{a^b}{z^b}\frac{\mathrm{es}\,\frac{z}{a}}{\mathrm{es}\left(\frac{z}{a}+b\right)}=\frac{\mathrm{A}}{a^b};$$

onde

$$\mathrm{A}=a^b,$$

e

$$f(z)=\frac{a^b\,\mathrm{es}\,\frac{z}{a}}{\mathrm{es}\left(\frac{z}{a}+b\right)}. \tag{2}$$

Per mezzo della equazione (6) del n. 1, Parte I, si ha

$$f(z+a)=\frac{z+ab}{z}f(z), \tag{3}$$

dalla quale, ponendo $a = \Delta z$, si deduce

$$\frac{\Delta f(z)}{f(z)} = \frac{b\Delta z}{z}, \tag{4}$$

equazione alle differenze finite, analoga alla equazione differenziale

$$\frac{dy}{y} = b\frac{dz}{z},$$

che definisce la potenza $y = z^b$.

L' equazioni (1) e (4) sono le caratteristiche delle $f(z)$ considerate come funzioni di una sola variabile z.

Infatti dalla equazione (4) presa sotto la forma (3) si ricava

$$f(z) = \frac{z(z+a)\dots[z+(n-1)a]}{(z+ab)(z+ab+a)\dots.[z+ab+(n-1)a]} f(z+na)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n=\infty} n^{-\frac{z}{a}} \frac{z}{a}\left(\frac{z}{a}+1\right)\dots \times \left(\frac{z}{a}+n-1\right)}{\lim\limits_{n=\infty} n^{-\frac{z}{a}-b}\left(\frac{z}{a}+b\right)\left(\frac{z}{a}+b+1\right)\dots\left(\frac{z}{a}+b+n-1\right)} \lim_{n=\infty}\frac{f(z+na)}{(z+na)^b} \lim_{n=\infty}\left(\frac{z+na}{n}\right)^b;$$

onde, ponendo mente alla equazione (5) del n. 1, Parte I, si ottiene

$$f(z) = a^b \frac{\text{es}\,\frac{z}{a}}{\text{es}\left(\frac{z}{a}+b\right)}.$$

Noi riteniamo a e b, e quindi anche a^b, come costanti. Se a si ritenesse variabile, per valori non interi di b, la funzione f cesserebbe di essere monodroma, e occorrerebbero altre considerazioni per la determinazione della medesima.

Quando b è un numero intero e reale n, sostituendo agli *emiseni* i loro valori espressi in prodotti infiniti e riducendo, si ottiene

$$f(z, a, n) = z(z+a)(z+2a)\dots[z+(n-1)a]. \tag{5}$$

Mediante le formule (15) del n. 2, Parte I, si ottiene la moltiplicazione dell' argomento nelle funzioni $f(z)$, e si ha

$$f(nz) = a^b \frac{\text{es}\,\frac{nz}{a}}{\text{es}\left(\frac{nz}{a}+b\right)} = n^b a^b \mathop{\Pi_t}_{0}^{n-1} \frac{\text{es}\left(\frac{z}{a}+\frac{t}{n}\right)}{\text{es}\left(\frac{z}{a}+\frac{b}{n}+\frac{t}{n}\right)};$$

onde

$$(6)\qquad f(nz, a, b) = n^b \prod_0^{n-1}{}_t f\left(z + \frac{at}{n}, a, \frac{b}{n}\right).$$

Le funzioni $f(z, a, b)$ considerate come funzioni di tre variabili sono note nell' analisi sotto il nome di *facoltà analitiche*, e sono state soggetto dei lavori di molti geometri, tra i quali citerò una Memoria del sig. Weierstrass pubblicata nel vol. 51 del Giornale di Crelle.

2.

I tre quozienti, che si ottengono dividendo tre funzioni jacobiane per la quarta, danno origine a tre funzioni fratte, per le quali adotteremo la notazione seguente

$$(1)\qquad \operatorname{sn} z = \frac{\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)}, \quad \operatorname{cn} z = \frac{\theta_{0,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)}, \quad \operatorname{dn} z = \frac{\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)}.$$

Jacobi le indicava colle notazioni senam z, cosam z, Δam z, e le esprimeva *seno amplitudine di z, coseno amplitudine di z, delta amplitudine di z*. Queste tre funzioni si chiamano funzioni *ellittiche*.

Le funzioni ellittiche sono tutte tre doppiamente periodiche. Infatti, rammentando le formule (4) e (5) del n. 6, Parte I, abbiamo

$$(2)\qquad \operatorname{sn}(z+\omega) = -\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{sn}(z+2\omega) = \operatorname{sn} z,$$
$$(3)\qquad \operatorname{sn}(z+\omega') = \operatorname{sn} z,$$
$$(4)\qquad \operatorname{cn}(z+\omega) = -\operatorname{cn} z, \quad \operatorname{cn}(z+2\omega) = \operatorname{cn} z,$$
$$(5)\qquad \operatorname{cn}(z+\omega') = -\operatorname{cn} z, \quad \operatorname{cn}(z+2\omega') = \operatorname{cn} z,$$
$$(6)\qquad \operatorname{dn}(z+\omega) = \operatorname{dn} z,$$
$$(7)\qquad \operatorname{dn}(z+\omega') = -\operatorname{dn} z, \quad \operatorname{dn}(z+2\omega') = \operatorname{dn} z.$$

Le quantità 2ω e $2\omega'$ sono periodi comuni a tutte tre le funzioni ellittiche.

Per mezzo dell' equazioni (16) del n. 10, Parte I, si esprimono le funzioni (1) per le $\Theta_{\mu,\nu}(z)$ nel modo seguente

$$(8)\qquad \operatorname{sn} z = \frac{1}{i\sqrt{k}} \frac{\Theta_{1,1}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}, \quad \operatorname{cn} z = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\Theta_{0,1}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}, \quad \operatorname{dn} z = \sqrt{k'} \frac{\Theta_{0,0}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}.$$

Dalla formula (10) del n. 10, Parte I, si deduce

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = e^{\frac{\nu\pi i}{2}} \Theta_{\mu+1,\nu}(z).$$

Quindi, rammentando l' equazione (8) dello stesso numero, l' equazioni (8) daranno

$$(9)\qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},$$

$$(10)\qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=-k'\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z},$$

$$(11)\qquad \operatorname{dn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{k'}{\operatorname{dn} z},$$

onde

$$(12)\quad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},\quad \operatorname{cn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=k'\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z},\quad \operatorname{dn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=\frac{k'}{\operatorname{dn} z}.$$

Per analogia colle funzioni circolari, queste tre funzioni si chiamano *seno coamplitudine, coseno coamplitudine, delta coamplitudine di z*, e si scrivono

$$(13)\qquad \operatorname{snc} z=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},\quad \operatorname{cnc} z=\frac{k'\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z},\quad \operatorname{dnc} z=\frac{k'}{\operatorname{dn} z}.$$

Dalla formula (10) del n. 10, Parte I, si ha

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\,\Theta_{\mu,\nu+1}(z);$$

onde, ponendo mente alla equazione (9) dello stesso numero, abbiamo dall'equazioni (8)

$$(14)\qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k\operatorname{sn} z},$$

$$(15)\qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{dn} z}{ik\operatorname{sn} z},$$

$$(16)\qquad \operatorname{dn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{i\operatorname{sn} z}.$$

Dall'equazioni (9), (10), (11), (14), (15) e (16) si deduce che quando siano determinati i valori di tutte tre le funzioni ellittiche corrispondenti ai valori dell'argomento z che hanno gl'indici in un parallelogrammo elementare, i cui lati siano $\frac{\omega}{2}$ e $\frac{\omega'}{2}$ si hanno i loro valori in tutto il piano.

Dalle medesime si ricavano anche le seguenti formule

$$(17)\qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{dn} z}{k\operatorname{cn} z},$$

$$(18)\qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{k'}{ik\operatorname{cn} z},$$

(19) $$\mathrm{dn}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{ik'\,\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}.$$

Osservando le formule (6) del n. 5, e (7) del n. 6, Parte I, si ha

(20) $$\mathrm{sn}\,0=0\,,\quad \mathrm{cn}\,0=1\,,\quad \mathrm{dn}\,0=1,$$

e quindi dalle precedenti

(21) $$\mathrm{sn}\,\frac{\omega}{2}=1\,,\qquad \mathrm{cn}\,\frac{\omega}{2}=0\,,\qquad \mathrm{dn}\,\frac{\omega}{2}=k'\,,$$

(22) $$\mathrm{sn}\,\frac{\omega'}{2}=\infty\,,\qquad \mathrm{cn}\,\frac{\omega'}{2}=\infty\,,\qquad \mathrm{dn}\,\frac{\omega'}{2}=\infty\,,$$

(23) $$\mathrm{sn}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k},\quad \mathrm{cn}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{k'}{ik},\quad \mathrm{dn}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=0\,.$$

Dall'equazioni (7) e (9) del n. 8, Parte I, si deducono le seguenti relazioni algebriche tra le tre funzioni ellittiche

(24) $$\mathrm{sn}^2z+\mathrm{cn}^2z=1\,,$$

(25) $$\mathrm{dn}^2z+k^2\mathrm{sn}^2z=1\,.$$

3.

Dividendo per la equazione (7) l'equazioni (10) e (11), (21) e (14), (17) e (16) del n. 11, Parte I, si ottengono per l'addizione degli argomenti le formule seguenti

(1) $$\mathrm{sn}\,(z\pm w)=\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w\pm\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w},$$

(2) $$\mathrm{cn}\,(z\pm w)=\frac{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{cn}\,w\mp\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w},$$

(3) $$\mathrm{dn}\,(z\pm w)=\frac{\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{dn}\,w\mp k^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w}.$$

Dividendo l'equazioni (6), (8) e (9) per la (7) del medesimo numero, si ha

(4) $$\mathrm{sn}\,(z+w)\,\mathrm{sn}\,(z-w)=\frac{\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2w}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w},$$

(5) $$\mathrm{cn}\,(z+w)\,\mathrm{cn}\,(z-w)=\frac{\mathrm{cn}^2w-\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{dn}^2w}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w},$$

(6) $$\mathrm{dn}\,(z+w)\,\mathrm{dn}\,(z-w)=\frac{\mathrm{dn}^2w-k^2\,\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{cn}^2w}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w}.$$

Dall'equazioni (1), (4) e (6) del n. 12, Parte I, dopo averle divise per $\theta^2_{1,0}(z)$, si ottiene

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,z}{dz} = \mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,, \tag{7}$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\,z}{dz} = -\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,, \tag{8}$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}\,z}{dz} = -\,k^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,. \tag{9}$$

Ponendo nell'equazione (7) $\mathrm{sn}\,z = y$, ed osservando l'equazioni (24) e (25) del n. 2, si ha

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)\,. \tag{10}$$

Questa equazione differenziale e la proprietà di annullarsi per $z = 0$ possono riguardarsi come le caratteristiche della funzione ellittica $y = \mathrm{sn}\,z$.

Dall'equazione (10) si ricava

$$z = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \tag{11}$$

quindi $\mathrm{sn}\,z$ è il limite superiore di questo integrale che ne rende il valore eguale a z. La quantità z riguardata come funzione di y si chiama *amplitudine*, o anche *integrale ellittico di prima specie*.

Poichè $\mathrm{sn}\,\frac{\omega}{2} = 1$, avremo

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\,, \tag{12}$$

ed essendo $\mathrm{sn}\,\frac{\omega+\omega'}{2} = \frac{1}{k}$, sarà

$$\frac{\omega+\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\,,$$

onde, a cagione dell'equazione (12),

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

$$= \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\,.$$

Pongo

$$y^2 = \frac{1 - k'^2 x^2}{k^2}$$

ed ottengo

(13) $$\frac{\omega'}{2} = i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Pongo

(14) $$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad \mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}},$$

ed ho

(15) $$\omega = 2\mathrm{K}, \quad \omega' = 2i\mathrm{K}'.$$

Le funzioni ellittiche che hanno il modulo k reale e > 1, si esprimono semplicemente per quelle che hanno il modulo reale e < 1. Infatti dall' equazioni (14) del n. 16, Parte I, abbiamo

(16) $$\mathrm{sn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}(z,k), \quad \mathrm{cn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}(z,k), \quad \mathrm{dn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}(z,k).$$

Le funzioni ellittiche che hanno l'argomento immaginario si esprimono per quelle che hanno l' argomento reale. Infatti dall' equazioni (19) dello stesso numero si ricava

(17) $$\mathrm{sn}(iz,k) = \frac{i\,\mathrm{sn}(z,k')}{\mathrm{cn}(z,k')}, \quad \mathrm{cn}(iz,k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(z,k')}, \quad \mathrm{dn}(iz,k) = \frac{\mathrm{dn}(z,k')}{\mathrm{cn}(z,k')}.$$

Per mezzo dell' equazioni (1), (2), (3), (16) e (17) di questo numero, le funzioni ellittiche che abbiano un argomento complesso $x + iy$, si esprimeranno per mezzo delle funzioni ellittiche dei due argomenti reali x ed y.

4.

Le derivate delle quattro funzioni jacobiane sono anch' esse funzioni intere. Dividendole per le respettive loro primitive, avremo quattro nuove funzioni fratte, per le quali, scrivendo le derivate al modo di Lagrange, useremo la seguente notazione

(1) $$\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(z) = \frac{\theta'_{\mu,\nu}(z)}{\theta_{\mu,\nu}(z)} = \frac{\Theta'_{\mu,\nu}(z)}{\Theta_{\mu,\nu}(z)}.$$

L' equazioni (8) e (9) del n. 10, Parte I, daranno immediatamente

(2) $$\mathrm{Z}_{\mu+2r,\nu+2s}(z) = \mathrm{Z}_{\mu,\nu}(z),$$

cioè le $\mathrm{Z}_{\mu,\nu}$ che hanno gli indici congrui rispetto al modulo 2, sono eguali.

L'equazione (10) dello stesso numero dà

$$(3) \qquad Z_{\mu,\nu}\left(z+\mu'\frac{\omega}{2}+\nu'\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{\nu'\pi i}{\omega}+Z_{\mu+\mu',\nu+\nu'}(z).$$

Prendendo $\mu'=2m$, $\nu'=2m'$ ed osservando l'equazione (2), se ne deduce

$$(4) \qquad Z_{\mu,\nu}(z+m\omega+m'\omega')=-\frac{2m'\pi i}{\omega}+Z_{\mu,\nu}(z).$$

Per mezzo dell'equazione (3) si esprimono tre funzioni $Z_{\mu,\nu}$ per la quarta nel modo seguente:

$$(5) \qquad Z_{1,1}(z)=Z_{1,0}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)+\frac{\pi i}{\omega},$$

$$(6) \qquad Z_{0,1}(z)=Z_{1,0}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)+\frac{\pi i}{\omega},$$

$$(7) \qquad Z_{0,0}(z)=Z_{1,0}\left(z+\frac{\omega}{2}\right).$$

Quando μ e ν non sono ambedue congrui all'unità rispetto al modulo 2, essendo $Z_{\mu,\nu}(z)$ il quoziente di una funzione intera dispari divisa per una funzione intera pari, avremo

$$(8) \qquad Z_{\mu,\nu}(0)=0.$$

Poichè $Z_{1,1}(z)$ è il quoziente di una funzione intera pari divisa per una funzione intera dispari, sarà

$$(9) \qquad Z_{1,1}(0)=\infty.$$

Ma dalla formula (3) del n. 10, Parte I, abbiamo

$$Z_{1,1}(z)=\frac{\dfrac{d}{dz}\sum_0^\infty(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{\pi z}{\omega}}{\sum_0^\infty(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{\pi z}{\omega}};$$

onde

$$zZ_{1,1}(z)=\frac{\sum_0^\infty(-1)^n(2n+1)\,q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\dfrac{\pi z}{\omega}}{\sum_0^\infty(-1)^n(2n+1)\,q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}{(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}};$$

e quindi

$$(10) \qquad \lim_{z=0} zZ_{1,1}(z)=1.$$

Quando non sono contemporaneamente

$$\begin{matrix}\mu \equiv 0 \\ \nu \equiv 1\end{matrix} \pmod{2}$$

dalla equazione (3), osservando la equazione (8), si ricava

$$Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0\,, \tag{11}$$

ed a cagione della equazione (10)

$$\lim_{z=0} z Z_{0,1}\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = 1\,. \tag{12}$$

Quando non sono contemporaneamente

$$\begin{matrix}\mu \equiv 1 \\ \nu \equiv 0\end{matrix} \pmod{2}$$

si ha egualmente

$$Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{\pi i}{\omega}\,, \tag{13}$$

e per $\mu = 1$, $\nu = 0$

$$\lim_{z=0} z Z_{1,0}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = 1\,. \tag{14}$$

Analogamente si trova

$$Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = -\frac{\pi i}{\omega}\,, \tag{15}$$

quando non siano

$$\begin{matrix}\mu \equiv 0 \\ \nu \equiv 0\end{matrix} \pmod{2};$$

e

$$\lim_{z=0} z Z_{0,0}\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 1\,. \tag{16}$$

Per mezzo dell' equazione (11) del n. 13, Parte I, si ottiene

$$Z'_{\mu,\nu}(z) = -\frac{\eta}{\omega} - k^2 \,\mathrm{sn}^2\left(z + (1-\mu)\frac{\omega}{2} + \nu\frac{\omega'}{2}\right), \tag{17}$$

dalla quale abbiamo

$$Z'_{\mu,\nu}(z + w) = -\frac{\eta}{\omega} - k^2 \,\mathrm{sn}^2\left(z + w + (1-\mu)\frac{\omega}{2} + \nu\frac{\omega'}{2}\right),$$

$$Z'_{\mu,\nu}(z - w) = -\frac{\eta}{\omega} - k^2 \,\mathrm{sn}^2\left(z - w + (1-\mu)\frac{\omega}{2} + \nu\frac{\omega'}{2}\right),$$

e sottraendo

$$Z'_{\mu,\nu}(z+w)-Z'_{\mu,\nu}(z-w)=-k^2\left[\operatorname{sn}^2\left(z+w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}-\nu\frac{\omega'}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\operatorname{sn}^2\left(z-w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\right]$$

$$=-\frac{4k^2\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w}{\left[1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2w\right]^2}.$$

Moltiplico per dw, ed integrando ottengo

$$Z_{\mu,\nu}(z+w)+Z_{\mu,\nu}(z-w)=C-\frac{2\operatorname{cn}\left(z+(1+\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\left[1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2w\right]}.$$

Pongo $w=0$ ed ho

$$C=2Z_{\mu,\nu}(z)+\frac{2\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)},$$

onde

$$(18)\qquad Z_{\mu,\nu}(z+w)+Z_{\mu,\nu}(z-w)=2Z_{\mu,\nu}(z)$$

$$-\frac{2k^2\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2w}{1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2w}.$$

Pertanto avremo per le quattro funzioni:

$$(19)\quad Z_{1,0}(z+w)+Z_{1,0}(z-w)=2Z_{1,0}(z)-\frac{2k^2\operatorname{sn}z\operatorname{cn}z\operatorname{dn}z\operatorname{sn}^2w}{1-k^2\operatorname{sn}^2z\operatorname{sn}^2w},$$

$$(20)\quad Z_{0,1}(z+w)+Z_{0,1}(z-w)=2Z_{0,1}(z)-\frac{2k'^2\operatorname{dn}z\operatorname{sn}z\operatorname{sn}^2w}{\operatorname{cn}z(\operatorname{cn}^2z-\operatorname{dn}^2z\operatorname{sn}^2w)},$$

$$(21)\quad Z_{0,0}(z+w)+Z_{0,0}(z-w)=2Z_{0,0}(z)+\frac{2k^2k'^2\operatorname{sn}z\operatorname{cn}z\operatorname{sn}^2w}{\operatorname{dn}z(\operatorname{dn}^2z-k^2\operatorname{cn}^2z\operatorname{sn}^2w)},$$

$$(22)\quad Z_{1,1}(z+w)+Z_{1,1}(z-w)=2Z_{1,1}(z)+\frac{2\operatorname{cn}z\operatorname{dn}z\operatorname{sn}^2w}{\operatorname{sn}z(\operatorname{sn}^2z-\operatorname{sn}^2w)}.$$

5.

Integrando l'equazione (17) del numero precedente nel caso di $\mu = 1$, $\nu = 0$, ed osservando che si ha $Z_{1,0}(0) = 0$, si ottiene

$$k^2 \int_0^z \mathrm{sn}^2 z \, dz = -\frac{\eta}{\omega} z - Z_{1,0}(z) . \tag{1}$$

Ponendo $\mathrm{sn}\, z = y$, si ha

$$k^2 \int_0^y \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = -\frac{\eta}{\omega} z - Z_{1,0}(z), \tag{2}$$

essendo

$$z = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} .$$

L'integrale che comparisce nell'equazione (2) suol chiamarsi *integrale ellittico di seconda specie.* Legendre ha dato questo nome ad un altro che facilmente si esprime per mezzo del precedente.

Ponendo $z = \frac{\omega}{2}$ e quindi $y = 1$, ottengo dall'equazione (2)

$$\frac{\eta}{2} = -k^2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} . \tag{3}$$

Fo $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, e quindi $y = \frac{1}{k}$, ed ho

$$-\frac{\eta}{2} - \frac{\eta\omega'}{2\omega} + \frac{\pi i}{\omega} = k^2 \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

$$= k^2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + k^2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

onde, osservando la (25) del n. 12, Parte I, si ricava

$$\frac{\eta'}{2} = -k^2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} .$$

Ponendo al solito

$$y^2 = \frac{1 - k'^2 x^2}{k^2} ,$$

ottengo

$$\frac{\eta'}{2}=\frac{\omega'}{2}-ik'^2\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}\,. \tag{4}$$

Pongo

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{H} &= k^2\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,,\\ \mathrm{H}' &= k'^2\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}\,,\end{aligned}\right. \tag{5}$$

ed ho

$$\eta=-2\mathrm{H}\,,\quad \eta'=2i\mathrm{K}'-2i\mathrm{H}'\,. \tag{6}$$

Sostituisco i valori (6) e i valori (15) del n. 3 nell'equazione (25) del n. 12, Parte I, ed ottengo

$$\mathrm{KH}'-\mathrm{HK}'-\mathrm{KK}'=\frac{\pi}{2}\,. \tag{7}$$

Dall'equazioni (19), (20), (21) e (22) del numero precedente si deduce facilmente

$$Z_{1,0}(z+w)=Z_{1,0}(z)+Z_{1,0}(w)-\quad k^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{sn}(z+w) \tag{8}$$

$$Z_{0,1}(z+w)=Z_{0,1}(z)+Z_{0,1}(w)-\quad k'^2\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{sn}(z+w)}{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{cn}(z+w)}\,, \tag{9}$$

$$Z_{0,0}(z+w)=Z_{0,0}(z)+Z_{0,0}(w)+k^2k'^2\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{sn}(z+w)}{\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{dn}(z+w)}\,, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} Z_{1,1}(z+w)=Z_{1,1}(z)+Z_{1,1}(w)\\ +\frac{1}{\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2w}\left(\frac{\mathrm{sn}^2w\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}-\frac{\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{sn}\,w}\right).\end{gathered} \tag{11}$$

Moltiplico per dw e integro l'equazioni (19), (20), (21) e (22) del n. 4, ed, osservando l'equazione (1) del n. 4, ho

$$\left\{\begin{aligned} \Pi_{1,0}(w,z)&=k^2\int_0^w\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2w\,dw}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w}&&=Z_{1,0}(z)w-\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{1,0}(z+w)}{\Theta_{1,0}(z-w)}\,,\\ \Pi_{0,1}(w,z)&=k'^2\int_0^w\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2w\,dw}{\mathrm{cn}\,z(\mathrm{cn}^2z-\mathrm{dn}^2z\,\mathrm{sn}^2w)}&&=Z_{0,1}(z)w-\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{0,1}(z+w)}{\Theta_{0,1}(z-w)}\,,\\ \Pi_{0,0}(w,z)&=k^2k'^2\int_0^w\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{sn}^2w\,dw}{\mathrm{dn}\,z(\mathrm{dn}^2z+k^2\mathrm{cn}^2z\,\mathrm{sn}^2w)}&&=-Z_{0,0}(z)w+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{0,0}(z+w)}{\Theta_{0,0}(z-w)}\,,\\ \Pi_{1,1}(w,z)&=\int_0^w\frac{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2w\,dw}{\mathrm{sn}\,z(\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2w)}&&=-Z_{1,1}(z)w+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{1,1}(z+w)}{\Theta_{1,1}(z-w)}\,.\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Le funzioni $\Pi_{\mu,\nu}(x,z)$ possono comprendersi tutte nella unica formula

$$(13)\qquad \Pi_{\mu,\nu}(x\,.\,z)=(-1)^{\mu\nu}\left(-xZ_{\mu,\nu}(z)-\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z+x)}{\Theta_{\mu,\nu}(z-x)}\right).$$

Ponendo sn $x=y$, prendono la forma

$$(14)\qquad A\int_0^y\frac{y^2\,dy}{(1-hy^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

e si chiamano *integrali ellittici di terza specie.*

È chiaro che le funzioni $\Pi_{\mu,\nu}$ non sono monodrome, e quindi la loro teorica non troverebbe luogo in questa monografia. Ma essendo composte di una funzione $Z_{\mu,\nu}$ e di logaritmi di funzioni jacobiane non costituiscono propriamente un genere particolare di funzioni, e la loro teorica è una immediata conseguenza della teorica delle funzioni Z e delle jacobiane.

6.

Ponendo nella equazione (13) del numero precedente $u+v$ in luogo di x, si ottiene

$$(1)\qquad \begin{aligned}\Pi_{\mu,\nu}(u+v\,.\,z)&=\Pi_{\mu,\nu}(u\,.\,z)+\Pi_{\mu,\nu}(v\,.\,z)\\&+(-1)^{\mu\nu}\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z-u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+u+v)}{\Theta_{\mu,\nu}(z+u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-u-v)}.\end{aligned}$$

Ora abbiamo l'identità

$$(2)\qquad \begin{aligned}A_{\mu,\nu}\,\Theta_{\mu,\nu}(z-u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-v)&=\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v-z)\\&-\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v-z),\end{aligned}$$

dove

$$(3)\qquad A_{\mu,\nu}=\frac{\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{\mu,\nu}(0)\Theta_{\mu,\nu}(u+v)-\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v)\Theta_{\mu,1+\nu}(0)\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v)}{\Theta_{\mu,\nu}(u)\,\Theta_{\mu,\nu}(v)}.$$

Infatti, il primo membro della equazione (2) è una funzione intera di z che ha per radici le sole quantità della forma

$$u+(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}+(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2},$$

$$v+(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}+(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2},$$

le quali tutte sono radici anche della funzione intera di z che forma il secondo membro della equazione (2); poichè a cagione delle formule (8), (9) e (10) del n. 10, Parte I, abbiamo

$$\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{\mu,\nu}\left(u+(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}+(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$\times\,\Theta_{\mu,\nu}\left(v-(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}-(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$=(-1)^{\mu\nu+1}\,e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left((2n+1-\nu)(u-v)+\frac{(2n+1-\nu)^2}{2}\omega'-\nu(2m+1-\mu)\omega\right)}\,\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v)\,,$$

$$\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v)\Theta_{\mu,1+\nu}\left(u+(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}+(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$\times\,\Theta_{\mu,1+\nu}\left(v-(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}-(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$=(-1)^{\mu\nu+1}\,e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left((2n+1-\nu)(u-v)+\frac{(2n+1-\nu)^2}{2}\omega'-\nu(2m+1-\mu)\omega\right)}\,\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v)\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v).$$

Quindi per il teorema 6 del n. 3, Introduzione, sarà

$$\frac{\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{\mu,\nu}(z)\Theta_{\mu,\nu}(u+v-z)-\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v)\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v-z)}{\Theta_{\mu,\nu}(z-u)\Theta_{\mu,\nu}(z-v)}=f(z),$$

indicando con $f(z)$ una funzione intera. Ma per mezzo della formula (10) del n. 10, Parte I, si trova

$$f(z+m\omega+n\omega')=f(z)\,,$$

onde la funzione $f(z)$ è intera e doppiamente periodica, e per il teorema 4 del n. 3, Parte I, è necessariamente eguale a una costante. Quindi si ha la identità (2). Per determinare $A_{\mu,\nu}$ che è indipendente da z, basta porre $z=0$, con che si ha il suo valore dato dalla formula (3).

Mutando, nella identità (2), z in $-z$, si ottiene

$$\begin{aligned}(4)\qquad & A_{\mu,\nu}\Theta_{\mu,\nu}(z+u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+v)\\ &=(-1)^{\mu\nu}\left\{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v+z)\right.\\ &\left.-(-1)^{\mu}\,\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v+z)\right\}.\end{aligned}$$

Dividendo le identità (2) e (4) una per l'altra, abbiamo

$$\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z-u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+u+v)}{\Theta_{\mu,\nu}(z+u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-u-v)}$$
$$=\frac{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)-\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\dfrac{\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v-z)}{\Theta_{\mu,\nu}(u+v-z)}}{\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{\mu,\nu}(z)-(-1)^{\mu}\,\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v)\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\dfrac{\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v+z)}{\Theta_{\mu,\nu}(u+v+z)}}\,.$$

Sostituendo nella equazione (1) questo valore, si ottiene

$$(5)\qquad \Pi_{\mu,\nu}(u+v\,,z)=\Pi_{\mu,\nu}(u\,,z)+\Pi_{\mu,\nu}(v\,,z)$$

$$+(-1)^{\mu+\nu}\frac{1}{2}\log\frac{1-\dfrac{\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v-z)}{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v-z)}}{1-(-1)^{\mu}\dfrac{\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v+z)}{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v+z)}}\,.$$

Quindi, esprimendo per mezzo delle formule (8) del n. 2, i rapporti delle funzioni jacobiane per le funzioni ellittiche, abbiamo

$$(6)\qquad \Pi_{1,0}(u+v\,,z)=\Pi_{1,0}(u\,,z)+\Pi_{1,0}(v\,,z)$$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}z\operatorname{sn}(u+v-z)}{1+k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}z\operatorname{sn}(u+v+z)}\,,$$

$$(7)\qquad \Pi_{0,1}(u+v\,,z)=\Pi_{0,1}(u\,,z)+\Pi_{0,1}(v\,,z)$$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{cn}z\operatorname{cn}(u+v-z)+\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}z\operatorname{dn}(u+v-z)}{\operatorname{cn}z\operatorname{cn}(u+v+z)+\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}z\operatorname{dn}(u+v+z)}\cdot\frac{\operatorname{cn}(u+v+z)}{\operatorname{cn}(u+v-z)}\,,$$

$$(8)\qquad \Pi_{0,0}(u+v\,,z)=\Pi_{0,0}(v\,,z)+\Pi_{0,0}(v\,,z)$$

$$+\frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{dn}z\operatorname{dn}(u+v-z)+k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}z\operatorname{cn}(u+v-z)}{\operatorname{dn}z\operatorname{dn}(u+v+z)+k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}z\operatorname{cn}(u+v+z)}\cdot\frac{\operatorname{dn}(u+v+z)}{\operatorname{dn}(u+v-z)}\,,$$

$$(9)\qquad \Pi_{1,1}(u+v\,,z)=\Pi_{1,1}(u\,,z)+\Pi_{1,1}(v\,,z)$$

$$+\frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}z\operatorname{sn}(u+v-z)-\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v}{\operatorname{sn}z\operatorname{sn}(u+v+z)+\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v}\cdot\frac{\operatorname{sn}(u+v+z)}{\operatorname{sn}(u+v-z)}\,.$$

Dalla formula (13) del numero precedente, si ha

$$\Pi_{\mu,\nu}(u\,,z)=(-1)^{\mu+\nu}\left\{-u\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(z)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z+u)}{\Theta_{\mu,\nu}(z-u)}\right\},$$

$$\Pi_{\mu,\nu}(z\,,u)=(-1)^{\mu+\nu}\left\{-z\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(u)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z+u)}{\Theta_{\mu,\nu}(u-z)}\right\},$$

onde

$$\Pi_{\mu,\nu}(u\,,z)-\Pi_{\mu,\nu}(z\,,u)=(-1)^{\mu+\nu}\left(z\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(u)-u\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(z)-\frac{\mu\nu\pi i}{2}\right),$$

$$\Pi_{\mu,\nu}(v\,,z)-\Pi_{\mu,\nu}(z\,,v)=(-1)^{\mu+\nu}\left(z\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(v)-v\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(z)-\frac{\mu\nu\pi i}{2}\right),$$

$$\Pi_{\mu,\nu}(u+v,z)-\Pi_{\mu,\nu}(z\,,u+v)=(-1)^{\mu+\nu}\left(z\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(u+v)-(u+v)\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(z)-\frac{\mu\nu\pi i}{2}\right),$$

quindi

$$\Pi_{\mu,\nu}(z,u+v)=\Pi_{\mu,\nu}(z,u)+\Pi_{\mu,\nu}(z,v)+\Pi_{\mu,\nu}(u+v\,,z)-\Pi_{\mu,\nu}(u,z)-\Pi_{\mu,\nu}(v,z)$$

$$-(-1)^{\mu+\nu}\left\{z\Big(\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(u+v)-\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(u)-\mathrm{Z}_{\mu,\nu}(v)\Big)+\frac{\mu\nu\pi i}{2}\right\}.$$

Sostituendo il valore (5) e i valori (8), (9), (10) e (11) del numero precedente, si hanno le formule per l'addizione del parametro z delle funzioni $\Pi(w, z)$.

7.

Passiamo ora a determinare $\operatorname{sn} nz$, $\operatorname{cn} nz$, e $\operatorname{dn} nz$ in funzione di $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, quando n è un numero intero e reale, ossia determiniamo le formule per la *moltiplicazione* dell'argomento delle funzioni ellittiche.

Dall'equazioni (1), (2) e (3) del n. 3, si ricava facilmente

$$\operatorname{sn}(m+1)z = -\operatorname{sn}(m-1)z + \frac{2\operatorname{sn} mz \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 mz \operatorname{sn}^2 z},$$

$$\operatorname{cn}(m+1)z = -\operatorname{cn}(m-1)z + \frac{2\operatorname{cn} mz \operatorname{cn} z}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 mz \operatorname{sn}^2 z},$$

$$\operatorname{dn}(m+1)z = -\operatorname{dn}(m-1)z + \frac{2\operatorname{dn} mz \operatorname{dn} z}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 mz \operatorname{sn}^2 z};$$

onde, ponendo successivamente $m = 1, 2, 3, \ldots$, abbiamo

$$(1) \qquad \operatorname{sn} 2nz = \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z \frac{N_1}{D}, \quad \operatorname{cn} 2nz = \frac{N_2}{D}, \quad \operatorname{dn} 2nz = \frac{N_3}{D},$$

dove D è *una funzione razionale* e intera di $\operatorname{sn}^2 z$ di grado $2n^2$, N_1 di grado $2n^2 - 2$, ed N_2 e N_3 di grado $2n^2$; e

$$(2) \quad \operatorname{sn}(2n+1)z = \operatorname{sn} z \frac{N'_1}{D'}, \quad \operatorname{cn}(2n+1)z = \operatorname{cn} z \frac{N'_2}{D'}, \quad \operatorname{dn}(2n+1)z = \operatorname{dn} z \frac{N'_3}{D'}$$

dove D', N'_1, N'_2 e N'_3 sono funzioni razionali e intere di $\operatorname{sn}^2 z$ di grado $2n(n+1)$, e con i coefficienti funzioni razionali e intere di k^2.

Dall'equazioni (6) del n. 15, Parte I, abbiamo, qualunque sia n,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn} nz &= n \frac{\prod_{\alpha=0}^{n-1} \prod_{\beta=0}^{n-1} \operatorname{sn}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\prod_{\alpha=0}^{n-1}{}' \prod_{\beta=0}^{n-1}{}' \operatorname{sn}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}, \\ \operatorname{cn} nz &= \prod_{\alpha=0}^{n-1} \prod_{\beta=0}^{n-1} \frac{\operatorname{cn}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}, \\ \operatorname{dn} nz &= \prod_{\alpha=0}^{n-1} \prod_{\beta=0}^{n-1} \frac{\operatorname{dn}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Le formule (7), (8), (9) e (10), che valgono per n dispari, dànno:

$$\text{(4)}\qquad \operatorname{sn} nz = n \operatorname{sn} z\, \Pi_\alpha \Pi_\beta \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 z}{\operatorname{sn}^2 \dfrac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \dfrac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n} \operatorname{sn}^2 z},$$

$$\text{(5)}\qquad \operatorname{cn} nz = \operatorname{cn} z\, \Pi_\alpha \Pi_\beta \frac{1 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 \dfrac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}}{\operatorname{cn}^2 \dfrac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}} \operatorname{sn}^2 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \dfrac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n} \operatorname{sn}^2 z},$$

$$\text{(6)}\qquad \operatorname{dn} nz = \operatorname{dn} z\, \Pi_\alpha \Pi_\beta \frac{1 - \dfrac{k^2 \operatorname{cn}^2 \dfrac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}}{\operatorname{dn}^2 \dfrac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}} \operatorname{sn}^2 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \dfrac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n} \operatorname{sn}^2 z}.$$

Ponendo

$$\text{(7)}\qquad u = \sqrt{k} \operatorname{sn} z,$$

l'equazione (4) prende la forma

$$\text{(8)}\qquad \operatorname{sn} nz = \operatorname{sn} z \frac{n + a_1 u^2 + a_2 u^4 + \cdots + a_{\frac{n^2-1}{2}} u^{n^2-1}}{1 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \cdots + A_{\frac{n^2-1}{2}} u^{n^2-1}},$$

essendo

$$\text{(9)}\qquad a_{\frac{n^2-1}{2}} A_{\frac{n^2-1}{2}} = n.$$

Sostituendo $z + \frac{\omega'}{2}$ a z nella equazione (8) ed osservando che si ha

$$\operatorname{sn}\left(nz + \frac{n\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} nz}, \quad \operatorname{sn}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} z},$$

e quindi u diviene $\frac{1}{u}$, avremo

$$\operatorname{sn} nz = \operatorname{sn} z \frac{A_{\frac{n^2-1}{2}} + A_{\frac{n^2-3}{2}} u^2 + \cdots + A_1 u^{n^2-3} + u^{n^2-1}}{a_{\frac{n^2-1}{2}} + a_{\frac{n^2-3}{2}} u^2 + \cdots + a_1 u^{n^2-3} + n u^{n^2-1}};$$

onde confrontando colla equazione (8), si deduce

$$A_{\frac{n^2-1}{2}} = n a_{\frac{n^2-1}{2}}, \quad A_{\frac{n^2-1}{2}-r} = a_r a_{\frac{n^2-1}{2}}, \quad a_r = A_{\frac{n^2-1}{2}-r} a_{\frac{n^2-1}{2}},$$

e quindi

$$a_{\frac{n^2-1}{2}} = \pm 1, \quad A_{\frac{n^2-1}{2}} = \pm n, \quad a_r = \pm A_{\frac{n^2-1}{2}-r},$$

e indicando con ε l' unità positiva o negativa, la equazione (8) prende la forma

$$(10)\ \operatorname{sn} nz = \varepsilon \operatorname{sn} z \frac{u^{n^2-1} + A_1 u^{n^2-3} + A_2 u^{n^2-5} + \cdots + A_{\frac{n^2-3}{2}} u^2 + n\varepsilon}{1 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \cdots + A_{\frac{n^2-3}{2}} u^{n^2-3} + \varepsilon n u^{n^2-1}}.$$

Per determinare ε osserviamo che, mediante la formula (2) del n. 10, Parte I, abbiamo

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{4} + \varrho \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{(-1)^{\frac{2\varrho+1}{2}}}{\sqrt{k}};$$

quindi ponendo $z = \frac{\omega'}{4}$, sn$z$ diverrà $\frac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{k}}$, sn$nz$ diverrà $\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{k}}$, u prenderà per valore la radice quadrata dell' unità negativa, e la formula (10) darà

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

e la (10) prenderà la forma

$$(11)\quad \operatorname{sn} nz = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sn} z \frac{u^{n^2-1} + A_1 u^{n^2-3} + A_2 u^{n^2-5} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n}{1 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n u^{n^2-1}}.$$

Per determinare i coefficienti $A_1, A_2, \ldots$, osserviamo che ponendo

$$(12)\quad U = 1 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \cdots + A_{\frac{n^2-3}{2}} u^{n^2-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n u^{n^2-1},$$

abbiamo dalla equazione (8) del n. 15, Parte I,

$$\theta_{1,0}(nz) = \theta_{1,0}^{n^2}(z) U,$$

ed a cagione delle formule (16) del n. 10, Parte I,

$$(13)\qquad \Theta_{1,0}(nz) = \left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} \Theta_{1,0}^{n^2}(z) U.$$

Derivando due volte rapporto a z questa equazione, si ottiene

$$(14)\qquad \frac{\partial^2\Theta_{1,0}(nz)}{\partial(nz)^2}n^2$$
$$=\left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}\Theta^{n^2}_{1,0}(z)\left\{n^2 U\left[\frac{n^2-1}{\Theta^2_{1,0}(z)}\left(\frac{\partial\Theta_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial^2\Theta_{1,0}(z)}{\partial z^2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{2n^2}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial\Theta_{1,0}(z)}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\},$$

e derivando rapporto a q si ha

$$(15)\qquad \frac{\partial\Theta_{1,0}(nz)}{\partial q}$$
$$=\left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}\Theta^{n^2}_{1,0}(z)\left[U\left((n^2-1)\frac{d\log\sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}}{dq}+\frac{n^2}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial\Theta_{1,0}(z)}{\partial q}\right)+\frac{\partial U}{\partial q}\right].$$

Ora dall' equazione (3) del n. 14, Parte I, abbiamo

$$(16)\qquad \frac{\partial^2\Theta_{1,0}(z)}{\partial z^2}=-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\Theta_{1,0}(z)}{\partial q},$$

e dalla equazione (13) del n. 13

$$(17)\qquad \frac{\partial^2\log\Theta_{1,0}(z)}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial\Theta_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2\frac{1}{\Theta^2_{1,0}(z)}+\frac{1}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial^2\Theta_{1,0}(z)}{\partial z^2}$$
$$=-\left(\frac{\partial\Theta_{1,0}(z)}{\partial z}\right)^2\frac{1}{\Theta^2_{1,0}(z)}-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\log\Theta_{1,0}(z)}{\partial q}=-\frac{\eta}{\omega}-k^2\,\mathrm{sn}^2 z,$$

e quindi, ponendo $z=0$,

$$(18)\qquad \frac{d\log\sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}}{dq}=-\frac{\eta\omega}{4q\pi^2}.$$

Sostituendo i valori (14) e (15) nella equazione

$$\frac{\partial^2\Theta_{1,0}(nz)}{\partial(nz)^2}+4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial\Theta_{1,0}(nz)}{\partial q}=0,$$

e riducendo coll' equazioni (16), (17) e (18), si ottiene

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{2n^2}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial\Theta_{1,0}(z)}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}+4qn^2\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial U}{\partial q}+n^2(n^2-1)k^2\,\mathrm{sn}^2 z\,U=0,$$

ossia

$$(19)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\frac{\partial U}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{2n^2}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial \Theta_{1,0}(z)}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+4qn^2\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial u}{\partial q}\right)$$

$$+4qn^2\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial U}{\partial k}\frac{dk}{dq}+n^2(n^2-1)\,k^2\operatorname{sn}^2 z\, U=0\,.$$

Ora dalla equazione (7) si trae

$$(20)\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\sqrt{k}\operatorname{cn} z\operatorname{dn} z=\sqrt{k}\sqrt{1-\left(k+\frac{1}{k}\right)u^2+u^4}\,,$$

$$(21)\quad \frac{\partial u}{\partial q}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\Theta_{1,1}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}=\frac{1}{i\,\Theta_{1,0}^2(z)}\left(\Theta_{1,0}(z)\frac{\partial \Theta_{1,1}(z)}{\partial q}-\Theta_{1,1}(z)\frac{\partial \Theta_{1,0}(z)}{\partial q}\right)$$

$$=-\frac{\omega^2}{4iq\pi^2\,\Theta_{1,0}^2(z)}\left(\Theta_{1,0}(z)\frac{\partial^2 \Theta_{1,1}(z)}{\partial z^2}-\Theta_{1,1}(z)\frac{\partial^2 \Theta_{1,0}(z)}{\partial z^2}\right)$$

$$=-\frac{\omega^2}{4q\pi^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{2}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{\partial \Theta_{1,0}(z)}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

e la equazione (5) del n. 14, Parte I, ci dà

$$(22)\quad \frac{dk}{dq}=\frac{kk'^2\omega^2}{2q\pi^2}\,.$$

Sostituendo nella equazione (19) i valori (20), (21) e (22), abbiamo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\left[1-\left(k+\frac{1}{k}\right)u^2+u^4\right]+(n^2-1)\,u\left(k+\frac{1}{k}-2u^2\right)\frac{\partial U}{\partial u}+2n^2k'^2\frac{\partial U}{\partial k}$$

$$+\,n^2(n^2-1)\,u^2U=0\,.$$

Pongo

$$k+\frac{1}{k}=\alpha\,,$$

onde

$$\frac{d\alpha}{dk}=-\frac{k'^2}{k^2}\,,\quad \frac{k'^4}{k^2}=\alpha^2-4\,,$$

ed ho

$$(23)\quad (1-\alpha u^2+u^4)\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+(n^2-1)\,(\alpha u-2u^3)\frac{\partial U}{\partial u}+n^2(n^2-1)\,u^2U$$

$$=2n^2(\alpha^2-4)\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,.$$

Sostituisco il valore (12) in questa equazione, ed, eguagliando a zero i coefficienti delle diverse potenze di u, ottengo per la determinazione dei coefficienti $A_1, A_2, A_3, \ldots$, le seguenti equazioni:

$$(24)\quad \begin{cases} A_1 = 0\,, \\ 3.4A_2 + n^2(n^2-1) = 0\,, \\ 5.6A_3 + 4(n^2-4)A_2\alpha = 0\,, \\ 7.8A_4 + 6(n^2-6)A_3\alpha + (n^2-4)(n^2-5)A_2 = 2n^2(\alpha^2-4)\dfrac{dA_3}{d\alpha}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2r(2r-1)A_r + 2(r-1)(n^2-2r+2)\alpha A_{r-1} \\ \qquad + (n^2-2r+4)(n^2-2r+3)A_{r-2} = 2n^2(\alpha^2-4)\dfrac{dA_{r-1}}{d\alpha}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2.3A_{\frac{n^2-3}{2}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n(n^2-1)\alpha = 0\,. \end{cases}$$

Così per $n = 3$ abbiamo

$$A_1 = 0\,, \quad A_2 = -6\,, \quad A_3 = 4\alpha\,,$$

e quindi dalla equazione (11)

$$\operatorname{sn} 3z = \operatorname{sn} z \frac{3 - 4\alpha u^2 + 6u^4 - u^8}{1 - 6u^4 + 4\alpha u^6 - 3u^8}\,.$$

L'equazione (23) fu data da Jacobi senza dimostrazione nel volume IV del Giornale di Crelle.

8.

Se poniamo nella equazione (11) del numero precedente p in luogo di n e $\frac{z}{p}$ in luogo di z, abbiamo

$$(1)\quad (-1)^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{sn} z = \operatorname{sn}\frac{z}{p} \frac{k^{\frac{p^2-1}{2}} \operatorname{sn}^{p^2-1}\frac{z}{p} + A_2 k^{\frac{p^2-5}{2}} \operatorname{sn}^{p^2-5}\frac{z}{p} + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{1 + A_2 k^2 \operatorname{sn}^4\frac{z}{p} + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} p k^{\frac{p^2-1}{2}} \operatorname{sn}^{p^2-1}\frac{z}{p}}\,.$$

Risolvendo questa equazione di grado p^2 rispetto a $\operatorname{sn}\frac{z}{p}$, otteniamo $\operatorname{sn}\frac{z}{p}$ espresso in funzione di $\operatorname{sn} z$. ossia avremo le formule che dànno la *divisione* dell'argomento delle funzioni ellittiche per un numero intero, reale e dispari p.

Le radici della equazione (1) sono le p^2 quantità che si ottengono prendendo nella espressione

$$\operatorname{sn}\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p} \tag{2}$$

per r ed s tutti i valori interi e reali minori di p.

Infatti, mutando z in $z+2m\omega+2n\omega'$, essendo m ed n due numeri interi e reali qualunque, il primo membro della equazione (1) non muta, quindi non deve mutare neppure il secondo, e per ciò, se $\operatorname{sn}\frac{z}{p}$ è una radice della equazione, ne sarà radice anche $\operatorname{sn}\frac{z+2m\omega+2n\omega'}{p}$. Di questo numero infinito di radici soltanto p^2 sono differenti, essendo necessario e sufficiente, affinchè sia soddisfatta l'equazione

$$\operatorname{sn}\frac{z+2m\omega+2n\omega'}{p}=\operatorname{sn}\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}$$

che si abbiano le due congruenze

$$\left.\begin{matrix} m\equiv r \\ m\equiv s \end{matrix}\right\}(\bmod\ p)..$$

Quindi avremo tutte le radici della equazione (1) prendendo per r ed s nella espressione (2) tutti i residui differenti rispetto al modulo p, o anche tutti i numeri interi e reali minori di p.

Dalla equazione (1), per mezzo delle note relazioni tra le radici e i coefficienti, si deducono immediatamente le formule

$$\sum_0^{p-1}{}_r\sum_0^{p-1}{}_s \operatorname{sn}\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}=p\operatorname{sn} z, \tag{3}$$

$$\prod_0^{p-1}{}_r\prod_0^{p-1}{}_s \operatorname{sn}\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{\operatorname{sn} z}{k^{\frac{p^2-1}{2}}}. \tag{4}$$

Supponiamo ora che p sia un numero primo e passiamo alla risoluzione della equazione (1). Per determinare algebricamente le p^2 radici (2) di queste equazioni basterà trovare il valore della nota funzione di Lagrange

$$\mathrm{L}_{m,n}(z)=\sum_0^{p-1}{}_r\sum_0^{p-1}{}_s\,\alpha^{mr+ns}\operatorname{sn}\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}, \tag{5}$$

dove α è una radice immaginaria p^{esima} della unità.

Sostituendo alle funzioni ellittiche i loro valori espressi per le funzioni jacobiane dalle formule (1) del n. 2, riducendo allo stesso denominatore, sommando ed indicando con $N_{m,n}(z)$ il numeratore che sarà una funzione intera di z, si ottiene

$$L_{m,n}(z) = \frac{N_{m,n}(z)}{\prod_0^{p-1}{}_r \prod_0^{p-1}{}_s \, \theta_{1,0}\left(\frac{z + 2r\omega + 2s\omega'}{p}\right)}.$$

Ma, ponendo mente alla equazione (6) del n. 15, Parte I, si ricava

$$\prod_0^{p-1}{}_r \prod_0^{p-1}{}_s \, \theta_{1,0}\left(\frac{z + 2r\omega + 2s\omega'}{p}\right) = e^{az+b}\, \theta_{1,0}(z),$$

dove a e b sono indipendenti da z. Onde includendo la funzione intera e^{-az-b} nella funzione intera $N_{m,n}$, avremo

$$L_{m,n}(z) = \frac{N_{m,n}(z)}{\theta_{1,0}(z)}. \tag{6}$$

Ora dalla equazione (5) si deduce facilmente

$$L_{m,n}(z+\omega) = -\alpha^{-m\frac{p+1}{2}} L_{m,n}(z), \quad L_{m,n}(z+\omega') = \alpha^{-n\frac{p+1}{2}} L_{m,n}(z). \tag{7}$$

Sostituendo nelle equazioni (7) il valore (6), osservando l'equazioni (4) e (5) del n. 6, Parte I, e ponendo

$$\alpha = e^{-\frac{8\pi i}{p}}, \tag{8}$$

si ottiene

$$N_{m,n}(z+\omega) = -e^{\frac{4m\pi i}{p}} N_{m,n}(z),$$

$$N_{m,n}(z+\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[2\left(z-\frac{2n\omega}{p}\right)+\omega'\right]} N_{m,n}(z).$$

Ponendo

$$N_{m,n}(z) = e^{\frac{4m\pi i z}{p\omega}} V\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right),$$

$$u = z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p},$$

abbiamo

$$V(u+\omega) = -V(u), \qquad V(u+\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2u+\omega')} V(u). \tag{9}$$

ed essendo $V(u)$ una funzione intera di u, sarà

$$V(u) = A_{m,n}\, \theta_{1,1}(u),$$

dove $A_{m,n}$ è indipendente da u. Quindi avremo

$$N_{m,n}(z) = A_{m,n}\, e^{\frac{4m\pi i z}{p\omega}}\, \theta_{1,1}\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right),$$

$$(10)\quad L_{m,n}(z) = A_{m,n}\, e^{\frac{4m\pi i z}{p\omega}} \frac{\theta_{1,0}\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}(z)} \operatorname{sn}\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right).$$

Per determinare $A_{m,n}$ pongo nella equazione (10) $z + \frac{p\omega'}{2}$ in luogo di z, ed osservando che si ha dalla equazione (5), ponendo mente alla equazione (14) del n. 2,

$$L_{m,n}\left(z + \frac{p\omega'}{2}\right) = \sum_0^{p-1}{}_r \sum_0^{p-1}{}_s \frac{\alpha^{mr+ns}}{k \operatorname{sn}\left(z + \frac{2r\omega + 2s\omega'}{p}\right)},$$

e dalla equazione (10) del n. 10, Parte I,

$$\Theta_{1,0}\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p} + \frac{p\omega'}{2}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(pz + 2m\omega' - 2n\omega + \frac{p^2\omega'}{4}\right)} \Theta_{1,1}\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right),$$

$$\Theta_{1,0}\left(z + \frac{p\omega'}{2}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(pz + \frac{p^2\omega'}{4}\right)} \Theta_{1,1}(z),$$

ottengo

$$\sum_0^{p-1}{}_r \sum_0^{p-1}{}_s \frac{\alpha^{mr+ns}}{\operatorname{sn} \frac{z + 2r\omega + 2s\omega'}{p}} = A_{m,n}\, e^{\frac{4m\pi i z}{p\omega}} \frac{\Theta_{1,0}\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right)}{\Theta_{1,0}(z) \operatorname{sn} z}.$$

Moltiplico i due membri di questa equazione per $\frac{z}{p}$, pongo $z = 0$, ed ho

$$1 = A_{m,n} \frac{\Theta_{1,0}\left(\frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right)}{p\Theta_{1,0}(0)},$$

onde

$$A_{m,n} = \frac{p\Theta_{1,0}(0)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right)} = \frac{p}{\theta_{1,0}\left(\frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right)},$$

e quindi

$$L_{m,n}(z) = p e^{\frac{4m\pi i z}{p\omega}} \frac{\theta_{1,0}\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}(z)\, \theta_{1,0}\left(\frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right)} \operatorname{sn}\left(z + \frac{2m\omega' - 2n\omega}{p}\right).$$

Prendendo per σ il minimo intero positivo che sodisfa alla congruenza

$$m\sigma + n \equiv 0 \pmod{p},$$

e ponendo

$$\varpi_\sigma = \frac{\omega' + \sigma\omega}{p}, \tag{11}$$

avremo

$$\mathrm{L}_{m,n}(z) = pe^{\frac{4m\pi iz}{p\omega}} \frac{\theta_{1,0}(z + 2m\varpi_\sigma)}{\theta_{1,0}(2m\varpi_\sigma)\,\theta_{1,0}(z)} \operatorname{sn}(z + 2m\varpi_\sigma). \tag{12}$$

Ora sia

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = p\Omega' - \sigma\Omega, \quad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\Lambda'}{\Lambda}, \quad \frac{\Omega}{\Lambda} = \mathrm{M}, \tag{13}$$

dalla equazione (21) del n. 18, Parte I, avremo

$$\theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{1,0}^{p}(z) \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z). \tag{14}$$

Le equazioni (11) e (13) dànno

$$\varpi_\sigma = \Omega' = \Lambda'\mathrm{M},$$

quindi

$$e^{-\frac{2m\pi i}{\Lambda}\left(\frac{2z}{\mathrm{M}} + 2m\Lambda'\right)} \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \tag{15}$$

$$= \theta_{1,0}^{p}(z + 2m\varpi_\sigma) \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \left\{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 (z + 2m\varpi_\sigma)\right\},$$

e, ponendo $z = 0$,

$$e^{-\frac{4m^2\pi i\Lambda'}{\Lambda}} = \theta_{1,0}^{p}(2m\varpi_\sigma) \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 2m\varpi_\sigma). \tag{16}$$

Dividendo la equazione (15) per il prodotto dell'equazioni (14) e (16), otteniamo

$$\frac{\theta_{1,0}(z + 2m\varpi_\sigma)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,0}(2m\varpi_\sigma)} = e^{-\frac{4m\pi iz}{p\omega}} \sqrt[p]{\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 2m\varpi_\sigma)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 (z + 2m\varpi_\sigma)}},$$

e quindi, ponendo

$$\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 2m\varpi_\sigma)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 (z + 2m\varpi_\sigma)} = \mathrm{T}_{m,n}(z),$$

avremo

$$(17)\qquad L_{m,n}(z)=p\sqrt[p]{T_{m,n}(z)}\,\mathrm{sn}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)$$
$$=\sum_0^{p-1}{}_r\sum_0^{p-1}{}_s\,\alpha^{mr+ns}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right).$$

Dalle p^2 equazioni che si ottengono dalla equazione (17) dando ad m e ad n tutti i valori interi e reali minori di p, si ricava facilmente

$$(18)\qquad p\,\mathrm{sn}\left(\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right)$$
$$=\sum_0^{p-1}{}_m\sum_0^{p-1}{}_n\,\alpha^{-(mr+ns)}\,\mathrm{sn}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)\sqrt[p]{T_{m,n}(z)}\,,$$

che dà le p^2 radici della equazione (1) espresse *algebricamente* per $\mathrm{sn}\,z$, e per le p^2-1 quantità $\mathrm{sn}\,\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}$, le quali sono radici della equazione di grado p^2-1, che si ottiene dalla equazione (1) ponendovi $z=0$ e della quale tratteremo in seguito.

La formula (18) è dovuta a Jacobi che la pubblicò senza dimostrazione nel vol. IV del Giornale di Crelle.

9.

Passiamo ora a determinare tutte le funzioni ellittiche che sono razionalmente esprimibili per una funzione ellittica data, colla sola condizione che l'argomento di quelle sia una funzione lineare e intera dell'argomento di questa; cioè proponiamoci di determinare M, N, λ e le funzioni razionali e intere f ed F in modo che sia

$$(1)\qquad \mathrm{sn}(Mz+N\,,\lambda)=\frac{f[\mathrm{sn}(z\,,k)]}{F[\mathrm{sn}(z\,,k)]}.$$

La risoluzione di questo problema costituisce la *trasformazione* delle funzioni ellittiche.

Mutando z in $z+2\omega$ oppure in $z+\omega'$ non muta evidentemente il secondo membro dell'equazione (1); quindi non dovrà mutare neppure il primo. Pertanto $2M\omega$ ed $M\omega'$ dovranno essere periodi di $\mathrm{sn}(z\,,\lambda)$, e indicando con $\varDelta$ e $\varDelta'$ ciò che divengono ω ed ω' quando si cangia k in λ, avremo

$$(2)\qquad 2M\omega=2\alpha\varDelta+\beta\varDelta'\,,\qquad M\omega'=2\gamma\varDelta+\delta\varDelta'\,.$$

Mutando z in $\omega - z$ il secondo membro della equazione (1) non muta, quindi non dovrà mutare neppure il primo, ed avremo

$$\mathrm{sn}(M\omega - Mz + N, \lambda) = \mathrm{sn}[M\omega + 2N - (Mz + N), \lambda] = \mathrm{sn}(Mz + N, \lambda),$$

onde

$$M\omega + 2N = (2p + 1)\Delta + q\Delta',$$

e sostituendo il valore di $M\omega$ tratto dalla prima dell' equazioni (2), si ottiene

$$N = (2p + 1 - \alpha)\frac{\Delta}{2} + (2q - \beta)\frac{\Delta'}{4}, \tag{3}$$

dove p e q sono interi e reali qualunque.

Risolvendo l' equazioni (2) e ponendo

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta,$$

abbiamo

$$\frac{2\Delta}{M} = \frac{2\delta\omega - \beta\omega'}{\Delta}, \qquad \frac{\Delta'}{M} = \frac{\alpha\omega' - 2\gamma\omega}{\Delta}. \tag{4}$$

Ora tutti i valori di z per i quali non muta la funzione $\mathrm{sn}(Mz + N, \lambda)$ sono dati dalle due espressioni

$$z + 2m\frac{\Delta}{M} + m'\frac{\Delta'}{M} = z + 2\,\frac{m\delta - m'\gamma}{\Delta}\,\omega + \frac{m'\alpha - m\beta}{\Delta}\,\omega',$$

$$(2n+1)\frac{\Delta}{M} + n'\frac{\Delta'}{M} - \frac{2N}{M} - z = \omega - z + 2\,\frac{n\delta - n'\gamma}{\Delta}\,\omega + \frac{n'\alpha - n\beta}{\Delta}\,\omega'.$$

Quindi le radici della funzione intera

$$F(x)\,\mathrm{sn}(Mz + N, \lambda) - f(x) \tag{5}$$

saranno date tutte dalla formula

$$x = \mathrm{sn}\left(z + 2\,\frac{m\delta - m'\gamma}{\Delta}\,\omega + \frac{m'\alpha - m\beta}{\Delta}\,\omega'\right). \tag{6}$$

Osserviamo ora che ponendo le congruenze

$$m\delta - m'\gamma \equiv t, \quad m'\alpha - m\beta \equiv s \pmod{\Delta}$$

abbiamo

$$\alpha t + \gamma s \equiv 0,$$

e prendendo

$$\alpha + \gamma r \equiv 0,$$

se γ è primo con Δ, si ottiene

$$s \equiv rt.$$

Dunque i valori dati dalla formula (6) si riducono ai soli Δ compresi nella formula

$$x = \mathrm{sn}\left(z + \frac{t}{\Delta}(2\omega + r\omega'), k\right)$$

dove a t si diano successivamente i valori $0, 1, 2, \ldots \Delta - 1$. Quindi le radici distinte della funzione intera (5) sono Δ, e poichè questa funzione finchè z conserva un valor generale non può avere radici eguali senza che $f(x)$ ed $\mathrm{F}(x)$ abbiano fattori comuni, che si suppongono tolti nella formula (1), Δ sarà precisamente il grado della funzione (5), e quindi tanto f quanto F non potranno essere di grado superiore a Δ, e una di esse sarà certamente di grado Δ.

Cominciamo dal considerare il caso in cui si ha

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta = 1. \tag{7}$$

Le due funzioni f ed F saranno di primo grado, cioè, ponendo

$$y = \mathrm{sn}(\mathrm{M}z + \mathrm{N}, \lambda), \quad x = \mathrm{sn}(z, k), \tag{8}$$

avremo

$$y = \mathrm{A}\frac{1 + \mathrm{B}x}{1 + \mathrm{C}x}. \tag{9}$$

Qui occorre distinguere due casi, secondo che nella relazione (2) β è pari o dispari.

1°. Sia β un numero pari eguale a $2\beta'$. Poniamo

$$\mathcal{A} = \mathrm{M}\Omega, \quad \mathcal{A}' = \mathrm{M}\Omega';$$

avremo dall'equazioni (2)

$$\omega = \alpha\Omega + \beta'\Omega', \quad \omega' = 2\gamma\Omega + \delta\Omega'. \tag{10}$$

Se β' è un numero pari, dall'equazione (7) si deducono facilmente le congruenze

$$\alpha \equiv 1, \quad \beta' \equiv 0, \quad 2\gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \pmod{2}. \tag{11}$$

Quindi togliendo dal valore (3) di N i multipli di $2\mathcal{A}$ e di $\mathcal{A}'$ che non mutano il valore di y, resteranno per N soltanto i quattro valori essenzialmente distinti

$$\mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{N} = \mathcal{A}, \quad \mathrm{N} = \frac{\mathcal{A}'}{2}, \quad \mathrm{N} = \frac{\mathcal{A}'}{2} + \mathcal{A}.$$

Quando $\mathrm{N} = 0$, l'equazioni (10) e le congruenze (11) ci pongono precisamente nel caso 4° del n. 16, Parte I, e quindi dalle formule (17) di quel numero si ricava facilmente

$$\lambda^2 = k^2, \quad \mathrm{sn}(z, \lambda) = \mathrm{sn}(z, k).$$

Per gli altri valori di N basterà rammentare le formule (2) e (**14**) **del** n. 2, e avremo nelle formule (8) e (9)

$$
(12)\qquad \left\{ \lambda = k\,,\ \mathrm{M} = 1\,,\ \begin{array}{ll} \mathrm{N} = 0\,, & y = x\,, \\ \mathrm{N} = \varDelta\,, & y = -x\,, \\ \mathrm{N} = \frac{\varDelta'}{2}\,, & y = \frac{1}{kx}\,. \\ \mathrm{N} = \frac{\varDelta'}{2} + \varDelta\,, & y = -\frac{1}{kx}\,. \end{array} \right.
$$

Se β' è un numero dispari, avremo le congruenze

$$
(13)\qquad \alpha \equiv 1\,,\quad \beta' \equiv 1\,,\quad 2\gamma \equiv 0\,,\quad \delta \equiv 1 \pmod{2},
$$

e le relazioni (10) colle congruenze (13) ci porranno nel caso 1° del n. **16**, Parte I; onde, prendendo $\mathrm{N} = 0$, dalla formula (14) di quel numero si ottiene

$$
(14)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda = \frac{1}{k}\,;\ \mathrm{M} = k\,; & \mathrm{N} = 0\,, & y = kx\,, \\ & \mathrm{N} = \varDelta\,, & y = -kx\,, \\ & \mathrm{N} = \frac{\varDelta'}{2}\,, & y = \frac{1}{x}\,, \\ & \mathrm{N} = \frac{\varDelta'}{2} + \varDelta\,, & y = -\frac{1}{x}\,. \end{array} \right.
$$

2° Sia β un numero dispari. Togliendo dal valore (3) di N i multipli di $2\varDelta$ e di $\varDelta'$, con che non si muta il valore di y, avremo i soli quattro valori distinti

$$
(15)\qquad \begin{array}{ll} \mathrm{N} = (1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} + \frac{\varDelta'}{4}\,, & \mathrm{N} = (1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} + \frac{\varDelta'}{4} + \varDelta\,, \\ \mathrm{N} = (1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} - \frac{\varDelta'}{4}\,, & \mathrm{N} = (1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} - \frac{\varDelta'}{4} + \varDelta\,. \end{array}
$$

Ora la funzione

$$
\mathrm{sn}\left(\mathrm{M}z + (1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} + \frac{\varDelta'}{4}\,,\ \lambda\right)
$$

si annulla prendendo

$$
z = (\alpha - 1)\frac{\varDelta}{2\mathrm{M}} - \frac{\varDelta'}{4\mathrm{M}} = \left(\gamma + \delta(\alpha - 1)\right)\frac{\omega}{2} + \left(\beta(1-\alpha) - \alpha\right)\frac{\omega'}{4}\,,
$$

e diviene infinita quando sia

$$z = -(\alpha - 1)\frac{\varDelta}{2\mathrm{M}} + \frac{\varDelta'}{4\mathrm{M}} = -\Big(\gamma + \delta(\alpha - 1)\Big)\frac{\omega}{2} - \Big(\beta(1-\alpha) - \alpha\Big)\frac{\omega'}{4};$$

quindi nella formula (9) avremo

$$\text{(16)}\qquad \mathrm{C} = -\mathrm{B} = \frac{1}{\operatorname{sn}\left[\Big(\gamma + \delta(\alpha - 1)\Big)\frac{\omega}{2} + \Big(\beta(1-\alpha) - \alpha\Big)\frac{\omega'}{4}\right]}.$$

Dalle formule (2) del n. 10, Parte I, si ha:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{4} + \frac{\varrho\omega'}{2} + \frac{\sigma\omega}{2}\right) = \frac{i^{\sigma-1}}{\sqrt{k}}\frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n(\sigma+1)}q^{\frac{(2n+1)(n+\rho+1)}{2}}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n(\sigma+1)}q^{\frac{n(2n+2\rho+1)}{2}}}$$

$$= \frac{i^{\sigma-1}}{\sqrt{k}}\frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n(\sigma+1)}q^{\frac{(2n+1)(n+\rho+1)}{2}}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^{(n-\rho-1)(\sigma+1)}q^{\frac{(2n-1)(n-\rho-1)}{2}}};$$

quindi

$$\text{(17)}\qquad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{4} + \frac{\varrho\omega'}{2} + \frac{\sigma\omega}{2}\right) = \frac{i^{\sigma+2(\rho+1)(\sigma+1)-1}}{\sqrt{k}}.$$

Ponendo

$$\sigma = \gamma + \delta(\alpha - 1), \quad \varrho = \frac{\beta - 1 - \alpha(\beta + 1)}{2}$$

e osservando che si ha $\beta + 1 \equiv 0$ (mod. 2), l'equazione (16) diviene

$$\text{(18)}\qquad \mathrm{C} = -\mathrm{B} = i^{\varepsilon}\sqrt{k}$$

dove

$$\varepsilon \equiv 1 - \gamma + \delta(1 - \alpha)(\beta + 2) \pmod{4}$$

e la equazione (9) prende la forma

$$\text{(19)}\qquad y = \mathrm{A}\,\frac{1 - i^{\varepsilon}\,x\sqrt{k}}{1 + i^{\varepsilon}\,x\sqrt{k}}.$$

Pongo $z = 0$, ed osservando la formola (17), ottengo

$$\text{(20)}\qquad \mathrm{A} = \frac{i^{\alpha}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Facendo $z = \frac{\omega}{2} = \frac{\alpha \varDelta}{2M} + \frac{\beta \varDelta'}{4M}$, avremo

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\varDelta}{2} + \frac{\beta+1}{2}\frac{\varDelta'}{2}, \lambda\right) = \frac{i^\alpha}{\sqrt{\lambda}}\frac{1 - i^\varepsilon\sqrt{k}}{1 + i^\varepsilon\sqrt{k}},$$

onde quando $\frac{\beta+1}{2}$ è pari sarà

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = i^{-\alpha}\frac{1 + i^\varepsilon\sqrt{k}}{1 - i^\varepsilon\sqrt{k}}, \quad A = \frac{1 + i^\varepsilon\sqrt{k}}{1 - i^\varepsilon\sqrt{k}},$$

e quando $\frac{\beta+1}{2}$ è dispari

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = i^{\alpha}\frac{1 - i^\varepsilon\sqrt{k}}{1 + i^\varepsilon\sqrt{k}}, \qquad A = i^{2\alpha}\frac{1 - i^\varepsilon\sqrt{k}}{1 + i^\varepsilon\sqrt{k}},$$

e quindi in generale

$$(21)\quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = i^{-\alpha(-1)^{\frac{\beta+1}{2}}}\frac{1 + (-1)^{\frac{\beta+1}{2}} i^\varepsilon\sqrt{k}}{1 - (-1)^{\frac{\beta+1}{2}} i^\varepsilon\sqrt{k}}, \quad A = (-1)^{\frac{\alpha(\beta+1)}{2}}\frac{1 + (-1)^{\frac{\beta+1}{2}} i^\varepsilon\sqrt{k}}{1 - (-1)^{\frac{\beta+1}{2}} i^\varepsilon\sqrt{k}}.$$

Per determinare M derivo rapporto a z l'equazione (19), ed ottengo

$$(22)\quad M\operatorname{cn}\left(Mz + (1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} + \frac{\varDelta'}{4}, \lambda\right)\operatorname{dn}\left(Mz + (1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} + \frac{\varDelta'}{4}, \lambda\right)$$
$$= -\frac{2i^\varepsilon\sqrt{k}A}{(1 + i^\varepsilon x\sqrt{k})^2}\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z.$$

Pongo $z = 0$, ed osservando che dalla equazione (17) si ha

$$\operatorname{sn}\left((1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} + \frac{\varDelta'}{4}, \lambda\right) = \frac{i^\alpha}{\sqrt{\lambda}}$$

e quindi

$$\operatorname{cn}\left((1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} + \frac{\varDelta'}{4}, \lambda\right) = \frac{i^{-\alpha+1}}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1 - i^{2\alpha}\lambda},$$
$$\operatorname{dn}\left((1-\alpha)\frac{\varDelta}{2} + \frac{\varDelta'}{4}, \lambda\right) = \sqrt{1 - i^{2\alpha}\lambda};$$

la equazione (22) darà

$$M(1 - i^{2\alpha}\lambda) = -2i^{2\alpha+\varepsilon+1}\sqrt{k},$$

e riducendo colla equazione (21), ottengo

$$(23)\qquad M = (-1)^{\alpha+\frac{\beta-1}{2}}\frac{i}{2}\left(1 + (-1)^{\frac{\beta+1}{2}} i^\varepsilon\sqrt{k}\right)^2;$$

e l' equazione (19) diviene

$$(24)\qquad y=(-1)^{\frac{\alpha(\beta+1)}{2}}\frac{1+(-1)^{\frac{\beta+1}{2}}i^{\prime}\sqrt{k}}{1-(-1)^{\frac{\beta+1}{2}}i^{\prime}\sqrt{k}}\;\frac{1-i^{\prime}x\sqrt{k}}{1+i^{\prime}x\sqrt{k}}.$$

Quando N ha gli altri tre valori (15) valgono sempre le stesse formule (21), (23), e soltanto nella formula (24) si deve sostituire $-y$, $\frac{1}{\lambda y}$, $-\frac{1}{\lambda y}$ ad y.

Pertanto quando β è dispari avremo quattro sole trasformazioni lineari differenti, cioè

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&\lambda^2=\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4, \quad M=\pm\frac{i}{2}(1+\sqrt{k})^2, \quad y=\pm\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\;\frac{1\pm x\sqrt{k}}{1\mp x\sqrt{k}},\\
&\lambda^2=\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4, \quad M=\pm\frac{i}{2}(1-\sqrt{k})^2, \quad y=\pm\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\;\frac{1\pm x\sqrt{k}}{1\mp x\sqrt{k}},\\
&\lambda^2=\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^4, \quad M=\pm\frac{i}{2}(1+i\sqrt{k})^2, \quad y=\pm\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\;\frac{1\pm ix\sqrt{k}}{1\mp ix\sqrt{k}},\\
&\lambda^2=\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^4, \quad M=\pm\frac{i}{2}(1-i\sqrt{k})^2, \quad y=\pm\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\;\frac{1\pm ix\sqrt{k}}{1\mp ix\sqrt{k}}.
\end{aligned}\right.$$

Le formule (12), (14) e (25) dànno tutte le possibili trasformazioni lineari, e se ne hanno soltanto 6 differenti per i moduli, 24 per i valori di y e 12 per quelli di y^2.

10.

Consideriamo ora il caso in cui è

$$(1)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=p,$$

e p numero primo. Poichè la sostituzione (2) del numero precedente, come abbiamo dimostrato nel n. 19, Parte I, equivale a due consecutive, una di primo ordine e l' altra di una delle due forme

$$(2)\qquad \omega=p\Omega, \qquad \omega'=\Omega';$$

$$(3)\qquad \omega=\Omega, \qquad \omega'=2\varrho\Omega+p\Omega';$$

dove ϱ è un numero intero e reale minore di p, si potrà sempre riguardare una trasformazione di ordine p come risultante da una trasformazione lineare e da una trasformazione di ordine p nella quale l' equazioni (2) del numero precedente abbiano la forma (2) o (3). Pertanto ci dovremo limitare soltanto a queste ultime $p+1$ trasformazioni.

Sia $p=2$. Per la trasformazione in cui ha luogo la sostituzione (2), dalle formule (22), (24), (25) e (26) del n. 17, Parte I, si ricava facilmente

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{sn}[(1+k')z, \lambda] = (1+k')\frac{\operatorname{sn}(z,k)\operatorname{cn}(z,k)}{\operatorname{dn}(z,k)}, \quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Per la trasformazione nella quale si ha $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$, $\delta=2$, dall'equazioni (8), (14), (20) e (21) del n. 17, Parte I, si ottiene

$$\text{(5)} \qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}[(1+k)z, \lambda] &= \frac{(1+k)\operatorname{sn}(z,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(z,k)}, \\ \operatorname{cn}[(1+k)z, \lambda] &= \frac{\operatorname{cn}(z,k)\operatorname{dn}(z,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(z,k)}, \\ \operatorname{dn}[(1+k)z, \lambda] &= \frac{1-k\operatorname{sn}^2(z,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(z,k)}, \\ \lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, &\quad \lambda' = \frac{1-k}{1+k}. \end{aligned}\right.$$

Ora sia p un numero primo dispari qualunque. Le $p+1$ trasformazioni di ordine p corrispondenti alle sostituzioni (2) e (3) sono date immediatamente dalle formule dei numeri 18 e 19, Parte I.

Dall'equazioni (14), (15), (16) e (17) del n. 18, Parte I, abbiamo

$$\text{(6)} \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}_\sigma \operatorname{sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right) &= \frac{\prod_{0}^{p-1}{}_t \operatorname{sn}(z+t\varpi_\sigma)}{\prod_{1}^{p-1}{}_t \operatorname{sn} t\varpi_\sigma}, \\ \operatorname{cn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right) &= \prod_{0}^{p-1}{}_t \frac{\operatorname{cn}(z+t\varpi_\sigma)}{\operatorname{cn} t\varpi_\sigma}, \\ \operatorname{dn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right) &= \prod_{0}^{p-1}{}_t \frac{\operatorname{dn}(z+t\varpi_\sigma)}{\operatorname{dn} t\varpi_\sigma}; \end{aligned}\right.$$

e dalle formule (20), (21), (22) e (23) dello stesso numero

$$\text{(7)} \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}_\sigma \operatorname{sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right) &= \operatorname{sn} z \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2 z}{\operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z}, \\ \operatorname{cn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right) &= \operatorname{cn} z \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{1-\dfrac{\operatorname{dn}^2 t\varpi_\sigma}{\operatorname{cn}^2 t\varpi_\sigma}\operatorname{sn}^2 z}{1-k^2\operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z}, \\ \operatorname{dn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right) &= \operatorname{dn} z \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{1-\dfrac{k^2\operatorname{cn}^2 t\varpi_\sigma}{\operatorname{dn}^2 t\varpi_\sigma}\operatorname{sn}^2 z}{1-k^2\operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z}, \end{aligned}\right.$$

essendo

$$\varpi_\infty = \frac{\omega}{p}, \quad \varpi_\sigma = \frac{\omega' + 2\sigma\omega}{p}; \tag{8}$$

e dalle equazioni (9), (10) e (11) del n. 19, Parte I

$$M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\mathrm{cn}^2 t\varpi_\sigma}{\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma \mathrm{dn}^2 t\varpi_\sigma}, \tag{9}$$

$$\lambda_\sigma^2 = k^{2p} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\mathrm{cn}^8 t\varpi_\sigma}{\mathrm{dn}^8 t\varpi_\sigma}, \tag{10}$$

$$\lambda'^2_\sigma = k'^{2p} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{1}{\mathrm{dn}^8 t\varpi_\sigma}, \tag{11}$$

dalle quali si trae

$$\left\{\begin{aligned} &M_\sigma \prod_1^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} M_\sigma \prod_1^{p-1} \mathrm{sn}\, t\varpi_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}},\\ &\prod_1^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{cn}^2 t\varpi_\sigma = \prod_1^{p-1} \mathrm{cn}\, t\varpi_\sigma = \sqrt{\frac{\lambda_\sigma k'^p}{\lambda'_\sigma k^p}},\\ &\prod_1^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{dn}^2 t\varpi_\sigma = \prod_1^{p-1} \mathrm{dn}\, t\varpi_\sigma = \sqrt{\frac{k'^p}{\lambda'_\sigma}}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Onde l'equazioni (6) divengono

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sqrt{\frac{k^p}{\lambda_\sigma}} \prod_0^{p-1}{}_t \mathrm{sn}(z + t\varpi_\sigma),\\ &\mathrm{cn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sqrt{\frac{\lambda'_\sigma k^p}{\lambda_\sigma k'^p}} \prod_0^{p-1}{}_t \mathrm{cn}(z + t\varpi_\sigma),\\ &\mathrm{dn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sqrt{\frac{\lambda'_\sigma}{k'^p}} \prod_0^{p-1}{}_t \mathrm{dn}(z + t\varpi_\sigma). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Riducendo l'equazioni (7) colle formule (12), e ponendo

$$u = \mathrm{sn}\, z, \quad v = \mathrm{cn}\, z, \quad w = \mathrm{dn}\, z,$$

abbiamo

$$\left\{\begin{aligned} &u \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t (u^2 - \mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma) - \frac{\lambda_\sigma}{k M_\sigma} \mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \left(u^2 - \frac{1}{k^2 \mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}\right) = 0,\\ &v \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t (v^2 - \mathrm{cnc}^2 t\varpi_\sigma) - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \lambda_\sigma}{k M_\sigma} \mathrm{cn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \left(v^2 + \frac{\mathrm{dn}^2 t\varpi_\sigma}{k^2 \mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}\right) = 0,\\ &w \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \left(w^2 + \frac{k'^2 \mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{\mathrm{cn}^2 t\varpi_\sigma}\right) - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{M_\sigma} \mathrm{dn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \left(w^2 + \frac{\mathrm{cn}^2 t\varpi_\sigma}{\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ora poichè queste equazioni non sono altro che l'equazioni (13) poste sotto altra forma, è chiaro che avranno rispettivamente per radici le quantità

$$\mathrm{sn}(z+t\varpi_\sigma)\,,\quad \mathrm{cn}(z+t\varpi_\sigma)\,,\quad \mathrm{dn}(z+t\varpi_\sigma)\,,$$

dove per t si prendono tutti i valori interi non maggiori in valore assoluto di $\frac{p-1}{2}$. Quindi per le note relazioni tra i coefficienti e le radici, avremo

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda_\sigma}{k\mathrm{M}_\sigma}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\sum\limits_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\mathrm{sn}(z+t\varpi_\sigma),\\[2ex] (-1)^{\frac{p-1}{2}}\dfrac{\lambda_\sigma}{k\mathrm{M}_\sigma}\,\mathrm{cn}\left(\dfrac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\sum\limits_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\mathrm{cn}(z+t\varpi_\sigma),\\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{\mathrm{M}_\sigma}\,\mathrm{dn}\left(\dfrac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\sum\limits_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\mathrm{dn}(z+t\varpi_\sigma). \end{cases}$$

Dall' equazioni (20), (21), (22) e (23) del n. 18, Parte I, abbiamo

$$\mathrm{M}_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta^p_{1,1}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2 z}-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}\right),$$

$$\theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta^p_{1,0}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 z)\,,$$

$$\theta_{0,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta^p_{0,1}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\frac{1}{\mathrm{cn}^2 t\varpi_\sigma}\left(\mathrm{dn}^2 t\varpi_\sigma-\frac{k'^2\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{\mathrm{cn}^2 z}\right),$$

$$\theta_{0,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta^p_{0,0}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\frac{1}{\mathrm{dn}^2 t\varpi_\sigma}\left(\mathrm{cn}^2 t\varpi_\sigma+\frac{k'^2\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{\mathrm{dn}^2 z}\right).$$

Derivando logaritmicamente queste equazioni, a cagione dell'equazione (1) del n. 4, si ottiene

$$\frac{1}{\mathrm{M}_\sigma}\mathrm{Z}_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=p\mathrm{Z}_{1,1}(z)+\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\frac{2\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{\mathrm{sn}\,z(\mathrm{sn}^2 z-\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma)},$$

$$\frac{1}{\mathrm{M}_\sigma}\mathrm{Z}_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=p\mathrm{Z}_{1,0}(z)-\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\frac{2k^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 z},$$

$$\frac{1}{\mathrm{M}_\sigma}\mathrm{Z}_{0,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=p\mathrm{Z}_{0,1}(z)-\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\frac{2k'^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{\mathrm{cn}\,z(\mathrm{cn}^2 z-\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma\,\mathrm{dn}^2 z)},$$

$$\frac{1}{\mathrm{M}_\sigma}\mathrm{Z}_{0,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=p\mathrm{Z}_{0,0}(z)+\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\frac{2k^2k'^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{\mathrm{dn}\,z(\mathrm{dn}^2 z-k^2\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma\,\mathrm{cn}^2 z)};$$

e riducendo coll'equazioni (19), (20), (21) e (22) del n. 4, si ha

$$\frac{1}{M_\sigma} Z_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sum_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t Z_{\mu,\nu}(z + t\varpi_\sigma), \tag{16}$$

dove μ e ν sono eguali a zero o all'unità.

Denotiamo con Y_σ e Y'_σ le quantità alle quali divengono eguali η e η', quando si muta k in λ_σ, e determiniamo le relazioni che esistono tra Y_σ, Y'_σ e η, η'.

Sostituendo nella equazione

$$\frac{1}{M_\sigma} Z_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = pZ_{1,0}(z) - 2k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z \sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z}$$

il valore di $Z_{1,0}$ che si trae dall'equazione (15) del n. 12, Parte I, abbiamo

$$-\frac{Y_\sigma z}{M_\sigma^2 \Delta_\sigma} + \frac{\chi'_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}$$

$$= -\frac{p\eta z}{\omega} + p\frac{\chi'_{1,0}(z)}{\chi_{1,0}(z)} - 2k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z \sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z}.$$

Dividendo per z, ponendo $z = 0$, osservando l'equazioni (12) e l'altra

$$\left(\frac{\chi'_{1,0}(z)}{z}\right)_{z=0} = 0,$$

che si desume dall'espressione di $\chi_{1,0}(z)$ trovata nel n. 13, Parte I, si ottiene

$$\frac{Y_\sigma}{M_\sigma^2 \Delta_\sigma} = \frac{p\eta}{\omega} + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{2k^2}{M_\sigma} \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}}, \tag{17}$$

onde

$$Y_\sigma = pM_\sigma \eta + (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2k^2 \omega \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}}, \tag{18}$$

$$Y_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(M_\infty \eta + \frac{2k^2\omega}{p} \sqrt{\frac{\lambda_\infty}{k^p}}\right). \tag{19}$$

Sostituendo i valori (19) e (20) nella equazione

$$Y_\sigma \Delta'_\sigma - Y'_\sigma \Delta_\sigma = 2\pi i\,,$$

abbiamo

$$(20)\qquad Y'_\sigma = M_\sigma(\eta' + \sigma\eta) + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\, 2k^2\left(\frac{\omega' + \sigma\omega}{p}\right)\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}}\,,$$

$$(21)\qquad Y'_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(M_\infty p\eta' + 2k^2\omega'\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}}\right).$$

La prima equazione (7), ponendo

$$(22)\qquad u = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(z\,,\,k)\,,$$

prende la forma

$$\sqrt{\lambda_\sigma}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}\,,\,\lambda_\sigma\right) = u\,\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\frac{u^2 - k\,\mathrm{sn}^2\,t\varpi_\sigma}{1 - ku^2\,\mathrm{sn}^2\,t\varpi_\sigma}\,,$$

$$(23)\qquad \sqrt{\lambda_\sigma}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}\,,\,\lambda_\sigma\right) = u\,\frac{u^{p-1} + B'_\sigma u^{p-3} + B''_\sigma u^{p-5} + \cdots + B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}}{1 + B'_\sigma u^2 + B''_\sigma u^4 + \cdots + B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} u^{p-1}}\,,$$

dove

$$(24)\qquad B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} = \frac{1}{M_\sigma}\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k}}\,.$$

Ora, dalla equazione (21) del n. 18, Parte I, abbiamo

$$\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}\,,\,\lambda_\sigma\right) = \theta^p_{1,0}(z)\left(1 + B'_\sigma u^2 + B''_\sigma u^4 + \cdots + B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} u^{p-1}\right),$$

la quale equazione, osservando la seconda formula (16) del n. 10, Parte I, e le relazioni

$$(25)\qquad M_\sigma = \frac{\omega}{\Delta_\sigma}\,,\quad M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,\frac{\omega}{p\Delta_\infty}\,,$$

e ponendo

$$(26)\qquad U_\sigma = \sqrt{\frac{\lambda'_\sigma}{k' M_\sigma}}\left(1 + B'_\sigma u^2 + \cdots + B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} u^{p-1}\right) = \sum_{0}^{\frac{p-1}{2}}{}_r\, A_\sigma^{(r)}\, u^{2r},$$

darà

$$(27)\qquad \Theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}\,,\,\lambda_\sigma\right) = \left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{p-1}{2}}\Theta^p_{1,0}(z\,,\,k)\,U_\sigma\,,$$

$$(28)\qquad \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\;\Theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\infty}\,,\,\lambda_\infty\right) = \left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{p-1}{2}}\Theta^p_{1,0}(z\,,\,k)\,U_\infty\,,$$

$$(29) \qquad A_\sigma = \sqrt{\frac{\lambda'_\sigma}{k'M_\sigma}}, \qquad A_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\lambda_\sigma \lambda'_\sigma}{kk'M_\sigma^3}}.$$

Dalla equazione (3) del n. 14, Parte I, ponendo mente alle relazioni (26) e all' equazioni del n. 19, Parte I,

$$q_\sigma = \alpha q^{\frac{1}{p}}, \qquad q_\infty = q^p$$

abbiamo per tutti i valori di σ

$$\frac{\partial^2 \Theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}{\partial z^2} + 4pq\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial \Theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}{\partial q} = 0.$$

Sostituendo il valore (27) o (28) secondo che σ è finito o infinito, effettuando le derivazioni e le riduzioni come nel n. 7 e ponendo

$$(30) \qquad \alpha = k + \frac{1}{k},$$

si ottiene

$$(31) \qquad (1 - \alpha u^2 + u^4)\frac{\partial^2 U_\sigma}{\partial u^2} + (p-1)(\alpha u - 2u^3)\frac{\partial U_\sigma}{\partial u} + p(p-1)u^2 U_\sigma = 2p(\alpha^2 - 4)\frac{\partial U_\sigma}{\partial \alpha}.$$

Sostituendo nella equazione (31) il valore (26) di U_σ, si ricava

$$(32) \left\{ \begin{aligned}
&1.2\,A'_\sigma = 2p(\alpha^2 - 4)\frac{dA_\sigma}{d\alpha},\\
&3.4\,A''_\sigma + 2(p-2)\alpha A'_\sigma + p(p-1)A_\sigma = 2p(\alpha^4 - 4)\frac{dA'_\sigma}{d\alpha},\\
&5.6\,A'''_\sigma + 4(p-4)\alpha A''_\sigma + (p-2)(p-3)A'_\sigma = 2p(\alpha^2-4)\frac{dA''_\sigma}{d\alpha},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&2r(2r-1)A_\sigma^{(r)} + (2r-2)(p-2r+2)\alpha A_\sigma^{(r-1)} + (p-2r+4)(p-2r+3)A_\sigma^{(r-2)}\\
&\qquad = 2p(\alpha^2-4)\frac{dA_\sigma^{(r-1)}}{d\alpha},\\
&(p-1)\alpha A_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} + 2.3A_\sigma^{\left(\frac{p-3}{2}\right)} = 2p(\alpha^2-4)\frac{dA_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}}{d\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

Dalle formule (11) del n. 13, Parte I, ponendo mente alla formula (3) del n. 14 e all'equazioni (16) del n. 10, Parte I, ed osservando che $q^{p_\sigma} = q$, si ricava

$$\frac{d \log \sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}}{dq} = -\frac{\eta\omega}{4q\pi^2}, \quad \frac{d \log \sqrt{\frac{\pi}{\lambda'_\sigma A_\sigma}}}{dq} = -\frac{Y_\sigma A_\sigma}{4pq\pi^2},$$

$$\frac{d \log \sqrt{\frac{\pi}{k\omega}}}{dq} = -\frac{(\eta + \omega)\omega}{4q\pi^2}, \quad \frac{d \log \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_\sigma A_\sigma}}}{dq} = -\frac{(Y_\sigma + A_\sigma)A_\sigma}{4pq\pi^2},$$

$$\frac{d \log \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}}{dq} = -\frac{(\eta + k^2\omega)\omega}{4q\pi^2}, \quad \frac{d \log \sqrt{\frac{\pi}{A_\sigma}}}{dq} = -\frac{(Y_\sigma + \lambda^2_\sigma A_\sigma)A_\sigma}{4pq\pi^2},$$

onde, sottraendo queste equazioni una dall'altra, e sostituendo il valore di $Y_\sigma A_\sigma$ tratto dalla formula (19), abbiamo

$$\frac{d \log \sqrt{\frac{\lambda'_\sigma}{k' M_\sigma}}}{dq} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{k^2\omega^2}{2pq\pi^2} \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p M^2_\sigma}},$$

$$\frac{d \log \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k M_\sigma}}}{dq} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{k^2\omega^2}{2pq\pi^2} \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p M^2_\sigma}} + \frac{A^2_\sigma - p\omega^2}{4pq\pi^2},$$

$$\frac{d \log \sqrt{\frac{1}{M_\sigma}}}{dq} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{k^2\omega^2}{2pq\pi^2} \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p M^2_\sigma}} + \frac{\lambda^2_\sigma A^2_\sigma - pk^2\omega^2}{4pq\pi^2},$$

ed, osservando che si ha

$$\frac{d}{dq} = \frac{d}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dk}\frac{dk}{dq} = -\frac{k'^4\omega^2}{2kq\pi^2}\frac{d}{d\alpha} = -\frac{(\alpha^2 - 4)k\omega^2}{2q\pi^2}\frac{d}{d\alpha},$$

si ottiene

$$(33) \left\{ \begin{aligned} & p(\alpha^2 - 4)\frac{d\sqrt{\frac{\lambda'_\sigma}{k' M_\sigma}}}{d\alpha} = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda_\sigma \lambda'_\sigma}{k^{p-2} k' M^3_\sigma}}, \\ & p(\alpha^2 - 4)\frac{d\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k M_\sigma}}}{d\alpha} = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{\lambda_\sigma}{k^{\frac{p-1}{2}} M_\sigma \sqrt{M_\sigma}} + \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{M^2_\sigma}\right)\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^3 M_\sigma}}, \\ & p(\alpha^2 - 4)\frac{d\sqrt{\frac{1}{M_\sigma}}}{d\alpha} = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^{p-2} M^3_\sigma}} + \frac{k}{2}\left(p - \frac{\lambda^2_\sigma}{k^2 M^2_\sigma}\right)\sqrt{\frac{1}{M_\sigma}}. \end{aligned} \right.$$

Modificando convenientemente la dimostrazione si trova che queste formule valgono anche per $\sigma = \infty$.

Ora, essendo

$$A_\sigma = \sqrt{\frac{\lambda'}{k' M_\sigma}}, \quad A_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\lambda_\sigma \lambda'_\sigma}{k k' M_\sigma^3}},$$

l'equazioni (33) ci dànno il modo di esprimere le derivate successive di A_σ e di $A_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ prese rapporto ad α per mezzo di $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{\lambda_\sigma}$, $\sqrt{\lambda'_\sigma}$ ed M_σ. Quindi dall'equazioni (32) potremo trarre i valori di A'_σ, A''_σ, ... espressi razionalmente per queste quantità, ed una equazione algebrica tra le medesime, essendo l'equazioni una di più dell'incognite.

11.

L'equazione (23) del numero precedente, ponendo

$$x = \mathrm{sn}(z, k),$$

ed osservando l'equazioni (22) e (24), diviene

$$(1) \quad x^p \sqrt{k^p} - \frac{\lambda_\sigma \sqrt{k^p}}{k M_\sigma} \mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) x^{p-1} + \cdots - \sqrt{\lambda_\sigma}\, \mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = 0.$$

Poichè questa equazione equivale alla prima delle equazioni (15) del numero precedente ed in esse è lecito mutare t in $2t$, le sue radici saranno

$$(2) \qquad \mathrm{sn}\, z, \quad \mathrm{sn}(z + 2\varpi_\sigma), \quad \mathrm{sn}(z + 4\varpi_\sigma) \ldots \mathrm{sn}[z + 2(p-1)\varpi_\sigma],$$

ed avremo

$$\sum_{0}^{p-1}{}_r\, \mathrm{sn}(z + 2r\varpi_\sigma) = \frac{\lambda_\sigma}{k M_\sigma} \mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right).$$

Prendendo i $p+1$ valori di σ, sommando e rammentando il valore di ϖ_σ, abbiamo

$$\sum_\sigma \sum_{0}^{p-1}{}_r\, \mathrm{sn}(z + 2r\varpi_\sigma) = p\, \mathrm{sn}\, z + \sum_{0}^{p-1} \sum_{0}^{p-1} \mathrm{sn}\left(z + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{p}\right)$$

$$= \sum_\sigma \frac{\lambda_\sigma}{k M_\sigma} \mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right),$$

ed, a cagione della formula (3) del n. 8,

$$(3) \qquad \mathrm{sn}\, pz = -\,\mathrm{sn}\, z + \sum_\sigma \frac{\lambda_\sigma}{p k M_\sigma} \mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right).$$

Per risolvere algebricamente l' equazione (1), basterà determinare la funzione di Lagrange delle radici (2)

$$\text{(4)} \qquad L_{\sigma,n}(z) = \sum_{0}^{p-1} {}_m e^{-\frac{8nm\pi i}{p}} \operatorname{sn}(z + 2m\varpi_\sigma).$$

Esprimendo le funzioni ellittiche per le funzioni jacobiane, ed osservando la formula (15) del n. 18, Parte I, abbiamo

$$\text{(5)} \qquad L_{\sigma,n}(z) = \frac{N_{\sigma,n}(z)}{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}.$$

dove $N_{\sigma,n}(z)$ è una funzione intera di z.

Ora tra i periodi corrispondenti al modulo λ_σ e quelli corrispondenti al modulo k esistono le relazioni

$$\frac{\omega'}{\omega} = p\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma} - 2\sigma, \quad M_\sigma = \frac{\omega}{\Lambda_\sigma}, \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\Lambda_\infty}{p\Lambda_\infty}, \quad M_\infty = \frac{\omega}{p\Lambda_\infty}.$$

$$M_\sigma \Lambda'_\sigma = \varpi_\sigma, \qquad M_\infty \Lambda'_\infty = \omega',$$

$$M_\sigma \Lambda_\sigma = \omega, \qquad M_\infty \Lambda_\infty = \varpi_\infty;$$

ossia per valori qualunque di σ finiti o infiniti

$$\text{(6)} \qquad M_\sigma \Lambda'_\sigma = \mu\varpi_\sigma + \nu\omega', \quad M_\sigma \Lambda_\sigma = \nu\varpi_\sigma + \mu\omega,$$

dove μ e ν sono eguali uno a zero e l'altro alla unità, e $\mu = 0$ soltanto per $\sigma = \infty$. Potremo anche scrivere in generale

$$\text{(7)} \qquad \varpi_\sigma = \frac{r\omega + s\omega'}{p}$$

dove $r = 2\sigma$, $s = 1$ quando σ è finito, ed $r = 1$, $s = 0$, quando $\sigma = \infty$.

Pertanto dalla equazione (4) avremo

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} L_{\sigma,n}(z + M_\sigma \Lambda_\sigma) = -e^{\frac{4\nu n\pi i}{p}} L_{\sigma,n}(z), \\ L_{\sigma,n}(z + M_\sigma \Lambda'_\sigma) = e^{\frac{4\mu n\pi i}{p}} L_{\sigma,n}(z); \end{cases}$$

e dalle formule (4) e (5) del n. 6, Parte I, si rileva

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \theta_{1,0}\left(\frac{z + M_\sigma \Lambda_\sigma}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right), \\ \theta_{1,0}\left(\frac{z + M_\sigma \Lambda'_\sigma}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = -e^{-\frac{\pi i}{\Lambda_\sigma}\left(\frac{2z}{M_\sigma} + \Lambda'_\sigma\right)} \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right). \end{cases}$$

Mediante le formule (8) e (9), dalla equazione (5) si ottiene

$$
(10)\quad \begin{cases} N_{\sigma,n}(z + M_\sigma \varLambda_\sigma) = - e^{\frac{4n\nu\pi i}{p}} N_{\sigma,n}(z), \\ N_{\sigma,n}(z + M_\sigma \varLambda'_\sigma) = - e^{-\frac{\pi i}{\varLambda_\sigma}\left[2\left(\frac{z}{M_\sigma} - \frac{2n\mu\varLambda_\sigma}{p}\right) + \varLambda'_\sigma\right]} N_{\sigma,n}(z). \end{cases}
$$

Poniamo

$$
(11)\qquad \varpi'_\sigma = \frac{\nu\varLambda'_\sigma - \mu\varLambda_\sigma}{p}, \quad x_{\sigma,n} = \frac{z}{M_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma,
$$

$$
(12)\qquad N_{\sigma,n}(z) = e^{\frac{4\nu n\pi i z}{pM_\sigma\varLambda_\sigma}} \psi(x_{\sigma,n})
$$

e dalle equazioni (10) avremo

$$
\psi(x_{\sigma,n} + \varLambda_\sigma) = - \psi(x_{\sigma,n}),
$$

$$
\psi(x_{\sigma,n} + \varLambda'_\sigma) = - e^{-\frac{\pi i}{\varLambda_\sigma}\left(2x_{\sigma,n} + \varLambda'_\sigma\right)} \psi(x_{\sigma,n});
$$

e quindi

$$
\psi(x_{\sigma,n}) = C_{\sigma,n}\, \theta_{1,1}(x_{\sigma,n}, \lambda_\sigma) = C_{\sigma,n}\, \theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_\sigma} + 2n\,\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right).
$$

Sostituendo questo valore nella equazione (12), e il valore ottenuto per $N_{\sigma,n}(z)$ nella equazione (5), si ha

$$
(13)\qquad L_{\sigma,n}(z) = C_{\sigma,n}\, e^{\frac{4n\nu\pi i z}{pM_\sigma\varLambda_\sigma}} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_\sigma} + 2n\,\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}.
$$

Ora, per determinare $C_{\sigma,n}$, osserviamo che dall'equazione (4) si ottiene

$$
L_{\sigma,n}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} z} + \sum_1^{p-1}{}_m \frac{e^{-\frac{8mn\pi i}{p}}}{k \operatorname{sn}(z + 2m\varpi_\sigma)},
$$

e quando $s = 1$, ed $r = 2\sigma$, essendo p un numero dispari, $\frac{p-1}{4}$ o $\frac{3p-1}{4}$ sarà intero, e quindi nel secondo membro della equazione (4) vi sarà un termine in cui $m = \frac{p-1}{4}$ oppure $m = \frac{3p-1}{4}$, e poichè si ha

$$
\operatorname{sn}\left[z + 2\left(\frac{p-1}{4}\right)\varpi_\sigma + \frac{\varpi_\sigma}{2}\right] = \operatorname{sn}\left(z + \frac{r\omega + s\omega'}{2}\right) = \frac{(-1)^\sigma}{k \operatorname{sn} z},
$$

$$
\operatorname{sn}\left[z + 2\left(\frac{3p-1}{4}\right)\varpi_\sigma + \frac{\varpi_\sigma}{2}\right] = \operatorname{sn}\left(z + \frac{r\omega + s\omega'}{2}\right) = \frac{(-1)^\sigma}{k \operatorname{sn} z},
$$

sarà

$$
L_{\sigma,n}\left(z + \frac{\varpi_\sigma}{2}\right) = \pm \frac{e^{\frac{2n\pi i}{p}}}{k \operatorname{sn} z} + T(z),
$$

essendo $T(z)$ una funzione che non diviene infinita per $z=0$: e poichè delle due quantità μ e ν sempre una è nulla e una eguale ad uno, ed r è pari, ed $s=1$ quando ν è nulla, avremo in generale

$$(14)\quad L_{\sigma,n}(z+\tfrac{1}{2}M_\sigma \Lambda'_\sigma)=L_{\sigma,n}\left(z+\frac{\mu\varpi_\sigma+\nu\omega'}{2}\right)=(-1)^\sigma\frac{e^{\frac{2\mu n\pi i}{p}}}{k\,\mathrm{sn}\,z}+T(z)\,.$$

Ma dalla formula (10) del n. 10, Parte I, si ricava

$$(15)\quad\begin{cases}\theta_{1,0}\left(\dfrac{z+\frac{1}{2}M_\sigma\Lambda'_\sigma}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)=i\sqrt{\lambda_\sigma}\,e^{-\frac{\pi i}{\Lambda_\sigma}\left(\frac{z}{M_\sigma}+\frac{\Lambda'_\sigma}{4}\right)}\theta_{1,1}\left(\dfrac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right),\\[2ex]\theta_{1,1}\left(\dfrac{z+\frac{1}{2}M_\sigma\Lambda'_\sigma}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right)=\dfrac{i}{\sqrt{\lambda_\sigma}}e^{-\frac{\pi i}{\Lambda_\sigma}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma+\frac{\Lambda'_\sigma}{4}\right)}\theta_{1,0}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right),\end{cases}$$

e quindi ponendo nella equazione (13) $z+\frac{1}{2}M_\sigma\Lambda'_\sigma$ invece di z, mediante le formule (14) e (15) si ottiene

$$(-1)^\sigma\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,z}+T_1(z)=C_{\sigma,n}\,e^{\frac{4n\nu\pi i z}{pM_\sigma\Lambda_\sigma}}\frac{\theta_{1,0}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right)}{\lambda_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\dfrac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)}\,.$$

Moltiplico per $\frac{z}{M_\sigma}$, e ponendo $z=0$, ottengo

$$C_{\sigma,n}=(-1)^\sigma\frac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma\,\theta_{1,0}(2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma)}$$

e quindi

$$(16)\quad L_{\sigma,n}(z)=(-1)^\sigma\frac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma}e^{\frac{4n\nu i z}{pM_\sigma\Lambda_\sigma}}\frac{\theta_{1,0}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\dfrac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)\theta_{1,0}(2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma)}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right).$$

Ora abbiamo sempre

$$(17)\quad \theta_{1,0}(pz,k)=\theta^p_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left[1-\lambda^2_\sigma\,\mathrm{sn}^2\,t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)\right].$$

Infatti quando $\sigma=\infty$, essendo $\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\Lambda'_\infty}{p\Lambda_\infty}$, se facciamo sopra $\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\infty},\lambda_\sigma\right)$ la trasformazione corrispondente alla sostituzione

$$\frac{\Lambda'_\infty}{\Lambda_\infty}=p\,\frac{\Omega'}{\Omega}\,,$$

avremo $\frac{\Omega'}{\Omega}=\frac{\omega'}{\omega}$, il nuovo moltiplicatore sarà $M_0=\frac{\Lambda_\infty}{\omega}$, e quindi $M_0M_\infty=\frac{1}{p}$,

e il modulo della trasformata sarà k, e dalla formula (21) del n. 18, Parte I, avremo la equazione (17).

Quando σ è un numero finito, essendo $\frac{\omega'}{\omega} = p\frac{\varDelta'_\sigma}{\varDelta_\sigma} - 2\sigma$, se facciamo in $\theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right)$ la trasformazione corrispondente alla sostituzione

$$\frac{\varDelta'_\sigma}{\varDelta_\sigma} = \frac{\Omega'}{p\Omega},$$

e poi la trasformazione lineare corrispondente alla sostituzione

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\omega'_1}{\omega} + 2\sigma,$$

che è quella del 4° caso del n. 16, e non muta nè il modulo nè l'argomento, avremo

$$\frac{\omega'_1}{\omega} = p\frac{\varDelta'_\sigma}{\varDelta_\sigma} - 2\sigma = \frac{\omega'}{\omega},$$

e quindi avremo anche in questo caso la formula (17).

L'equazioni (6) e (11) dànno

$$p\mathrm{M}_\sigma \varpi'_\sigma = \nu\mathrm{M}_\sigma\varDelta'_\sigma - \mu\mathrm{M}_\sigma\varDelta_\sigma = \nu\omega' - \mu\omega,$$

e quindi la formula (17) dà

$$(18) \qquad \theta_{1,0}(pz + 2np\mathrm{M}_\sigma\varpi'_\sigma, k) = e^{-\frac{2n\nu\pi i}{\omega}(2pz+2n\nu\omega')}\theta_{1,0}(pz, k)$$

$$= \theta^p_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left[1 - \lambda^2_\sigma \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)\right],$$

e, ponendo $z = 0$,

$$(19) \quad 1 = e^{\frac{4n^2\nu\pi i\omega'}{\omega}}\theta^p_{1,0}(2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(1 - \lambda^2_\sigma \operatorname{sen}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2(2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma)\right).$$

Dividendo la equazione (18) per il prodotto delle equazioni (17) e (19) e, ponendo

$$\mathrm{A}_{\sigma,n} = \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\left[1 - \lambda^2_\sigma \operatorname{sn}^2(t\varpi_\sigma, k)\operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right)\right]\left[1 - \lambda^2_\sigma \operatorname{sn}^2(t\varpi_\sigma, k)\operatorname{sn}^2(2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma)\right]}{1 - \lambda^2_\sigma \operatorname{sn}^2(t\varpi_\sigma, k)\operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)}$$

avremo

$$e^{\frac{4n\nu\pi i z}{p M_\sigma \Lambda_\sigma}} \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)\theta_{1,0}(2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma)} = \sqrt[p]{A_{\sigma,n}},$$

e quindi

$$\text{(20)} \qquad L_{\sigma,n} = (-1)^\sigma \frac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma} \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)\sqrt[p]{A_{\sigma,n}},$$

$$\text{(21)} \quad (-1)^\sigma \frac{pkM_\sigma}{\lambda_\sigma} \operatorname{sn}(z + 2m\varpi_\sigma, k) = \sum_0^{p-1}{}_n\, e^{\frac{8mn\pi i}{p}} \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)\sqrt[p]{A_{\sigma,n}}.$$

12.

Passiamo ora alle trasformazioni di ordine n, quando n è un numero intero dispari e reale qualunque, cioè determiniamo λ ed M in modo che $\operatorname{sn}\left(\frac{z}{M}, \lambda\right)$ sia una funzione razionale di $\operatorname{sn}(z, k)$, nella quale il numeratore, e il denominatore siano di grado non $> n$, ed uno di essi eguale ad n.

Abbiamo già dimostrato che, se denotiamo con Λ e Λ' i valori dei periodi corrispondenti al modulo λ, dovrà aversi

$$\text{(1)} \qquad \frac{2\omega}{M} = 2\alpha\Lambda + \beta\Lambda', \quad \frac{\omega'}{M} = 2\gamma\Lambda + \delta\Lambda';$$

$$\text{(2)} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = n,$$

e non esistono fattori comuni a tutti i quattro numeri interi α, β, γ e δ.

Sia n' il massimo comun divisore di α e β; n' sarà un divisore di n, avremo

$$\text{(3)} \qquad n = n'n'', \quad \alpha = \alpha' n', \quad \beta = \beta' n',$$

$$\text{(4)} \qquad \alpha'\delta - \beta'\gamma = n'',$$

e si potranno determinare due numeri interi e reali c e d che sodisfino alla equazione

$$\text{(5)} \qquad \alpha' d - c\beta' = 1.$$

Dalle equazioni (4) e (5) si ottiene

$$\begin{matrix} \alpha'\delta \equiv n'' \\ \alpha' d n'' \equiv n'' \end{matrix} (\text{mod. } \beta'), \quad \begin{matrix} \beta'\gamma \equiv -n'' \\ \beta' c n'' \equiv -n'' \end{matrix} (\text{mod. } \alpha'),$$

onde, essendo α' e β' primi tra loro,

$$\delta - dn'' \equiv 0 \pmod{\beta'} \ , \qquad \gamma - cn'' \equiv 0 \pmod{\alpha'} \ ,$$

ed, osservando l'equazioni (4) e (5), abbiamo

$$\delta = dn'' + l\beta' \ , \qquad \gamma = cn'' + l\alpha' \ ;$$

ed il numero l non ha fattori comuni con n' ed n''; perchè questi sarebbero evidentemente comuni ai quattro numeri α, β, γ e δ.

Dividendo l per n'' si ottiene

$$l = qn'' + t \ ,$$

e quindi ponendo

$$\delta' = d + q\beta' \ , \qquad \gamma' = c + q\alpha' \ ,$$

si ottiene

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1 \ ; \tag{6}$$

$$\delta = \delta' n'' + t\beta' \ , \qquad \gamma = \gamma' n'' + t\alpha' \ , \tag{7}$$

e se ne deduce che la sostituzione (1) equivale alle due successive

$$\frac{2\omega_1}{M_1} = 2\alpha' A + \beta' A' \ , \qquad \frac{\omega'_1}{M_1} = 2\gamma' A + \delta' A' \ ; \tag{8}$$

$$\frac{\omega}{M_2} = n'\omega_1 \ , \qquad \frac{\omega'}{M_2} = 2t\omega_1 + n''\omega'_1 \ ; \tag{9}$$

$$M_1 M_2 = M \tag{10}$$

la prima delle quali è di 1° ordine, come risulta dall'equazione (6), e la seconda è di ordine n; t è preso relativamente al modulo n'', e non esistono fattori comuni ai tre numeri n', n'' e t.

Potremo supporre sempre t primo con n'; difatti nelle sostituzioni nelle quali t ha fattori comuni con n', i quali non dividono n'', si prenderà $t' = t + \theta n''$ e si disporrà del numero intero θ in guisa che t' riesca primo con n'.

Se n è una potenza di un numero primo dispari p^μ, le trasformazioni differenti di ordine p^μ saranno $6p^{\mu-1}(p+1)$.

Infatti le trasformazioni differenti di ordine n sono in numero eguale al prodotto del numero delle trasformazioni di 1° ordine per il numero delle sostituzioni differenti della forma (9). Il primo di questi numeri è eguale a 6 come abbiamo veduto nel n. 9, il secondo è eguale a $p^{\mu-1}(p+1)$. Poichè si hanno p^μ trasformazioni corrispondenti a $n' = 1$, $n'' = p^\mu$, $t < p^\mu$; tante trasformazioni quanti sono i numeri inferiori a $p^{\mu-1}$ e primi con $p^{\mu-1}$, cioè $p^{\mu-1} - p^{\mu-2}$, corrispondenti a $n' = p$, $n'' = p^{\mu-1}$, $t < p^{\mu-1}$ e primo con $p^{\mu-1}$;

se ne hanno $p^{\mu-2}-p^{\mu-3}$ corrispondenti a $n'=p^2$, $n''=p^{\mu-2}$, $t<p^{\mu-2}$ e primo con $p^{\mu-2}, \ldots$; $p-1$ corrispondenti a $n'=p^{\mu-1}$, $n''=p$, $t<p$; 1 corrispondente ad $n'=p^{\mu}$, $n''=1$, e quindi si ha in tutto un numero di trasformazioni differenti dato da

$$p^{\mu}+p^{\mu-1}-p^{\mu-2}+p^{\mu-2}-p^{\mu-3}+\cdots+p^2-p+p-1+1=p^{\mu-1}(p+1).$$

Se $n=p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\cdots p_r^{\mu_r}$ e $p_1, p_2, \ldots p_r$ numeri primi dispari differenti, il numero delle trasformazioni di ordine n sarà

$$6p_1^{\mu_1-1}p_2^{\mu_2-1}\ldots p_r^{\mu_r-1}(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_r+1).$$

Infatti poichè dev' essere $n'n''=n$, avremo

$$n'=p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots p_r^{\nu_r}, \quad n''=p_1^{\mu_1-\nu_1}p_2^{\mu_2-\nu_2}\ldots p_r^{\mu_r-\nu_r},$$

e t sarà primo con n'; pertanto si potranno sempre determinare r numeri interi e reali $t_1, t_2, \ldots t_r$ in modo che sia

$$p_2^{\mu_2-\nu_2}p_3^{\mu_3-\nu_3}\ldots p_r^{\mu_r-\nu_r}t_1+p_1^{\nu_1}p_3^{\mu_3-\nu_3}\ldots p_r^{\mu_r-\nu_r}t_2+p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}p_4^{\mu_4-\nu_4}\ldots p_r^{\mu_r-\nu_r}t_3+\cdots$$
$$+p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots p_{r-1}^{\nu_{r-1}}t_r=t,$$

e t_1 sarà primo con $p_1^{\nu_1}$, t_2 con $p_2^{\nu_2}\ldots$, t_r con $p_r^{\nu_r}$. Quindi la sostituzione (9) equivarrà alle r sostituzioni successive

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\Omega_1}{M'}=p_1^{\nu_1}\omega_1; & \dfrac{\Omega'_1}{M'}=p_1^{\mu_1-\nu_1}\omega'_1+2t_1\omega_1,\\
\dfrac{\Omega_2}{M''}=p_2^{\nu_2}\Omega_1; & \dfrac{\Omega'_2}{M''}=p_2^{\mu_2-\nu_2}\Omega'_1+2t_2\Omega_1,\\
\dfrac{\Omega_3}{M'''}=p_3^{\nu_3}\Omega_2; & \dfrac{\Omega'_3}{M'''}=p_3^{\mu_3-\nu_3}\Omega'_2+2t_3\Omega_2,\\
\cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots\\
\dfrac{\omega}{M^{(r)}}=p_r^{\nu_r}\Omega_{r-1}, & \dfrac{\omega'}{M^{(r)}}=p_r^{\mu_r-\nu_r}\Omega'_{r-1}+2t_r\Omega_{r-1},\\
\multicolumn{2}{c}{M'M''\ldots M^{(r)}=M_2.}
\end{array}\right.$$

Dunque il numero delle trasformazioni differenti corrispondenti alla sostituzione (9), sarà eguale al prodotto dei numeri delle trasformazioni differenti che corrispondono a ciascuna delle sostituzioni (11), ossia sarà

$$N=p_1^{\mu_1-1}(p_1+1)p_2^{\mu_2-1}(p_2+1)\ldots p_r^{\mu_r-1}(p_r+1),$$

che moltiplicato per il numero 6 delle trasformazioni lineari (8) dà precisamente il numero che volevamo dimostrare.

Per determinare tutte le trasformazioni differenti di ordine dispari qualunque n, basterà considerare quelle corrispondenti alle sostituzioni della forma

$$\omega = g' \mathrm{M}\Delta , \qquad \omega' = g'' \mathrm{M}\Delta' - 2t\mathrm{M}\Delta , \tag{12}$$

dove

$$g' g'' = n ,$$

e i tre numeri g', g'' e t non hanno fattori comuni.

Poichè abbiamo

$$\mathrm{M}\Delta = \frac{\omega}{g'} , \quad \mathrm{M}\Delta' = \frac{g'\omega' + 2t\omega}{n} ,$$

le radici della funzione $\mathrm{sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$ saranno date tutte dall'espressione

$$\varrho = m\mathrm{M}\Delta + m'\mathrm{M}\Delta' = \frac{m'g'\omega' + (2tm' + mg'')\,\omega}{n}$$

nella quale m ed m' sono numeri interi e reali qualunque.

Poichè t è primo con g' si potranno determinare due numeri interi e reali s ed l che soddisfacciano all'equazione

$$m = sg' + 2tl ;$$

onde avremo

$$\varrho = s\omega - l\omega' + (m' + lg'') \frac{g'\omega' + 2t\omega}{n} ,$$

ossia, ponendo

$$\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n} = \varpi_{g't} , \quad m' + lg'' = r ,$$

sarà

$$\varrho = s\omega - l\omega' + r\varpi_{g't} , \tag{13}$$

dove per r si dovranno prendere tutti i residui differenti rispetto al modulo n, e poichè n è dispari si potranno prendere per residui tutti i numeri della forma $2sr$ nei quali r è positivo e minore di n ed s è qualunque.

Reciprocamente, tutte le quantità della forma (13) sono della forma

$$m\mathrm{M}\Delta + m'\mathrm{M}\Delta' ,$$

e quindi radici di $\mathrm{sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$.

Ora le quantità ϱ sono tutte radici semplici della funzione

$$\prod_{0}^{n-1}{}_m \operatorname{sn}(z + 2m\varpi_{g't}, k)\,; \tag{14}$$

poichè per ogni valore di r esiste un sol valore positivo di $m < n$ per cui si ha

$$2m + r \equiv 0 \;(\text{mod. } n).$$

In modo analogo si dimostra che la funzione (14) e $\operatorname{sn}\left(\frac{z}{M}, \lambda\right)$ hanno i medesimi infiniti. Quindi avremo

$$\operatorname{sn}\left(\frac{z}{M}, \lambda\right) = \varphi(z) \prod_{0}^{n-1}{}_m \operatorname{sn}(z + 2m\varpi_{g't}, k)\,,$$

dove φ è una funzione intera di z.

Aumentando z successivamente di 2ω e di ω' si ottiene facilmente

$$\varphi(z + 2\omega) = \varphi(z)\,, \qquad \varphi(z + \omega') = \varphi(z)\,,$$

e quindi $\varphi(z)$ sara eguale a una costante C.

Dividendo per $\frac{z}{M}$ e ponendo $z = 0$, si ottiene il valore della costante C, ed abbiamo

$$M \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M}, \lambda\right) = \frac{\prod_{0}^{n-1}{}_m \operatorname{sn}(z + 2m\varpi_{g't}, k)}{\prod_{1}^{n-1}{}_m \operatorname{sn}(2m\varpi_{g't}, k)}\,. \tag{15}$$

Analogamente si dimostrano le altre due formule

$$\operatorname{cn}\left(\frac{z}{M}, \lambda\right) = \prod_{0}^{n-1}{}_m \frac{\operatorname{cn}(z + 2m\varpi_{g't}, k)}{\operatorname{cn}(2m\varpi_{g't}, k)}\,, \tag{16}$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{z}{M}, \lambda\right) = \prod_{0}^{n-1}{}_m \frac{\operatorname{dn}(z + 2m\varpi_{g't}, k)}{\operatorname{dn}(2m\varpi_{g't}, k)}\,. \tag{17}$$

Ponendo $z = \frac{\omega}{2} = \frac{g'M\Delta}{2}$, abbiamo

$$M = (-1)^{\frac{g'-1}{2}} \prod_{1}^{n-1}{}_m \frac{\operatorname{snc}(2m\varpi_{g't}, k)}{\operatorname{sn}(2m\varpi_{g't}, k)} = (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{g'-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_m \frac{\operatorname{snc}^2(2m\varpi_{g't}, k)}{\operatorname{sn}^2(2m\varpi_{g't}, k)}\,,$$

e in generale, poichè il segno di M può prendersi comunque nelle formule precedenti, potremo porre

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_m \frac{\operatorname{snc}^2(2m\varpi_{g't}, k)}{\operatorname{sn}^2(2m\varpi_{g't}, k)}\,.$$

Ponendo

$$z=\frac{\omega+\omega'}{2}=\frac{\mathrm{M}\varDelta}{2}(g'-2t)+\frac{\mathrm{M}g''\varDelta'}{2},$$

avremo

$$\sqrt{\lambda}=k^{\frac{n}{2}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_m \operatorname{snc}^2(2m\varpi_{g't}, k)$$

e ponendo nella equazione (17) $z=\frac{\omega}{2}=\frac{g'\mathrm{M}\varDelta}{2}$

$$\sqrt{\lambda'}=k'^{\frac{n}{2}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_m \frac{1}{\operatorname{dn}^2(2m\varpi_{g't}, k)}.$$

13.

Se poniamo

$$(1)\qquad \frac{\omega'}{\omega}=\varpi,\quad e^{i\pi\varpi}=q,$$

$$(2)\qquad \varphi(\varpi)=\sqrt{2}\sqrt[8]{e^{i\pi\varpi}}\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{1+e^{2m\pi i\varpi}}{1+e^{(2m-1)\pi i\varpi}}=\sqrt{2}\sqrt[8]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}},$$

dalla formula (13) del n. 19, Parte I, abbiamo

$$(3)\qquad \sqrt[4]{k}=\varphi(\varpi);$$

e, poichè dall'equazioni (12) del numero precedente si ricava

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta}=\frac{g'\varpi+2t}{g''},$$

accennando con $\lambda_{g't}$ il modulo corrispondente sarà

$$\sqrt[4]{\lambda_{g't}}=\pm\sqrt{2}\sqrt[8]{q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t}}\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2m}}{1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2m-1}};$$

dove α è una radice primitiva della equazione

$$x^{g''}+1=0.$$

Determiniamo quale dei due segni bisogna prendere, se vogliamo avere quello dei valori di $\sqrt[4]{\lambda_{g't}}$ che è dato anche dalla formula

$$(4)\qquad \sqrt[4]{\lambda_{g't}}=\sqrt[4]{k^n}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_m \operatorname{snc} m\frac{g'\omega'+2t\omega}{n}.$$

I numeri m si possono porre tutti sotto la forma

$$m = lg'' \pm r,$$

dove

$$l \leq \frac{g'-1}{2}, \quad r \leq \frac{g''-1}{2};$$

onde la equazione (4) potrà scriversi

$$(5) \qquad \sqrt[4]{\lambda_{g't}} = \sqrt[4]{k^n} \prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \operatorname{snc} \frac{2lt\omega}{g'} \prod_{1}^{\frac{g''-1}{2}}{}_r \left\{ \operatorname{snc} r\left(\frac{\omega'}{g''} + \frac{2t\omega}{n}\right) \right.$$

$$\left. \times \prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \operatorname{snc}\left[r\left(\frac{\omega'}{g''} + \frac{2t\omega}{n}\right) + \frac{2lt\omega}{g'}\right] \operatorname{snc}\left[r\left(\frac{\omega'}{g''} + \frac{2t\omega}{n}\right) - \frac{2lt\omega}{g'}\right] \right\}.$$

Sostituendo alle funzioni ellittiche le loro espressioni in prodotti infiniti, abbiamo

$$\prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \operatorname{snc} \frac{2lt\omega}{g'} = 2^{\frac{g'-1}{2}} \frac{\sqrt[8]{q^{g'-1}}}{\sqrt[4]{k^{g'-1}}} \prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \cos \frac{2lt\pi}{g'} \prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{(1+q^{2m} e^{\frac{4lt\pi i}{g'}})(1+q^{2m} e^{-\frac{4lt\pi i}{g'}})}{(1+q^{2m-1} e^{\frac{4lt\pi i}{g'}})(1+q^{2m-1} e^{-\frac{4lt\pi i}{g'}})}.$$

Moltiplichiamo per la equazione (3) che può scriversi

$$1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q}}{\sqrt[4]{k}} \prod_{1}^{\infty} \frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}},$$

ed osservando le note relazioni

$$\prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \cos \frac{2lt\pi}{g'} = \frac{(-1)^{\frac{g'^2-1}{8}}}{2^{\frac{g'-1}{2}}},$$

$$(1+x) \prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l (1+xe^{\frac{4lt\pi i}{g'}})(1+xe^{-\frac{4lt\pi i}{g'}}) = 1+x^{g'},$$

abbiamo

$$(6) \qquad \prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \operatorname{snc} \frac{2lt\omega}{g'} = (-1)^{\frac{g'^2-1}{8}} \sqrt{2} \frac{\sqrt[8]{q^{g'}}}{\sqrt[4]{k^{g'}}} \prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1+(q^{\frac{g'}{g''}} \alpha^{2t})^{2mg''}}{1+(q^{\frac{g'}{g''}} \alpha^{2t})^{(2m-1)g''}}.$$

Con riduzioni analoghe si ottiene

$$(7)\quad \prod_{r=1}^{\frac{g''-1}{2}} \operatorname{snc} r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right) \prod_{l=1}^{\frac{g'-1}{2}} \operatorname{snc}\left[r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right)+\frac{2lt\omega}{g'}\right] \operatorname{snc}\left[r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right)-\frac{2lt\omega}{g'}\right]$$

$$=\frac{\sqrt[8]{q^{\frac{g'}{g''}-g'}\alpha^{2t}}}{\sqrt[4]{k^{g'(g''-1)}}} \prod_{r=1}^{\frac{g''-1}{2}} \left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2r}\right] \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2(mg''+r)}\right]\left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2(mg''-r)}\right]}{\left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2(m-1)g''+2r}\right]\left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2(m-1)g''-2r}\right]}.$$

Sostituendo i valori (6) e (7) nella formula (5), abbiamo

$$\sqrt[4]{\lambda_{g't}}=(-1)^{\frac{g'^2-1}{8}}\sqrt{2}\sqrt[8]{q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t}}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2m}}{1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2m-1}},$$

ossia (1)

$$(8)\quad \sqrt[4]{\lambda_{g't}}=\sqrt[4]{k^n}\prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{snc}\frac{m(g'\omega'+2t\omega)}{n}=(-1)^{\frac{g'^2-1}{8}}\varphi\left(\frac{g'\varpi+2t}{g''}\right).$$

Poniamo ora

$$(9)\qquad \sqrt[4]{k}=u,\quad \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{snc}\frac{m(g'\omega'+2t\omega)}{n}=x_{g't},\quad \sqrt[4]{\lambda_{g't}}=v_{g't},$$

onde

$$(10)\qquad v_{g't}=u^n x_{g't}.$$

Abbiamo dimostrato nel numero precedente che se $n=p_1^{\mu_1}.p_2^{\mu_2}\dots p_s^{\mu_s}$, il numero N dei valori differenti di $\sqrt[4]{\lambda_{g't}}$ è dato dalla formula

$$\mathrm{N}=p_1^{\mu_1-1}.p_2^{\mu_2-1}\dots.p_s^{\mu_s-1}(p_1+1)(p_2+1)\dots.(p_s+1);$$

(1) Essendo n numero dispari la congruenza

$$t\equiv 8t_1\quad(\mathrm{mod.}\ n)$$

ammette sempre soluzioni. Sarà quindi lecito porre

$$t=8t_1+sn$$

con s numero intero. Ma

$$\operatorname{snc}\frac{m(g'\omega'+2t\omega)}{n}=\operatorname{snc}\left(\frac{m(g'\omega'+16t_1\omega)}{n}+2ms\omega\right)=\operatorname{snc}\frac{m(g'\omega'+16t_1\omega)}{n};$$

perciò, mutato semplicemente t_1 in t, la (8) può anche essere scritta così:

$$\sqrt[4]{\lambda_{g't}}=\sqrt[4]{k^n}\sum_{1}^{\frac{N-1}{2}}\operatorname{snc}\frac{m(g'\omega'+16t\omega)}{n}=(-1)^{\frac{g'^2-1}{8}}\varphi\left(\frac{g'\varpi+16t}{g''}\right).$$

V. C.

quindi le due equazioni che hanno per radici tutti i valori di $x_{g't}$ e di $v_{g't}$ saranno di grado N. Sia la prima

$$x^N + A_1 x^{N-1} + \cdots + A_N = 0\,, \tag{11}$$

la seconda, a cagione della relazione (10), sarà

$$v^N + A_1 u^n v^{N-1} + A_2 u^{2n} v^{N-2} + \cdots + A_N u^{nN} = 0\,. \tag{12}$$

La equazione (12) che ha per radici tutti i valori differenti di $\sqrt[4]{\lambda_{g't}}$, si dice l'*equazione modulare* dell'ordine n.

Le quantità $A_1 . A_2 \ldots A_N$ sono tutte funzioni razionali di u^8. Infatti dalla prima delle formule (2) del n. 7 si ricava che, considerando $\operatorname{sn} z$ come incognita, la equazione

$$N_1 = 0\,, \tag{13}$$

ha per radici le $n^2 - 1$ quantità della forma $\operatorname{sn}\dfrac{s\omega' + 2r\omega}{n}$, dove r ed s sono minori di n, ed ha i coefficienti funzioni razionali di $k^2 = u^8$. Ora le radici di questa equazione si potranno dividere in due classi, nella prima delle quali si comprendano quelle nelle quali r, s ed n non hanno fattori comuni, e nella seconda quelle nelle quali r, s ed n hanno un fattore comune. Le radici della seconda classe sono anche radici di equazioni di grado inferiore, le quali hanno pure i coefficienti funzioni razionali di u^8, perchè essendo μ il massimo comun divisore dei tre numeri r, s ed n, ed r', s', n' i quozienti che si ottengono dividendo r, s ed n per μ, esse prenderanno la forma $\operatorname{sn}\dfrac{s'\omega' + 2r'\omega}{n'}$. Dunque la equazione (13) sarà riduttibile, e potrà ottenersi una equazione

$$N_1'' = 0\,, \tag{14}$$

la quale abbia per radici soltanto quelle della prima classe, e i coefficienti funzioni razionali di u^8.

Ora tutte le radici della prima classe della equazione (13) sono della forma

$$\operatorname{sn} q\,\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\,, \tag{15}$$

dove g' è un divisore di n, t è preso relativamente al modulo g'', essendo $n = g'g''$, e q è primo con n.

Infatti se s, r ed n non hanno fattori comuni, e g' è il massimo comune divisore tra s ed n, avremo

$$s = s'g'\,.$$

e denotando con t' il minimo numero intero che sodisfa la congruenza

$$s' t' \equiv r \ (\mathrm{mod.}\ n)\ ,$$

il che può sempre farsi perchè s' è primo con n (¹): avremo

$$\mathrm{sn}\,\frac{s\omega' + 2r\omega}{n} = \mathrm{sn}\,s'\,\frac{g'\omega' + 2t'\omega}{n}\,.$$

Se t' è eguale ad $lg'' + t$, prendendo il numero $z < g'$ che sodisfa la congruenza

$$tz \equiv ls' (\mathrm{mod.}\ g')\ (^2),$$

avremo

$$\mathrm{sn}\,s'\,\frac{g'\omega' + 2t'\omega}{n} = \mathrm{sn}\,s'\,\frac{g'\omega' + 2(lg'' + t)\omega}{n} = \mathrm{sn}(zg'' + s')\,\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}$$

$$= \mathrm{sn}\,q\,\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\,,$$

dove $t \equiv t' (\mathrm{mod.}\ g'')$, $q \equiv g''z + s' (\mathrm{mod.}\ n)$ e primo con n, perchè abbiamo $q \equiv s' (\mathrm{mod.}\ g'')$, $qt \equiv r (\mathrm{mod.}\ n)$, r primo con g', ed s' primo con g''.

Il numero dei sistemi differenti di valori di g' e t nei quali g' è un divisore di n, e t è preso relativamente al modulo g'' è precisamente eguale ad N, e il numero dei valori di q primi con n ed inferiori ad n essendo

$$\theta(n) = p_1^{\mu_1 - 1}\, p_2^{\mu_2 - 1} \ldots p_s^{\mu_s - 1}\,(p_1 - 1)\,(p_2 - 1) \ldots (p_s - 1)\,,$$

(¹) Qui l'A. commette un errore, giacchè s' può aver fattori comuni con n. Però se questo avvenisse, si sostituisca $s' + \theta g''$ ad s' scegliendo θ in modo che $s' + \theta g''$ sia primo con g' e con g'' il che è sempre possibile. Con questa sostituzione la congruenza precedente diviene possibile, senza che la eguaglianza seguente cessi di essere soddisfatta.

V. C.

(²) L'A. suppone implicitamente di prendere t primo con g', il che è sempre possibile. Infatti se t avesse un fattore comune con g', questo non sarebbe comune a g'', altrimenti questo fattore dividerebbe anche t' e, a cagione della congruenza

$$s' t' \equiv r \ (\mathrm{mod.}\ n),$$

dividerebbe anche r, onde s, r, n avrebbero un fattore comune, contro l'ipotesi fatta. Dunque se t e g' avranno un fattore comune, questo non sarà comune a g'' onde (Vedi pag. 371, linee 21, 22, 23, 24 ove il testo dell'A. è stato leggermente modificato) si prenderà, invece di t, $t_1 = t + \theta g''$ e si disporrà del numero intero θ in guisa che t_1 riesca primo con g'. Essendo t primo con g' la possibilità della congruenza $tz \equiv ls'$ (mod. g') resta giustificata.

V. C.

il numero delle radici (15) sarà

$$\nu = \mathrm{N}\theta(n) = p_1^{2\mu_1-2}\, p_2^{2\mu_2-2} \dots p_s^{2\mu_s-2}\,(p_1^2-1)\,(p_2^2-1)\dots(p_s^2-1)\,,$$

e ν sarà il grado della equazione (14).

Ora dalle formule (1) del n. 7, denotando con $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ due funzioni razionali di x e di u^8 e ponendo

$$\varpi_{g't} = \frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\,,$$

abbiamo

$$\mathrm{cn}\, 2r\varpi_{g't} = \psi_2(\mathrm{sn}^2\varpi_{g't})\,. \qquad \mathrm{dn}\, 2r\varpi_{g't} = \psi_3(\mathrm{sn}^2\varpi_{g't}):$$

onde prendendo nella seconda formula (9)

$$2r \equiv m \pmod{n}\,,$$

avremo

$$x_{g't}^{\sigma} = \left(\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{snc}\, 2r\varpi_{g't}\right)^{\sigma} = f(\mathrm{sn}^2\varpi_{g't})\,,$$

denotando con $f(x)$ una funzione razionale di x e di u^8.

Ora ponendo $q\varpi_{g't}$ in luogo di $\varpi_{g't}$, se q è primo con n, i fattori di $x_{g't}^{\sigma}$ si permuteranno uno nell'altro: abbiamo dunque

$$x_{g't}^{\sigma} = \frac{\sum_q f(\mathrm{sn}^2 q\varpi_{g't})}{\theta(n)}\,,$$

e quindi

$$\sum_{g'} \sum_t x_{g't}^{\sigma} = \frac{\sum_{g'} \sum_t \sum_q f(\mathrm{sn}^2 q\varpi_{g't})}{\theta(n)}\,.$$

Ma il secondo membro di questa equazione è una funzione razionale e simmetrica delle ν radici della equazione (14), dunque è una funzione razionale di u^8, e le somme delle potenze simili delle radici della equazione (11), e quindi i coefficienti $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_{\mathrm{N}}$ sono funzioni razionali di u^8, come volevamo dimostrare.

Se poniamo

$$(16) \qquad sn \equiv \rho_s \pmod{8}\,,$$

è chiaro che la equazione (12) potrà porsi sotto la forma

$$(17) \qquad \mathrm{B}_0\, v^{\mathrm{N}} + \mathrm{B}_1\, u^{\rho_1} v^{\mathrm{N}-1} + \mathrm{B}_2\, u^{\rho_2} v^{\mathrm{N}-2} + \dots + \mathrm{B}_{\mathrm{N}}\, u^{\rho_{\mathrm{N}}} = 0\,,$$

dove $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1 \dots \mathrm{B}_{\mathrm{N}}$ indicano funzioni razionali e intere di u^8.

L'equazioni modulari (12) godono di molte importanti proprietà. Le principali sono contenute nei seguenti teoremi.

Teorema 1. *Mutando u in v e v in εu, essendo $\varepsilon = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ l'equazione modulare di ordine n dispari non varia.*

Infatti, denotando con u' e v' ciò che divengono u, v mutando ϖ in $\frac{\varpi}{n}$, abbiamo

$$u' = \varphi\left(\frac{\varpi}{n}\right) = v_{10}, \qquad v'_{n0} = \varepsilon\varphi(\varpi) = \varepsilon u ;$$

le quali equazioni dimostrano evidentemente il teorema.

Teorema 2. *Mutando u in $\frac{1}{u}$ e v in $\frac{1}{v}$ l'equazione modulare di ordine n dispari non varia.*

Infatti dalle formule (14) del n. 16, Parte I, abbiamo

$$\operatorname{snc}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\operatorname{snc}(z, k)}$$

e nella funzione di modulo $\frac{1}{k}$, ω ed ω' divengono $\varLambda$ e $\varLambda'$ determinati dall'equazioni

$$k\omega = \alpha\varLambda + \beta\varLambda' , \quad k\omega' = \gamma\varLambda + \delta\varLambda' ; \tag{18}$$

dove

$$\alpha \equiv \beta \equiv \delta \equiv 1 , \quad \gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } 2).$$

Quindi denotando con $v'_{g't}$ ciò che diviene $v_{g't}$ quando si sostituisce $\frac{1}{k}$ a k, avremo

$$v'_{g't} = \frac{1}{u^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_m \operatorname{snc}\left[m\frac{g'\varLambda' + 2t\varLambda}{n}, \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{u^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_m \operatorname{snc}\left[\frac{m}{n}\left(\frac{g'\varLambda'}{k} + \frac{2t\varLambda}{k}\right), k\right]} .$$

Ma dall'equazioni (18) si ricava

$$\frac{\varLambda}{k} = \delta\omega - \beta\omega' , \quad \frac{\varLambda'}{k} = \alpha\omega' - \gamma\omega ,$$

onde

$$v'_{g't} = \frac{1}{u^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{snc} \frac{m}{n} [(\alpha g' - 2\beta t)\omega' + (2t\delta - \gamma g')\omega]} = \frac{1}{v_{g'_1 t_1}}$$

essendo g'_1 il massimo comun divisore tra $\alpha g' - 2\beta t$ ed n. Dunque mu-

tando u in $\frac{1}{u}$, una radice $v_{g't}$ diviene eguale all'inversa di un'altra, ossia v diviene $\frac{1}{v}$.

Teorema 3. *Mutando* u^8 *in* $1-u^8$, v^8 *diviene* $1-v^8$.

Infatti, mutiamo u^8 in $1-u^8$ ossia k in k', e denotiamo anche con $v'_{g't}$ ciò che diviene $v_{g't}$. La quantità ω' diverrà $i\omega$, ed ω diverrà $-i\omega'$. Quindi, a cagione dell'equazioni (17) del n. 3, avremo

$$v'_{g't} = u'^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{snc}\left[mi \frac{g'\omega - 2t\omega'}{n}, k' \right] = u'^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\operatorname{dn}\left(m \frac{2t\omega' - g'\omega}{n}, k \right)}$$
$$= \sqrt[8]{1 - v^8_{g'_1 t_1}},$$

denotando con g_1' il massimo comun divisore di $2t$ ed n [1].

In un termine della equazione modulare (12), nel quale l'esponente di v è $N-s$, quello di u è $\equiv sn$ (mod. 8); onde se abbiamo

$$n = 8\alpha + \eta, \qquad N - 1 = 8l + \sigma,$$

denotando con μ e ν i rispettivi esponenti di v ed u, sarà

$$\mu \equiv \sigma + 1 - s, \qquad \nu \equiv s\eta \equiv \eta(\sigma+1) - \eta\mu \pmod{8}.$$

Ora, osservando che quando p è un intero dispari, si ha

$$p^h(p+1) \equiv p + 1 \pmod{8}$$

qualunque sia il numero intero h, si ottiene

$$N\eta \equiv N \pmod{8},$$

e quindi

$$\eta(\sigma+1) \equiv \sigma + 1 \pmod{8}.$$

---

[1] L'A. dava qui un teorema relativo a ciò che diviene l'equazione modulare nel caso limite $u=1$. Ma nel caso generale in cui n è un numero dispari qualunque, il teorema è inesatto. Esso sarebbe stato vero soltanto quando si fosse supposto n primo dispari. Ciò conduceva l'A. ad un errore nella espressione dell'equazione modulare per $n=9$, mentre per $n=3, 5, 7$ i resultati da lui trovati erano esatti. Questo teorema è stato perciò soppresso, ed il calcolo delle equazioni modulari per $n=3, 5, 7, 9$ (quest'ultimo opportunamente corretto) è stato tolto da questo paragrafo e portato in calce del paragrafo seguente, nel quale le proprietà delle funzioni $\varphi(\varpi)$ e $\psi(\varpi)$ permettono di ottenere i valori limiti delle radici dell'equazione modulare per $u=1$. (Vedi la nota del paragrafo seguente).

V. C.

Dunque, denotando con r il minimo residuo positivo di μ rispetto al modulo 8, nei termini nei quali l'esponente di v è $\equiv r \pmod{8}$, l'esponente di u sarà

$$\equiv (\sigma + 1 - \eta r) \pmod{8},$$

dove $(\sigma + 1 - \eta r)$ indica il minimo residuo positivo di $\sigma + 1 - \eta r$ rispetto al modulo 8, e la equazione (12) potrà scriversi nel modo seguente:

$$\sum_0^7{}_r\, u^{(\sigma+1-\eta r)}\, v^r \sum_0^l{}_s \sum_0^l{}_t\, b_{st}^r\, u^{8s}\, v^{8t} = 0\,. \tag{19}$$

Mutando u in v e v in εu questa equazione diviene

$$\sum_0^7{}_r\, \varepsilon^r u^r v^{(\sigma+1-\eta r)} \sum_0^l{}_s \sum_0^l{}_t\, b_{st}^r\, u^{8t} v^{8s} = \sum_0^7{}_r\, \varepsilon^{(\sigma+1-\eta r)} u^{(\sigma+1-\eta r)} v^r \sum_0^l \sum_0^l b_{ts}^{(\sigma+1-\eta r)} u^{8s} v^{8t} = 0.$$

Confrontando questa equazione colla (19) si vede che i termini che hanno per coefficienti le quantità b_{st}^ϱ nelle quali

$$\varrho(\eta + 1) \equiv \sigma + 1 \pmod{8}, \tag{20}$$

differiscono soltanto per il fattore ε^ϱ; dunque tutti i coefficienti delle medesime potenze di u e di v non differiranno, a cagione del Teorema 1, altro che per il fattore ε^ϱ, e avremo

$$b_{st}^r = \varepsilon^\varrho\, b_{ts}^{(\sigma+1-\eta r)}. \tag{21}$$

Mutando u in $\frac{1}{u}$ e v in $\frac{1}{v}$ l'equazione (19) diviene

$$\sum_0^7{}_r\, u^{\eta r} v^{\sigma+1-r} \sum_0^l \sum_0^l b_{st}^r u^{8(l-s)} v^{8(l-t)} = \sum_0^7{}_r\, u^{(\sigma+1-\eta r)} v^r \sum_0^l \sum_0^l b_{l-s,\,l-t}^{(\sigma+1-r)} u^{8s} v^{8t} = 0\,.$$

Ora in questa equazione il termine che contiene v^N ha il suo coefficiente eguale a b_{l0}; mentre nella equazione (19) questo coefficiente è $b_{0l}^{(\sigma+1)} = \varepsilon^\varrho b_{l0}^0$; dunque, per il Teorema 2, tutti i coefficienti delle medesime potenze di u e v differiranno nelle due equazioni per il solo fattore ε^ϱ, e avremo

$$b_{st}^r = \varepsilon^\varrho\, b_{l-s,\,l-t}^{(\sigma+1-r)}. \tag{22}$$

Sostituendo nella equazione (19) i valori

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\, \prod_1^\infty \frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,(1 - q + 2q^2 \ldots)\,, \\ v_{n0} &= \varepsilon\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q^n}\, \prod_1^\infty \frac{1+q^{2mn}}{1+q^{(2m-1)n}} = \varepsilon\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q^n}\,(1 - q^n + 2q^{2n} \ldots)\,, \end{aligned} \right. \tag{23}$$

i termini dello stesso ordine rispetto a q dovranno annullarsi tra loro, e avremo tante relazioni lineari quante occorrono dopo quelle che si possono

ottenere dal Teorema 3, per determinare tutti i coefficienti b^r_u. I termini di ordine minimo danno immediatamente

$$(24) \qquad b^0_{00} = b^0_{10} = \cdots = b^0_{\alpha-1,0} = 0\,, \quad b^1_{00} = -\varepsilon 2^{\frac{n-1}{2}} b^0_{\alpha 0}\,.$$

Teorema 4. *Gli* N *valori dei moduli trasformati* $\lambda^2 = v^8$ *sono radici di una equazione di grado* N *che ha i coefficienti funzioni razionali di* $k^2 = u^8$.

Infatti, se poniamo nella equazione (19) successivamente v, $ve^{\frac{\pi i}{4}}$, $ve^{\frac{2\pi i}{4}}, \ldots, ve^{\frac{7\pi i}{4}}$ in luogo di v e facciamo il prodotto dei risultati, otteniamo una equazione la quale contiene soltanto potenze intere e positive di $v^8 = \lambda^2$, che è di grado N e ha per radici i moduli trasformati

$$(25) \qquad \mu(\lambda^2, k^2) = 0\,.$$

Ma queste sostituzioni successive, e questo prodotto equivalgono a porre successivamente u, $ue^{-\frac{n\pi i}{4}}$, $ue^{-\frac{2n\pi i}{4}}, \ldots ue^{-\frac{7n\pi i}{4}}$ in luogo di u e moltiplicare i risultati. Dunque l'equazione (25) avrà i coefficienti funzioni razionali di $k^2 = u^8$, come volevamo dimostrare.

14.

La funzione $\varphi(\varpi)$ definita dalla espressione analitica

$$(1) \qquad \varphi(\varpi) = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{e^{i\pi\varpi}}\,\prod_1^\infty \frac{1+e^{2mi\pi\varpi}}{1+e^{(2m-1)i\pi\varpi}}\,,$$

la quale ha un significato soltanto per i valori complessi di ϖ che hanno la parte immaginaria differente da zero e positiva e che serve a determinare in questo campo le radici dell'equazioni modulari, gode molte importanti proprietà che passiamo a dimostrare.

Alla funzione $\varphi(\varpi)$ conviene aggiungere la funzione $\psi(\varpi)$ la quale è definita, nel medesimo campo delle funzioni $\varphi(\varpi)$, dalla espressione analitica

$$(2) \qquad \psi(\varpi) = \prod_1^\infty \frac{1-e^{(2m-1)\pi i\varpi}}{1+e^{(2m-1)\pi i\varpi}}\,.$$

Denotando con K e K′ gl'integrali ellittici completi di prima specie, abbiamo

$$\sqrt[4]{k} = \varphi\left(\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right), \qquad \sqrt[4]{k'} = \psi\left(\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right).$$

Ora mutando k in k', K e K' si convertono rispettivamente in K' e K, e quindi

$$\sqrt[4]{k'} = \varphi\left(\frac{i\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}\right) = \varphi\left(-\frac{1}{\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\right), \qquad \sqrt[4]{k} = \psi\left(\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right) = \psi\left(-\frac{1}{\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\right).$$

Dunque sarà

$$\varphi\left(-\frac{1}{\varpi}\right) = \psi(\varpi), \tag{3}$$

$$\psi\left(-\frac{1}{\varpi}\right) = \varphi(\varpi). \tag{4}$$

Dall'equazioni (1) e (2) si ottiene immediatamente

$$\varphi(\varpi \pm 1) = e^{\pm\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)}, \tag{5}$$

$$\psi(\varpi \pm 1) = \frac{1}{\psi(\varpi)}. \tag{6}$$

Mediante queste relazioni si possono esprimere

$$\varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) \quad \text{e} \quad \psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right)$$

in funzione di $\varphi(\varpi)$ e $\psi(\varpi)$, quando i numeri interi e reali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soddisfacciano alla equazione

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{7}$$

Primieramente se $\alpha > \gamma$ possiamo sempre determinare due numeri, α', β' congrui rispettivamente ad α e β rapporto al modulo 2, e $\alpha' < \gamma$, in modo che si abbia

$$\varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = \varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha' + \beta'\varpi}\right), \quad \alpha'\delta - \beta'\gamma = 1.$$

Infatti, se $\alpha > \gamma$ avremo

$$\alpha = 2t\gamma + \alpha', \qquad \beta = 2t\delta + \beta', \qquad \alpha'\delta - \beta'\gamma = 1,$$

ed $\alpha' < \gamma$. Quindi, a cagione dell'equazioni (3), (6) e (4), sarà

$$\varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = \varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{2t(\gamma + \delta\varpi) + \alpha' + \beta'\varpi}\right) = \psi\left(-2t - \frac{\alpha' + \beta'\varpi}{\gamma + \delta\varpi}\right)$$
$$= \varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha' + \beta'\varpi}\right).$$

Se $\alpha = 1$, γ e β sono pari e δ dispari, avremo:

$$\varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{1 + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta + \delta^2 - 1)} \varphi(\varpi).$$

Infatti, essendo $\delta - \beta\gamma = 1$, avremo

$$\varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{1 + \beta\varpi}\right) = \varphi\left(\frac{\gamma + (\beta\gamma + 1)\varpi}{1 + \beta\varpi}\right) = \varphi\left(\gamma + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\varpi}}\right)$$

$$= e^{\frac{\pi i\gamma}{8}} \psi\left(-\beta - \frac{1}{\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i\gamma}{8}} \varphi(\varpi).$$

Ma è facile a verificarsi la congruenza

$$\gamma \equiv \gamma(\beta\gamma + 1) + (\beta\gamma + 1)^2 - 1 \pmod{16},$$

la quale, poichè β e γ sono pari, conduce alla congruenza

$$\beta\gamma(\gamma + 2) \equiv 0 \pmod{16},$$

che evidentemente è sempre soddisfatta. Dunque avremo

$$\varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{1 + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta + \delta^2 - 1)} \varphi(\varpi),$$

come volevamo dimostrare.

Se $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$, $\delta - \beta\gamma = 1$, γ', β', γ e β sono pari, α', δ' e δ sono dispari e

$$\varphi\left(\frac{\gamma' + \delta'\varpi}{\alpha' + \beta'\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma'\delta' + \delta'^2 - 1)} \varphi(\varpi),$$

ponendo

$$\varpi_1 = \frac{\gamma + \delta\varpi}{1 + \beta\varpi}, \quad \gamma' + \gamma\delta' = c, \quad \beta\gamma' + \delta\delta' = d, \quad \alpha' + \beta'\gamma = a, \quad \beta\alpha' + \delta\beta' = b,$$

sarà

$$\varphi\left(\frac{\gamma' + \delta'\varpi_1}{\alpha' + \beta'\varpi_1}\right) = \varphi\left(\frac{c + d\varpi}{a + b\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(cd + d^2 - 1)} \varphi(\varpi).$$

Infatti abbiamo

$$\varphi\left(\frac{\gamma' + \delta'\varpi_1}{\alpha' + \beta'\varpi_1}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma'\delta' + \delta'^2 - 1)} \varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{1 + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma'\delta' + \delta'^2 + \gamma\delta + \delta^2 - 2)} \varphi(\varpi).$$

e la congruenza

$$cd + d^2 - 1 \equiv (\gamma' + \gamma\delta')^2 (\beta + \beta^2) + (\gamma' + \gamma\delta')\delta' (1 + 2\beta) + \delta'^2 - 1$$
$$\equiv \gamma'\delta' + \delta'^2 + \gamma - 1 \equiv \gamma'\delta' + \delta'^2 + \gamma\delta + \delta^2 - 2 \text{ (mod. 16)}.$$

Se $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, γ e β pari, α e δ dispari e $\alpha < \gamma$, avremo sempre

$$(8) \quad \frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi} = \frac{\gamma_1 + \delta_1\varpi_1}{1 + \beta_1\varpi_1}, \quad \varpi_1 = \frac{\gamma_2 + \delta_2\varpi_2}{1 + \beta_2\varpi_2}, \quad \varpi_2 = \frac{\gamma_3 + \delta_3\varpi_3}{1 + \beta_3\varpi_3},$$
$$\ldots \varpi_{r-1} = \frac{\gamma_r + \delta_r\varpi_r}{1 + \beta_r\varpi_r},$$

dove γ_s e β_s sono pari e $\delta_s - \beta_s\gamma_s = 1$.

Infatti, essendo $\alpha < \gamma$, potremo porre

$$\gamma = \gamma_1\alpha + \gamma', \quad \delta = \gamma_1\beta + \delta', \quad \alpha = \beta_1\gamma' + \alpha', \quad \beta = \beta_1\delta' + \beta'$$

e quindi

$$\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi} = \gamma_1 + \frac{\gamma' + \delta'\varpi}{\alpha + \beta\varpi} = \gamma_1 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{1}{\varpi_1}} = \frac{\gamma_1 + \delta_1\varpi_1}{1 + \beta_1\varpi_1},$$
$$\varpi_1 = \frac{\gamma' + \delta'\varpi}{\alpha' + \beta'\varpi}, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

e saranno $\alpha' < \gamma'$, γ' e β' pari e α' e δ' dispari, $\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = 1$. Analogamente otterremo l'espressione di ϖ_2, di $\varpi_3 \ldots$ e poichè i valori di α sono interi e vanno continuamente diminuendo, arriveremo finalmente ad uno che sia eguale all'unità. Onde la serie di equazioni (8) sarà finita come volevamo dimostrare.

Da tutto questo si deduce facilmente il seguente

Teorema. *Se* $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, β e γ *sono pari,* α e δ *dispari, avremo sempre*

$$(9) \quad \varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta + \delta^2 - 1)} \varphi(\varpi).$$

Se α e δ *sono pari e* β *e* γ *dispari, avremo*

$$(10) \quad \varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta + \gamma^2 - 1)} \psi(\varpi).$$

Infatti a cagione dell'equazione (9), abbiamo

$$\varphi\left(\frac{-\delta + \gamma\varpi}{-\beta + \alpha\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta + \gamma^2 - 1)} \varphi(\varpi).$$

e ponendo $-\frac{1}{\varpi}$ in luogo di ϖ:

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta+\gamma^2-1)}\psi(\varpi).$$

Se β è pari e α, γ, e δ dispari, sarà

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)}. \tag{11}$$

Infatti, dalla equazione (9), si ha

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta+\delta\varpi}{\alpha+\beta+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+2\delta^2-1)}\varphi(\varpi).$$

Mutando ϖ in $\varpi-1$, si ottiene

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)}.$$

Se α è pari, β, γ e δ dispari, avremo

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{-\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\frac{\psi(\varpi)}{\varphi(\varpi)}. \tag{12}$$

Poichè dall'equazione (11) avremo

$$\varphi\left(\frac{\gamma\varpi-\delta}{\alpha\varpi-\beta}\right)=e^{-\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)},$$

e mutando ϖ in $-\frac{1}{\varpi}$, otterremo l'equazione (12).

Se δ è pari e α, β, γ dispari, sarà

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+\gamma^2-1)}}{\psi(\varpi)}. \tag{13}$$

Infatti, dall'equazione (10) abbiamo

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta+\delta\varpi}{\alpha+\beta+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+\gamma^2-1)}\psi(\varpi),$$

e mutando ϖ in $\varpi-1$ si ottiene l'equazione (13).

Se γ è pari e α, β, δ dispari, avremo

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{8}(\delta^2-\gamma\delta-1)}}{\varphi(\varpi)}. \tag{14}$$

Infatti dall'equazione (13) abbiamo

$$\varphi\left(\frac{\gamma\varpi-\delta}{\alpha\varpi-\beta}\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta+\delta^2-1)}}{\psi(\varpi)}$$

e mutando ϖ in $-\dfrac{1}{\varpi}$ si ha l'equazione (14).

Le sei formule precedenti sono dovute al sig. Hermite.

Dalla equazione (9) si ottengono le radici della equazione

$$\varphi(x)=\varphi(\varpi)$$

che saranno date dalla formula

$$x=\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi},$$

dove

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1\,,$$

γ e β pari, α e δ dispari, e $\gamma\equiv 0$ (mod. 16), $\alpha\equiv\delta\equiv\pm 1$ (mod. 8), oppure $\gamma\equiv 8$ (mod. 16), $\alpha\equiv\delta\equiv\pm 3$ (mod. 8).

Determiniamo ora l'equazioni modulari degli ordini dispari più bassi [1].

---

[1] Per questo calcolo l'A. ricorre, nel caso degli ordini 5, 7, 9, alla forma che assume l'equazione modulare quando si faccia $u=1$. Egli si serviva perciò di un teorema del § 13 che venne soppresso perchè inesatto (Vedi nota al § 13). Peraltro la forma dell'equazione modulare nel caso limite in cui $u=1$ si può ricavare dai corrispondenti valori limiti delle radici dell'equazione modulare e questi si possono ottenere nel modo seguente, mediante le funzioni $\varphi(\varpi)$ e $\psi(\varpi)$ studiate in questo paragrafo.

L'espressione generale delle radici dell'equazione modulare è (Vedi nota a' piedi della pagina 377)

$$v_{g't}=e^{\frac{i\pi(g'^2-1)}{8}}\varphi\left(\frac{g'\varpi+16t}{g''}\right),\ g'g''=n. \tag{1}$$

Ricordiamo che posto $\dfrac{\omega'}{\omega}=\dfrac{iK'}{K}=\varpi$ si ha:

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(\varpi)&=\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi\varpi}{8}}\prod_1^\infty\frac{1+e^{2mi\pi\varpi}}{1+e^{(2m-1)i\pi\varpi}},\\ \psi(\varpi)&=\prod_1^\infty\frac{1-e^{(2m-1)i\pi\varpi}}{1+e^{(2m-1)i\pi\varpi}},\end{aligned}\right. \tag{2}$$

d'onde, per essere $\varphi(\varpi)=\psi\left(-\dfrac{1}{\varpi}\right)=\psi(\varpi')$, $\varpi'=-\dfrac{1}{\varpi}=\dfrac{iK}{K'}$, si trae

$$\varphi(\varpi)=\psi\left(-\frac{1}{\varpi}\right)=\psi(\varpi')=\prod_1^\infty\frac{1-e^{-\frac{(2m-1)\pi K}{K'}}}{1+e^{-\frac{(2m-1)\pi K}{K'}}}. \tag{3}$$

Se $k=1$, quindi $K=\infty$, $K'=\dfrac{\pi}{2}$, $\varpi=0$, viene $\varphi(0)=1$; con che dalla (1) si

1°. Sia $n = 3$, avremo

$$N - 1 = \sigma = 3, \quad n = \eta = 3, \quad l = 0, \quad \alpha = 0;$$

quindi i sistemi dei valori $[r, (\sigma + 1 - \eta r)]$ nei quali non entrano numeri maggiori di N sono

$$(0, 4), \quad (1, 1), \quad (3, 3), \quad (4, 0),$$

---

deduce

$$v_{g'0} = e^{\frac{i\pi(g'^2 - 1)}{8}} = (-1)^{\frac{g'^2 - 1}{8}} \tag{3'}$$

Resta da considerare il caso di t diverso da zero. Intanto si osservi che è

$$v_{g't} = e^{\frac{i\pi(g'^2-1)}{8}} \varphi\left(\frac{16t\varpi' - g'}{g''\varpi'}\right) = e^{\frac{i\pi(g'^2-1)}{8}} \psi\left(\frac{g''\varpi'}{g' - 16t\varpi'}\right), \tag{4}$$

o, ponendo per compendio (*)

$$\eta = \frac{g''\varpi'}{g' - 16t\varpi'},$$

più semplicemente

$$v_{g't} = e^{\frac{i\pi(g'^2-1)}{8}} \psi(\eta). \tag{4'}$$

Consideriamo la funzione $\psi\left(\frac{\gamma + \delta\eta}{\alpha + \beta\eta}\right)$, dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri interi soddisfacenti alla condizione $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; si ha

$$\psi\left(\frac{\gamma + \delta\eta}{\alpha + \beta\eta}\right) = \psi\left(\frac{\gamma g' + (\delta g'' - 16t\gamma)\varpi'}{\alpha g' + (\beta g'' - 16t\alpha)\varpi'}\right). \tag{5}$$

Tra i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che, salvo la condizione posta dianzi, sono arbitrarî, stabiliamo la relazione (**)

$$\beta g'' = 16t\alpha:$$

dovendo α, β essere primi tra loro, sarà g'' divisibile per α e $16t$ per β: quindi

$$\frac{g''}{\alpha} = \frac{16t}{\beta} = \varrho$$

con ϱ numero intero, ossia

$$\alpha\varrho = g'', \quad \beta\varrho = 16t;$$

essendo g'' numero dispari, tanto α quanto ϱ saranno dispari, e β sarà numero pari: di più sarà ϱ, il massimo comun divisore fra g'' e t. Essendo α dispari e β pari, di ne-

---

(*) Qui per $\varpi' = \infty$ si ha $\eta = -\frac{g''}{16t}$.

(**) Cioè facciamo in maniera che ad $\eta = -\frac{g''}{16t}$, cioè $\varpi' = \infty$, corrisponda $\eta_1 = \frac{\gamma + \delta\eta}{\alpha + \beta\eta} = \infty$: con questo artificio il caso ora contemplato viene ridotto al precedente.

e la equazione modulare sarà

$$b^0_{00}\, u^4 + b^1_{00}\, uv + b^3_{00}\, u^3 v^3 + b^4_{00}\, v^4 = 0\,,$$

e l'equazioni (21), (22), (24) del § 13 daranno

$$b^0_{00} = -\, b^4_{00}\,, \quad b^1_{00} = -\, b^3_{00}\,, \quad b^1_{00} = 2 b^0_{00}$$

onde dividendo per b^0_{00} l'equazione diviene

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2 v^2) = 0.$$

---

cessità sarà δ dispari. Quanto al γ aggiungiamo ex-g. la condizione di essere pari. Dopo la condizione imposta ad α e β la (5) diventa

$$\psi\left(\frac{\gamma + \delta\eta}{\alpha + \beta\eta}\right) = \psi\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta g'' - 16\, t\gamma}{\alpha g'}\, \varpi'\right) = \psi\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\varrho \varpi'}{\alpha g'}\right) = \psi\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\varrho^2 \varpi'}{n}\right).$$

D'altro lato per $\alpha\,,\delta$ dispari; $\beta\,,\gamma$ pari si ha

$$\psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{i\pi}{8}(-\alpha\beta + \alpha^2 - 1)}\, \psi(\eta) \text{ (*)}:$$

ma nel nostro caso è $\alpha\beta \equiv 0$ (mod. 16): dunque

$$\psi(\eta) = e^{-\frac{i\pi}{8}(\alpha^2 - 1)}\, \psi\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\varrho^2 \varpi'}{n}\right).$$

Quindi, sostituendo nella (4'),

$$v_{g't} = e^{\frac{i\pi(g'^2 - \alpha^2)}{8}}\, \psi\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\varrho^2 \varpi'}{n}\right). \tag{6}$$

Ora osservando che $(\alpha^2 - 1)(\varrho^2 - 1) \equiv 0$ (mod. 16), verrà $\alpha^2 \varrho^2 \equiv \alpha^2 + \varrho^2 - 1$ (mod. 16), ossia

$$g''^2 \equiv \alpha^2 + \varrho^2 - 1 \text{ (mod. 16)}, \quad \text{cioè} \quad \alpha^2 \equiv g''^2 - \varrho^2 + 1 \text{ (mod. 16)}.$$

(*) Il Betti non dà per la funzione ψ le sei formole analoghe a quelle trovate più sopra per la funzione φ; esse si possono ricavare molto facilmente e le riportiamo qui:

1°. $\alpha\,,\delta$ dispari; $\beta\,,\gamma$ pari: $\psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{i\pi}{8}(-\alpha\beta + \alpha^2 - 1)}\, \psi(\varpi)$;

2°. $\alpha\,,\delta$ pari; $\beta\,,\gamma$ dispari: $\psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{i\pi}{8}(\alpha\beta + \beta^2 - 1)}\, \varphi(\varpi)$;

3°. β pari; $\alpha\,,\gamma\,,\delta$ dispari; $\psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{i\pi}{8}(\alpha\beta + \alpha^2 - 1)}\, \frac{1}{\psi(\varpi)}$;

4°. α pari; $\beta\,,\gamma\,;\delta$ dispari: $\psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{i\pi}{8}(-\alpha\beta + \beta^2 - 1)}\, \frac{1}{\varphi(\varpi)}$;

5°. δ pari; $\alpha\,,\beta\,,\gamma$ dispari: $\psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{-\frac{i\pi\alpha\beta}{8}}\, \frac{\psi(\varpi)}{\varphi(\varpi)}$;

6°. γ pari; $\alpha\,,\beta\,,\delta$ dispari: $\psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{i\pi\alpha\beta}{8}}\, \frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)}$.

2°. Sia $n=5$, avremo

$$\mathrm{N}-1=\sigma=5\,,\quad n=\eta=5\,,\quad l=0\,,\quad \alpha=0\,;$$

onde i sistemi dei valori $[r\,,(\sigma+1-\eta r)$ nei quali non entrano numeri maggiori di 6, sono

$$(0\,,6)\,,\quad (1\,,1)\,,\quad (2\,,4)\,,\quad (4\,,2)\,,\quad (5\,,5)\,,\quad (6\,,0)\,,$$

l'equazione modulare sarà

$$b^0_{00}\,u^6+b^1_{00}\,uv+b^2_{00}\,u^4v^2+b^4_{00}\,u^2v^4+b^5_{00}\,u^5v^5+b^6_{00}\,v^6=0$$

e le equazioni (21), (22) e (24) del § 13 daranno

$$b^0_{00}=-\,b^6_{00}\,,\quad b^2_{00}=-\,b^4_{00}\,,\quad b^1_{00}=-\,b^5_{00}\,,\quad b^1_{00}=4b^0_{00}\,,$$

e quindi avremo

$$u^6-v^6+4uv(1-u^4v^4)+bu^2v^2(u^2-v^2)=0\,,$$

e poichè per $u=1$ questa equazione deve prendere la forma [1]

$$(v+1)^5\,(1-v)=1-v^6+4v(1-v^4)+5v^2(1-v^2)\,,$$

Per cui possiamo ancora dire che

$$v_{g't}=e^{\frac{i\pi(g'^2-g''^2+\rho^2-1)}{8}}\;\psi\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\rho^2\varpi'}{n}\right);$$

od anche

$$v_{g't}=e^{\frac{i\pi\left[g'^2+g''^2+\rho^2-3-2\,(g''^2-1)\right]}{8}}\;\psi\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\rho^2\varpi'}{n}\right).$$

Ma $2(g''^2-1)\equiv 0$ (mod. 16), $g'^2+g''^2-1\equiv(g'^2\,g''^2=n^2)$ (mod. 16); quindi si avrà definitivamente

$$v_{g't}=e^{\frac{i\pi(n^2+\rho^2-2)}{8}}\;\psi\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\rho^2\varpi'}{n}\right). \tag{7}$$

Facendo ora crescere indefinitamente il modulo di ϖ', evidentemente

$$\lim_{\mathrm{mod}\,\varpi'=\infty}\psi\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\rho^2\varpi'}{n}\right)=1\,;$$

per cui

$$\lim_{\mathrm{mod}\,\varpi'=\infty} v_{g't}=e^{\frac{i\pi(n^2+\rho^2-2)}{8}}=(-1)^{\frac{n^2+\rho^2-2}{8}}. \tag{8}$$

Di qui si deduce il teorema: *Se nell'equazione modulare si pone* $u=1$ *(nel caso in cui* n *è un numero primo dispari) una delle radici diventa eguale a* $+1$ *e le rimanenti a* $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$.

V. C.

(1) Vedi il teorema della nota precedente.

sarà

$$b = 5\,,$$

e per l'equazione modulare di ordine 5°, avremo

$$u^6 - v^6 + 4uv(1 - u^4v^4) + 5u^2v^2(u^2 - v^2) = 0\,.$$

3°. Sia $n = 7$; saranno

$$\mathrm{N} - 1 = \sigma = n = \eta = 7\,, \quad l = 0\,, \quad \alpha = 0\,,$$

e i sistemi $[r\,, (\sigma + 1 - \eta r)]$:

$(0\,,8)\,,\ (1\,,1)\,,\ (2\,,2)\,,\ (3\,,3)\,,\ (4\,,4)\,,\ (5\,,5)\,,\ (6\,,6)\,,\ (7\,,7)\,,\ (8\,,0)\,,$

onde l'equazione modulare avrà la forma

$$b^0_{00}u^8 + b^1_{00}uv + b^2_{00}u^2v^2 + b^3_{00}u^3v^3 + b^4_{00}u^4v^4 + b^5_{00}u^5v^5 + b^6_{00}u^6v^6$$
$$b^7_{00}u^7v^7 + b^8_{00}v^8 = 0\,,$$

e sarà

$$b^0_{00} = b^8_{00}\,, \quad b^1_{00} = b^7_{00}\,, \quad b^2_{00} = b^6_{00}\,, \quad b^3_{00} = b^5_{00}\,, \quad b^1_{00} = -8b^0_{00}$$

e quindi

$$u^8 + v^8 - 8uv(1 + u^6v^6) + bu^2v^2(1 + u^4v^4) + b'u^3v^3(1 + u^2v^2) + b''u^4v^4 = 0\,.$$

Ponendo $u = 1$ deve prendere la forma (1)

$$(v - 1)^8 = 1 + v^8 - 8v(1 + v^7) + 28v^2(1 + v^4) - 56v^3(1 + v^2) + 70v^4 = 0\,,$$

e per ciò

$$b = 28\,, \quad b' = -56\,, \quad b'' = 70\,,$$

e l'equazione modulare di ordine 7° sarà

$$u^8 + v^8 - 8uv(1 + u^6v^6) + 28u^2v^2(1 + u^4v^4) - 56u^3v^3(1 + u^2v^2) + 70u^4v^4 = 0.$$

4°. Sia $n = 9$, avremo

$$\mathrm{N} = 12\,, \quad \sigma = 3\,, \quad \eta = 1\,, \quad l = 1\,, \quad \alpha = 1\,,$$

e i sistemi $[r\,, (\sigma + 1 - \eta r)]$ saranno

$(0\,,4)\,,\ (1\,,3)\,,\ (2\,,2)\,,\ (3\,,1)\,,\ (4\,,0)\,,\ (5\,,7)\,,\ (6\,,6)\,,\ (7\,,5)\,,$

e l'equazione modulare sarà

$$u^4(b^0_{00} + b^0_{10}u^8 + b^0_{01}v^8 + b^0_{11}u^8v^8) + u^3v(b^1_{00} + b^1_{10}u^8 + b^1_{01}v^8 + b^1_{11}u^8v^8)$$
$$+ u^2v^2(b^2_{00} + b^2_{10}u^8 + b^2_{01}v^8 + b^2_{11}u^8v^8) + uv^3(b^3_{00} + b^3_{10}u^8 + b^3_{01}v^8 + b^3_{11}u^8v^8)$$
$$+ v^4(b^4_{00} + b^4_{10}u^8 + b^4_{01}v^8 + b^4_{11}u^8v^8) + b^5_{00}u^7v^5 + b^6_{00}u^6v^6 + b^7_{00}u^5v^7 = 0\,.$$

(1) Vedi il teorema della nota a pag. 389.

Dall'equazioni (21), (22) e (24) del § 13 si rileva

$$b^{1}_{[illegible]} = b^{4}_{[illegible]} = b^{7}_{[illegible]} = b^{10}_{[illegible]} = 0, \qquad b^{3}_{[illegible]} = b^{4}_{[illegible]}, \qquad b^{4}_{[illegible]} = b^{4}_{[illegible]},$$
$$b^{1}_{[illegible]} = b^{4}_{[illegible]} = b^{7}_{[illegible]} = b^{10}_{[illegible]} = -16\, b^{0}_{10}, \qquad b^{1}_{[illegible]} = b^{2}_{[illegible]}, \qquad b^{1}_{[illegible]} = b^{2}_{[illegible]},$$
$$b^{2}_{[illegible]} = b^{2}_{[illegible]}, \qquad b^{2}_{[illegible]} = b^{2}_{[illegible]}, \qquad b^{5}_{10} = b^{5}_{[illegible]};$$

onde avremo

$$(15)\quad b^{0}_{10} u^{12} - v(16\, b^{0}_{10} u^{2} - b^{1}_{10} u^{11}) - v^{2}(b^{2}_{00} u^{2} - b^{2}_{10} u^{10}) - v^{3}(16\, b^{0}_{10} u - b^{1}_{01} u^{9})$$
$$+ b^{0}_{01} u^{8} v^{4} + b^{5}_{00} u^{7} v^{5} + b^{6}_{00} u^{6} v^{6} + b^{5}_{00} u^{5} v^{7} + b^{0}_{01} u^{4} v^{8}$$
$$+ v^{9}(b^{1}_{01} u^{3} - 16\, b^{0}_{10} u^{11}) + v^{10}(b^{2}_{10} u^{2} - b^{2}_{00} u^{10}) + v^{11}(b^{1}_{10} u - 16 b^{0}_{10} u^{9})$$
$$+ b^{0}_{10} v^{12} = 0\ (^{1}).$$

Per $u = 1$ essa deve ridursi a $(v-1)^{10}(v+1)^{2} = 0$ (2), ossia a

$$(16)\quad v^{12} - 8v^{11} + 26v^{10} - 40v^{9} + 15v^{8} + 48v^{7} - 84v^{6} + 48v^{5}$$
$$+ 15v^{4} - 40v^{3} + 26v^{2} - 8v + 1 = 0;$$

ma per $u = 1$ la (15) diventa

$$(17)\quad b^{0}_{10} v^{12} + (b^{1}_{10} - 16\, b^{0}_{10}) v^{11} + (b^{2}_{10} + b^{2}_{00}) v^{10} + (b^{1}_{01} - 16\, b^{0}_{10}) v^{9}$$
$$+ b^{0}_{01} v^{8} + b^{5}_{00} v^{7} + b^{6}_{00} v^{6} + b^{5}_{10} v^{5} + b^{0}_{01} v^{4} - (16\, b^{0}_{10} - b^{1}_{01}) v^{3}$$
$$+ (b^{2}_{00} + b^{2}_{10}) v^{2} - (16\, b^{0}_{10} - b^{1}_{10}) v + b^{0}_{10} = 0.$$

Paragonando la (16) colla (17) si trova

$$b^{0}_{10} = 1\ ,\ b^{1}_{10} = 8\ ,\ b^{2}_{10} + b^{2}_{00} = 26\ ,\ b^{1}_{01} = -24\ ,\ b^{0}_{01} = 15\,,$$
$$b^{5}_{00} = 48\ ,\ b^{6}_{00} = -84\,,$$

---

(1) A partire da questo punto il calcolo dell'A. è stato modificato (Vedi nota al § 13, p. 382). V. C.

(2) Riportiamoci infatti ai calcoli sviluppati nella nota della pag. 389. Se supponiamo $n = 9$, i casi possibili sono

$$g' = 1\ ,\ g'' = 3^{2}\ ,\ t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8;$$
$$g' = 3\ ,\ g'' = 3\ ,\ t = 1,2;$$
$$g' = 3^{2}\ ,\ g'' = 1\ ,\ t = 1,$$

onde, facendo sempre uso delle notazioni adoperate nella nota suddetta, si trova

$v_{10} = 1$, $v_{11} = 1$, $v_{12} = 1$, $v_{13} = -1$, $v_{14} = 1$, $v_{15} = 1$, $v_{16} = 1$, $v_{17} = -1$, $v_{18} = 1$;
$v_{31} = 1$, $v_{32} = 1$;
$v_{91} = 1$

cioè *dieci* radici sono eguali a $+1$ o *due* eguali a -1.

V. C.

con che la equazione (15) prende la forma

$$(18)\qquad u^{12} - 8\,v\,u^3(2-u^8) + v^2\,u^2(b_{00}^2 + b_{10}^2\,u^8) - 8\,v^3\,u(2+3\,u^8)$$
$$+ 15\,u^4\,v^4(u^4+v^4) + 48\,v^5\,u^5(u^2+v^2) - 84\,u^6\,v^6 - 8\,v^9\,u^3(3+2\,u^8)$$
$$+ v^{10}\,u^2(b_{10}^2 + b_{00}^2\,u^8) + 8\,v^{11}\,u(1-2\,u^8) + v^{12} = 0\,.$$

Ora

$$u = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,(1 - q + 2q^2 + \cdots)\,,$$
$$v_{9,1} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q^9}\,(1 - q^9 + 2q^{18} + \cdots)\,.$$

Sostituendo questi lavori per u e per v nella (18) essa deve riuscire identicamente soddisfatta; in particolare annullando il coefficiente di $\sqrt[8]{q^{20}}$ si trova

$$b_{00}^2 = 16 \text{ e in conseguenza } b_{10}^2 = 10\,.$$

Pertanto l'equazione modulare diventerà

$$(19)\qquad u^{12} - 8vu^3(2-u^8) + 2v^2\,u^2(8+5u^8) - 8v^3\,u(2+3u^8)$$
$$+ 15v^4\,u^4(u^4+v^4) + 48v^5\,u^5(u^2+v^2) - 84u^6\,v^6 - 8v^9\,u^3(3+2u^8)$$
$$+ 2v^{10}\,u^2(5+8u^8) + 8v^{11}u(1-2u^8) + v^{12} = 0\,;$$

e questa si riduce facilmente alla forma

$$(v-u)^{10}(v+u)^2 + 16vu(1-u^8)\left[v^{10} - v^9\,u + v^8\,u^2 - (v^2 - uv + u^2)\right] = 0:$$

ma

$$v^{10} - v^9\,u + v^8\,u^2 = v^8\,(v^2 - uv + u^2):$$

quindi la nostra equazione sarà finalmente

$$(20)\quad (v-u)^{10}\,(v+u)^2 - 16uv\,(1-u^8)\,(1-v^8)\,(v^2 - uv + u^2) = 0.$$

15.

Allorchè la equazione modulare di ordine dispari n ha radici eguali, il numero delle trasformazioni differenti di ordine n è minore di N. Le funzioni ellittiche particolari, per le quali ha luogo questo abbassamento nel numero delle trasformazioni differenti di un dato ordine godono importanti proprietà, che le rendono meritevoli di speciale considerazione. In due modi si può procedere a determinarle, o colla ricerca dei loro moduli ponendo a zero il discriminante della equazione modulare, e risolvendo la equazione così ottenuta, oppure colla ricerca dei valori dei rapporti ϖ dei loro periodi che sodisfano a una equazione

$$(1)\qquad \varepsilon_g\varphi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) = \varepsilon_{g_1}\varphi\left(\frac{g_1\varpi + t}{g'_1}\right),$$

dove $\varepsilon_r = (-1)^{\frac{r^2-1}{8}}$ e $gg' = g_1\,g'_1 = n$.

Teorema. *Il discriminante della equazione modulare di ordine dispari n ha la forma*

(2) $$D = u^{\nu}(1 - u^8)^{\nu_1} (A_0 + A_1 u^8 + A_2 u^{16} + \cdots + A_\rho u^{8\rho});$$

dove

(3) $$\nu = \Gamma_n + 2\Delta_n, \quad \nu_1 = \Gamma_n + 2\Delta'_n, \quad 4\rho = N(N-1) - \nu - 4\nu_1;$$

donotando con Γ_n la funzione numerica

$$\sum \frac{n}{g^2} (g)_n [(g)_n - 1],$$

dove la somma deve estendersi a tutti i divisori di n, e $(g)_n$ indica il numero dei numeri incongrui rispetto a g e che non hanno fattori comuni con g e con $\frac{n}{g}$, Δ_n esprime la somma dei prodotti $\frac{n}{g^2}(g_n)(g_1)_n$ estesa a tutte le combinazioni di due divisori diseguali di n dove $g > g_1$, e Δ'_n la medesima somma dalle quali sono esclusi i prodotti per i quali non è

(4) $$\varepsilon_g = \varepsilon_{g_1},$$

e $A_0, A_1, \ldots A_\rho$ sono quantità numeriche.

Per dimostrare questo teorema osservo che abbiamo

(5) $$D = \Pi(v_{gt} - v_{g_1 t_1})^2 = u^{N(N-1)n}\, \Pi(x_{gt} - x_{g_1 t_1})^2,$$

dove

$$x_{gt} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{snc} m\left(\frac{g\omega' + 2t\omega}{n}\right).$$

Ora le quantità x_{gt} sono radici della equazione (14) del n. 13, la quale ha i coefficienti funzioni razionali di u^8, quindi il prodotto $\Pi(x_{gt} - x_{g_1 t_1})^2$, che è una funzione simmetrica, sarà razionalmente esprimibile per u^8, e avremo

(6) $$D = u^{N(N-1)n} f(u^8),$$

denotando con $f(x)$ una funzione razionale di x.

Ma D è anche una funzione razionale e simmetrica delle radici della equazione modulare che ha i coefficienti funzioni razionali e intere di u, e il coefficiente del primo termine eguale all' unità, quindi il secondo membro della (6) dovrà essere una funzione intera di u, il denominatore di $f(u^8)$ non potrà essere altro che una potenza di u^8, e denotando con ν un numero che sodisfarà alla congruenza

$$\nu \equiv N(N-1)n \pmod{8},$$

avremo

(7) $$D = u^{\nu}(a_0 + a_1 u^8 + \cdots + a_l u^{8l}).$$

Per determinare ν sostituiamo nell'espressioni (5) e (7) i valori

$$u=\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}(1-q+2q^2-\cdots) \tag{8}$$

$$v_{gt}=\varepsilon_g\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q^{\frac{g}{g'}}\,\alpha^t}\,(1-q^{\frac{g}{g'}}\alpha^t+\cdots)\,, \tag{9}$$

e confrontiamo i minimi esponenti di $\sqrt[8]{q}$.

Il minimo esponente di $\sqrt[8]{q}$ in $v_{gt}-v_{gt'}$ è evidentemente $\frac{g}{g'}=\frac{n}{g'^2}$, e quindi in $\Pi_{tt'}(v_{gt}-v_{gt'})^2$ sarà $\frac{n}{g'^2}(g')_n\Big((g')_n-1\Big)$ e in $\Pi_{gtt'}(v_{gt}-v_{gt'})^2$ sarà Γ_n. Il minimo esponente di $\sqrt[8]{q}$ in $v_{gt}-v_{g_1t_1}$ dove $g<g_1$ è $\frac{n}{g'^2}$ e quindi in $\Pi_{tt_1}(v_{gt}-v_{g_1t_1})^2$ sarà $\frac{2n}{g'^2}(g')_n(g'_1)_n$ e per tanto sarà $2\Delta_n$ nel prodotto $\Pi_{gg_1t_1}(v_{gt}-v_{g_1t_1})^2$ in cui g non è $=g_1$. Dunque in $\Pi(v_{gt}-v_{g_1t_1})^2$ sarà

$$\Gamma_n+2\Delta_n\,;$$

ma nell'espressione (7) il minimo esponente di $\sqrt[8]{q}$ è ν, quindi avremo

$$\nu=\Gamma_n+2\Delta_n\,.$$

Ponendo $u=1$ l'equazione modulare acquista radici eguali, dunque D deve annullarsi per $u^8=1$, e quindi deve essere divisibile per $1-u^8$. Denotiamo con ν_1 la massima potenza di $1-u^8$ che divide D, avremo

$$\begin{aligned} D &= u^{\nu}(1-u^8)^{\nu_1}\,(A_0+A_1u^8+\cdots+A_\rho u^{8\rho}) \\ &= u^{\nu}(1-u^8)^{\nu_1}\,[B_0+B_1(1-u^8)+\cdots+B_\rho(1-u^8)^\rho]\,, \end{aligned} \tag{10}$$

e A_0 e B_0 differenti da zero.

Mutando u in $u'=\sqrt[8]{1-u^8}$, D diverrà

$$D'=u^{8\nu_1}(1-u^8)^{\frac{\nu}{8}}\,(B_0+B_1u^8+\cdots+B_\rho u^{8\rho})\,. \tag{11}$$

Per determinare ν_1, sostituiamo il valore (8) nell'espressione (11) e i valori (9) nell'espressione che si deduce dalla (5) mutando u in u' e confrontiamo i minimi esponenti di q.

Mutando u in u', ϖ diviene $-\frac{1}{\varpi}$; quindi denotando con v'_{gt} ciò che diviene v_{gt}, avremo

$$D'=\Pi(v'_{gt}-v'_{g_1t_1})^2=\Pi\left[\varepsilon_g\varphi\left(\frac{t\varpi-g}{g'\varpi}\right)-\varepsilon_{g_1}\varphi\left(\frac{t_1\varpi-g_1}{g'_1\,\varpi}\right)\right]^2.$$

Ora se prendiamo t multiplo di 16, il che può sempre farsi, perchè v_{gt} non muta valore quando a t si sostituiscano dei numeri congrui rispetto al modulo g', e se denotiamo con g_0 il massimo comun divisore di t e di g', e poniamo

$$t=g_0t_0\,,\qquad g'=g_0g_0^0.$$

sarà

$$\frac{t\varpi - g}{g'\varpi} = \frac{c - t_0 \dfrac{g_0\varpi - ag}{g_0^2 g}}{a - g_0^2 \dfrac{g_0\varpi - ag}{g_0^2 g}},$$

dove

$$at_0 - g_0^2 c = 1 ;$$

a è pari, c dispari, e quindi $\varepsilon_c = \varepsilon_{g_0^2}$. Onde a cagione della equazione (10) del n. 14, avremo

$$\varepsilon_g \varphi\left(\frac{t\varpi - g}{g'}\right) = \varepsilon_g \varepsilon_{g_0^2} \psi\left(\frac{g_0\varpi - ag}{g_0^2 g}\right).$$

e ponendo $g_0^2 g = g'_0$, e quindi $g_0 g'_0 = n$, sarà

$$\varepsilon_g \varphi\left(\frac{t\varpi - g}{g'}\right) = \varepsilon_{g'_0} \psi\left(\frac{g_0\varpi - ag}{g'_0}\right).$$

Dunque, mutando u in u', D diviene

$$D' = \Pi\left[\varepsilon_{g'} \psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) - \varepsilon_{g'_1} \psi\left(\frac{g_1\varpi + t}{g'_1}\right)\right]^2.$$

Ora abbiamo

$$\psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) = \Pi \frac{1 - (q^{\frac{g}{g'}} \alpha^t)^{2m-1}}{1 + (q^{\frac{g}{g'}} \alpha^t)^{2m-1}} = 1 - q^{\frac{g}{g'}} \alpha^t + \cdots$$

Quindi il minimo esponente di q in

$$\Pi_{tt'}\left[\varepsilon_{g'} \psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) - \varepsilon_{g'} \psi\left(\frac{g\varpi + t'}{g'}\right)\right]^2$$

sarà Γ_n. Nel prodotto

$$\Pi_{tt'}\left[\varepsilon_{g'} \psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) - \varepsilon_{g'_1} \psi\left(\frac{g_1\varpi + t}{g'_1}\right)\right]^2$$

se $g < g'$, il minimo esponente di q sarà $\frac{n}{g'^2}(g')_n (g'_1)_n$, quando $\varepsilon_{g'} = \varepsilon_{g'_1}$, e altrimenti sarà zero. Dunque sarà $2\Delta'_n$ nel prodotto

$$\Pi_{gg'tt'}\left[\varepsilon_{g'} \psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) - \varepsilon_{g'_1} \psi\left(\frac{g_1\varpi + t}{g'_1}\right)\right]^2,$$

dove g è differente da g_1. Pertanto il minimo esponente di q in D' sarà

$$\Gamma_n + 2\Delta'_n .$$

Ma dall' espressione (11) si rileva che questo esponente deve essere eguale a ν_1, dunque

$$\nu_1 = \Gamma_n + 2\Delta'_n ;$$

come volevamo dimostrare.

Mutando u in $\frac{1}{u}$, sappiamo dal Teorema 2 del n. 13 che v si converte in $\frac{1}{v}$, quindi dall' equazioni (5) e (9), osservando che il quadrato del prodotto di tutte le radici nelle equazioni modulari è uguale ad u^{2N}, si ottiene

$$(12) \quad \Pi\left(\frac{1}{v_{gt}} - \frac{1}{v_{g_1 t_1}}\right)^2 = \frac{D}{u^{2N(N-1)}} = \frac{u^{\nu}(u^8 - 1)^{\nu_1}(A_0 u^{8\rho} + A_1 u^{8(\rho-1)} + \cdots + A_\rho)}{u^{2\nu + 8\nu_1 + 8\rho}},$$

e quindi

$$4\rho = N(N - 1) - \nu - 4\nu_1 ,$$

come volevamo dimostrare.

Confrontando l' equazione (12) colla (10), si deduce

$$(13) \qquad A_r = A_{\rho - r} .$$

Quando n ha i fattori primi tutti differenti, N è eguale alla somma dei divisori di n e $(g')_n = g'$, quindi

$$\Gamma_n = \sum (n - g) = nN' - N ,$$

dove N' indica il numero dei divisori di n. La funzione numerica Δ_n diviene eguale a $\sum g g_1$, dove la somma deve estendersi a tutte le combinazioni di due divisori di n il prodotto dei quali è $< n$, e Δ'_n è la funzione Δ_n diminuita di tutti i prodotti gg' pei quali non è $\varepsilon_g = \varepsilon_{ng'}$.

Allorchè $n = p^\mu$ e p è un numero primo dispari abbiamo

$$\Gamma_{p^\mu} = (p - 1)\left[\mu p^{\mu-1} - (\mu - 1) p^{\mu-2}\right], \quad \Delta_{p^\mu} = \mu p^{\mu-1} - (\mu - 1) p^{\mu-2} ;$$

$\Delta'_{p^\mu} = \Delta_{p^\mu}$ se $\varepsilon_p = 1$; se poi $\varepsilon_p = -1$, si ha

$$\Delta'_{p^\mu} = \frac{(\mu - 1) p^{\mu-2}(p^2 - 1) + 2(p^{\mu-1} + \eta)}{(p + 1)^2},$$

dove $\eta = (-1)^\mu$. Quindi in questo caso avremo

$$(14)\quad \begin{cases} \nu = (p+1)\left[\mu p^{\mu-1} - (\mu-1)p^{\mu-2}\right], \\ \nu_1 = (p+\varepsilon_p)\left[\mu p^{\mu-1} - (\mu-1)p^{\mu-2}\right] + (1-\varepsilon_p)\dfrac{(\mu-1)p^{\mu-2}(p^2-1)+2(p^{\mu-1}+\eta)}{(p+1)^2}, \\ 4\varrho = p^{\mu-1}(p+1)(p^\mu + p^{\mu-1} - 1) - \nu - 4\nu_1. \end{cases}$$

Se $n = p$ numero primo, ponendo $\mu = 1$, $\eta = -1$ nelle formule (14), si ottiene

$$(15)\qquad \nu = n+1, \qquad \nu_1 = n + \varepsilon_n, \qquad \varrho = \frac{n^2-1}{4} - n - \varepsilon_n.$$

16.

Passiamo ora alla determinazione dei valori dei rapporti ϖ dei periodi delle funzioni ellittiche per le quali l'equazioni modulari di ordine dispari n ammettono radici eguali.

Teorema 1. *Affinchè sia*

$$(1)\qquad \varepsilon_{g'}\varphi\left(\frac{g'\varpi - \sigma}{g''}\right) = \varepsilon_{g'_1}\varphi\left(\frac{g'_1\varpi - \sigma'}{g''_1}\right),$$

dove ϖ *è un numero complesso che ha la parte imaginaria positiva,* σ, σ' *sono multipli di* 16 *e* $g''g' = g'_1 g''_1 = n$, *è necessario e sufficiente che* ϖ *sodisfi ad una equazione*

$$(2)\qquad A\varpi^2 + 2B\varpi + C = 0,$$

dove A, B *e* C *sono numeri interi e reali e il determinante*

$$\Delta = B^2 - AC$$

è negativo e della forma

$$(3)\qquad \Delta = -8h(n-8h);$$

oppure

$$(4)\qquad \Delta' = -(n-2h)(8h-3n),$$

e quando Δ *ha la forma* (3) *si hanno le congruenze*

$$(5)\qquad B \equiv 0 \pmod{4}, \qquad C \equiv 0 \pmod{8};$$

oppure

$$(6)\qquad B \equiv 2 \pmod{4}, \qquad C \equiv 4 \pmod{8},$$

e A dispari quando h è dispari: quando poi il determinante ha la forma (4) *si hanno le congruenze*

(7) $$B \equiv 1 \pmod{2}, \qquad C \equiv 2 \pmod{4}.$$

Infatti, affinchè sia verificata la equazione (1), è necessario e sufficiente che si abbia

(8) $$\frac{g_1'\varpi - \sigma'}{g_1''} = \frac{\gamma g'' - \delta\sigma + \delta g'\varpi}{\alpha g'' - \beta\sigma + \beta g'\varpi},$$

(9) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

α e δ dispari, γ e β pari, e siano sodisfatte le congruenze

(10) $$\gamma \equiv 0 \pmod{16}, \qquad \alpha \equiv \delta \equiv \pm g'g_1' \pmod{8},$$

oppure

(11) $$\gamma \equiv 8 \pmod{16}, \qquad \alpha \equiv \delta \equiv \pm g'g_1' + 4 \pmod{8}$$

Alla equazione (8) può darsi la forma

(12) $$\beta g'g_1'\varpi^2 + [\alpha g_1' g'' - \delta g' g_1'' - \beta(\sigma g_1' + \sigma' g')]\varpi$$
$$+ \beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g_1'' - \gamma g'' g_1'' = 0.$$

Quando sono verificate le congruenze (10) abbiamo

(13) $$\alpha g_1' g'' \equiv \delta g' g_1'' \equiv \pm n \pmod{8},$$

e, quando si hanno le congruenze (11),

(14) $$\alpha g_1' g'' \equiv \delta g' g_1'' \equiv \pm n + 4 \pmod{8};$$

e quindi il coefficiente del secondo termine della equazione (12) è sempre multiplo di 8. Pertanto potremo porre

(15) $$\frac{\beta g' g_1'}{2} = A, \qquad \frac{\alpha g_1' g'' - \delta g' g_1'' - \beta(\sigma g_1' + \sigma' g')}{4} = B,$$
$$\frac{\beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g_1'' - \gamma g'' g_1''}{2} = C,$$

e la equazione (12) prenderà la forma (2) ed A, B e C saranno interi.

Se poi $\beta \equiv 0 \pmod{4}$ e $\gamma \equiv 8 \pmod{16}$, porremo

(16) $$\frac{\beta g' g_1'}{4} = A, \qquad \frac{\alpha g_1' g'' - \delta g' g_1'' - \beta(\sigma g_1' + \sigma' g')}{8} = B,$$
$$\frac{\beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g_1'' - \gamma g'' g_1''}{4} = C,$$

e avremo sempre una equazione con i coefficienti interi della forma (2).

Facendo

$$(17)\qquad 2S = \alpha g'_1 g'' + \delta g' g''_1 + \beta(\sigma' g' - \sigma g'_1),$$

colle posizioni (15) avremo

$$(18)\qquad 4\Delta = S^2 - n^2;$$

e colle posizioni (16)

$$(19)\qquad 16\Delta' = S^2 - n^2.$$

Quando sono verificate le congruenze (10) abbiamo

$$\alpha g'_1 g'' = 8l \pm n, \qquad \delta g' g''_1 = 8l' \pm n,$$

e quindi, moltiplicando e osservando la equazione (9), si ottiene, se $\beta \equiv 0$ (mod. 4),

$$8n(l + l') \equiv 0 \pmod{64},$$
$$l + l' \equiv 0 \pmod{8},$$
$$2S \equiv \alpha g'_1 g'' + \delta g' g''_1 \equiv \pm 2n \pmod{64};$$

onde

$$S = 16h \pm n,$$

e h pari.

Se poi $\beta \equiv 2$ (mod. 4) avremo

$$l + l' \equiv 0 \pmod{4}, \qquad 2S \equiv \pm 2n \pmod{32}, \qquad S = 16h \pm n,$$

ed h potrà essere dispari.

Quando sono verificate le congruenze (11), se $\beta \equiv 2$ (mod. 4), avremo

$$\alpha g'_1 g'' = 8l \pm n + 4, \qquad \delta g' g''_1 = 8l' \pm n + 4,$$

e quindi

$$\beta\gamma n^2 \equiv 16 \equiv \pm 8n(l + l' + 1) + 16 \pmod{32},$$

ossia

$$l + l' + 1 \equiv 0 \pmod{4},$$

e quindi

$$2S \equiv \pm 2n \pmod{32}, \qquad S = 16h \pm n,$$

ed h potrà essere dispari.

Se poi $\beta \equiv 0$ (mod. 4), avremo

$$l + l' + 1 \equiv \mp 2n \pmod{4},$$

onde

$$2S \equiv \pm 14n \pmod{32},$$

e quindi

$$S = 16h \pm 7n.$$

Dunque il determinante Δ dato dalla equazione (18), nella quale dovrà sostituirsi

$$S = 16h - n,$$

sarà

$$\Delta = -8h(n - 8h),$$

e avremo nei primi due casi le congruenze (5), nel terzo le congruenze (6), ed $A \equiv 1 \pmod{2}$ quando h è dispari.

Il determinante Δ' dato dall'equazione (19) nella quale dovrà sostituirsi

$$S = 16h \pm 7n,$$

sarà

$$\Delta' = -(n - 2h)(8h - 3n),$$

ed essendo

$$B \equiv \frac{\alpha g'_1 g'' - \delta g' g''_1}{8} \equiv l - l' \equiv 1 \pmod{2},$$

e

$$C \equiv \frac{\gamma}{4} \equiv 2 \pmod{4},$$

saranno sodisfatte le congruenze (7) [1].

Ogni equazione (2), per la quale sono sodisfatte le condizioni del Teorema 1, dà un valore di ϖ per cui l'equazione modulare di ordine n ammette radici eguali, e quindi determina una radice $u_r = \varphi(\varpi_r)$ del discriminante. Diremo che una tale equazione *appartiene alla radice u_r del discriminante.*

Ora abbiamo trovato per il discriminante

$$D = u^{\nu}(1 - u^8)^{\nu_1} f(u^8), \tag{20}$$

dove $f(u^8)$ è una funzione razionale e intera di u^8; quindi avremo

$$f(u^8) = a\Pi[u - \varphi(\varpi_r)], \tag{21}$$

essendo a una quantità numerica ed i valori ϖ_r dovendo essere determinati mediante tutte l'equazioni che appartengono alle radici del discriminante, e che non danno valori *identici* per $\varphi(\varpi_r)$.

Teorema 2. *Se la equazione*

$$A\varpi^2 + 2B\varpi + C = 0 \tag{2}$$

---

[1] A questo punto l'A. faceva seguire una dimostrazione, errata in parecchi luoghi, che le condizioni espresse nel teorema sono anche sufficienti. Poichè per renderla rigorosa occorrevano delle mutazioni radicali, parve miglior consiglio sopprimerla. V. C.

appartiene a una radice u_r *del discriminante, e la forma* (A', B', C') *è equivalente alla forma* (A, B, C) *e se questa si trasforma in quella mediante la sostituzione*

$$\varpi = \frac{\gamma + \delta\varpi'}{\alpha + \beta\varpi'},$$

dove $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ *e* γ *è pari, anche la equazione*

$$A'\varpi'^2 + 2B'\varpi' + C' = 0 \tag{22}$$

apparterrà a una radice del discriminante, la quale sarà identicamente eguale ad u_r *o ad* $\frac{1}{u_r}$ *moltiplicato per una radice ottava dell'unità.*

Infatti, se il determinante della equazione (2) ha la forma (3) dovrà aversi

$$C \equiv 4\varepsilon \pmod{8}, \qquad B \equiv 2\varepsilon \pmod{4}, \tag{23}$$

dove ε è eguale a zero o all'unità. Se il determinante ha la forma (4) avremo

$$C \equiv 2 \pmod{4}, \qquad B \equiv 1 \pmod{2}, \tag{24}$$

Ora poichè abbiamo

$$\begin{aligned} A' &= A\delta^2 + 2B\delta\beta + C\beta^2, \\ B' &= A\gamma\delta + B(\beta\gamma + \alpha\delta) + C\alpha\beta, \\ C' &= A\gamma^2 + 2B\gamma\alpha + C\alpha^2; \end{aligned} \tag{25}$$

sarà

$$C' \equiv C + 4\varepsilon' \pmod{8}, \qquad B' \equiv B + 2\varepsilon' \pmod{4};$$

e quindi

$$C' \equiv 4(\varepsilon + \varepsilon') \pmod{8}, \qquad B' \equiv 2(\varepsilon + \varepsilon') \pmod{4},$$

se il determinante ha la forma (3), e se ha la forma (4)

$$C' \equiv 2 \pmod{4}, \qquad B' \equiv 1 \pmod{2}.$$

Dunque la equazione (22) apparterrà a una radice del discriminante, la quale sarà

$$\varphi(\varpi') = \varphi\left(\frac{\gamma - \alpha\varpi}{-\delta + \beta\varpi}\right),$$

che è identicamente eguale ad u_r o ad $\frac{1}{u_r}$ moltiplicato per una radice ottava dell'unità.

Teorema 3. *Se la equazione*

$$A\varpi^2 + 2B\varpi + C = 0$$

appartiene ad una radice u_r *del discriminante, la forma* (A′, B′, C′) *è equivalente alla forma* (A, B, C) *e questa si trasforma in quella mediante la sostituzione*

$$\varpi = \frac{\gamma + \delta\varpi'}{\alpha + \beta\varpi'},$$

dove $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, *e* γ *è dispari, la equazione*

$$A'\varpi'^2 + 2B'\varpi' + C' = 0$$

apparterrà a una radice del discriminante, la quale sarà idènticamente eguale a $\sqrt[8]{1 - u_r^8}$ *o ad* $\frac{u_r}{\sqrt[8]{u_r^8 - 1}}$ *o ad una delle loro reciproche moltiplicata per una radice ottava della unità, soltanto se* $A \equiv C$ (mod. 8) *essendo il determinante della forma* (3), *oppure* $A \equiv C$ (mod. 4) *e il determinante ha la forma* (4).

Avremo anche in questo caso l'equazione (25) e le congruenze (23) se il determinante ha la forma (3); onde sarà

$$C' \equiv A + 4\varepsilon(\alpha + 1)\alpha \equiv A \pmod{8}, \qquad B' \equiv B + A\gamma\delta \pmod{4},$$

quindi soltanto, se $C \equiv A$ (mod. 8) [1], avremo

$$C' \equiv 4\varepsilon \pmod{8}, \qquad B' \equiv 2\varepsilon \pmod{4}.$$

Se poi il determinante ha la forma (4), saranno sodisfatte le congruenze (28), e quindi

$$C' \equiv A + 2\alpha(\alpha + 1) \equiv A \pmod{4}, \qquad B' \equiv 1 + A\delta \pmod{2}$$

---

[1] Qui sembra utile uno schiarimento. Perchè l'equazione

$$A'\varpi'^2 + 2B'\varpi' + C' = 0$$

nel caso che il determinante sia della forma (3). appartenga ad una radice del discriminante, dovranno verificarsi le condizioni:

$$B' \equiv 2\varepsilon' \pmod{4}, \qquad C' \equiv 4\varepsilon' \pmod{8}$$

con ε' uguale a zero od all'unità. Tenuta ragione de' risultati precedenti segue allora che

$$A \equiv 4\varepsilon' \pmod{8}, \qquad B' \equiv B \equiv 2\varepsilon \pmod{4},$$

ossia

$$2(\varepsilon' - \varepsilon) \equiv 0 \pmod{4},$$

cioè $\varepsilon' = \varepsilon$, od infine

$$A \equiv C \pmod{8},$$

come trova l'Autore. Nella stessa maniera si giustifica l'enunciato del teorema relativo al caso, in cui il determinante abbia la forma (4). V. C.

e perciò soltanto se $A \equiv C \pmod{4}$ avremo

$$C' \equiv 2 \pmod{4}, \qquad B' \equiv 1 \pmod{2}.$$

In questi casi soli i valori di $\varphi(\varpi')$ saranno radici del discriminante, ed essendo della forma

$$\varphi\left(\frac{\gamma - \alpha\varpi}{-\delta + \beta\varpi}\right)$$

dove γ è dispari saranno identicamente eguali ai 32 valori che si ottengono moltiplicando per le radici ottave della unità le quattro quantità

$$\psi(\varpi) = \sqrt[8]{1 - u_r^8}\,, \qquad e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)} = \frac{u_r}{\sqrt[8]{u_r^8 - 1}}\,,$$

$$\frac{1}{\psi(\varpi)} = \frac{1}{\sqrt[8]{1 - u_r^8}}\,, \qquad \frac{e^{\frac{\pi i}{8}} \psi(\varpi)}{\varphi(\varpi)} = \frac{\sqrt[8]{u_r^8 - 1}}{u_r}\,;$$

come volevamo dimostrare.

Pertanto se prenderemo tutte le classi differenti delle forme (A, B, C) i determinanti delle quali sono dati dall'equazioni (3) e (4) e sono negativi, e quindi in numero finito, ciascuna classe darà 16 o 48 [1] equazioni appartenenti ad altrettante radici del discriminante in generale non identicamente eguali tra loro. Le classi che dànno 16 equazioni le diremo di prima specie, quelle che ne dànno 48 le diremo di seconda specie.

Ad ogni classe di prima specie corrisponde evidentemente un fattore del discriminante della forma

$$(26) \qquad \left(u^8 - \varphi^8(\varpi)\right)\left(u^8 - \frac{1}{\varphi^8(\varpi)}\right) = u^{16} - au^8 + 1\,.$$

Ad ogni classe di seconda specie corrisponde un fattore del discriminante della forma

$$(27)\ (u^8-\varphi^8)\left(u^8-\frac{1}{\varphi^8}\right)(u^8-1+\varphi^8)\left(u^8-\frac{1}{1-\varphi^8}\right)\left(u^8-\frac{\varphi^8}{\varphi^8-1}\right)\left(u^8-\frac{\varphi^8-1}{\varphi^8}\right)$$
$$= u^{48} - 3u^{40} + bu^{32} + (5 - 2b)\,u^{24} + bu^{16} - 3u^8 + 1\,.$$

Bisogna però eccettuare quelle classi che dànno equazioni per le quali alcuni dei 16 o dei 48 valori precedenti sono identicamente eguali tra loro.

---

[1] Quando sono soddisfatte le condizioni del Teorema 3, oltre le 16 equazioni corrispondenti a γ pari, si hanno ancora le 32 corrispondenti a γ dispari. Quindi in tutto $16 + 32 = 48$ equazioni. V. C.

Affinchè alcuni di questi valori siano identicamente eguali, è necessario e sufficiente che sia

$$\varpi = \frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

quindi queste classi eccezionali saranno le sole classi derivate delle classi che corrispondono all' equazione

$$\beta\varpi^2 + 2\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)\varpi - \gamma = 0; \tag{28}$$

se $\alpha \equiv \delta$ (mod. 2), o delle classi che corrispondono all' equazione

$$2\beta\varpi^2 + 2(\alpha - \delta)\varpi - 2\gamma = 0, \tag{29}$$

se $\alpha \equiv \delta + 1$ (mod. 2).

Il determinante dell' equazione (28) è $\left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 - 1$, e deve essere negativo: quindi $\alpha = -\delta$; e il determinante è $= -1$. Ma vi è una classe di determinante -1, rappresentata dalla forma $(1, 0, 1)$. Dunque le classi che corrispondono all' equazione (32) si riducono a questa sola.

Il determinante dell' equazione (29) è $(\alpha + \delta)^2 - 4$. Dovendo essere negativo ed $\alpha + \delta$ dispari, sarà $\alpha = -\delta \pm 1$, e quindi il determinante sarà eguale a -3. Ma vi è una sola classe di determinante -3 rappresentata da $(2, 1, 2)$. Dunque le classi corrispondenti all' equazione (29) si riducono a queste sole. Ne segue che quelle classi che, essendo di prima specie, danno nonpertanto meno di 16 radici del discriminante, e quelle, che, pure essendo di seconda specie, danno meno di 48 radici del discriminante, sono soltanto le derivate delle classi rappresentate dalle due forme $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$ [1].

Le classi derivate di $(1, 0, 1)$ s' incontrano soltanto nei casi seguenti:

1°. Quando il determinante Δ ha la forma (3), ed essendo m il massimo comun divisore di n e $\sqrt{-\Delta}$, $\frac{n}{m}$ ha la forma $16a^2 + b^2$ e b è dispari.

2°. Quando il determinante Δ' ha la forma (4), ed essendo m il massimo comun divisore di n e $\sqrt{-\Delta'}$, $\frac{n}{m}$ ha la forma $4a^2 + b^2$ ed a e b sono numeri dispari.

Infatti le classi derivate di $(1, 0, 1)$ hanno il determinante della forma $-\varrho^2$; quindi nel primo caso dovremo avere

$$\varrho^2 = 8h(n - 8h);$$

---

[1] Il testo originale di questo capoverso essendo alquanto oscuro venne qua e là rimaneggiato per renderlo pienamente intelligibile. V. C.

onde

$$8h = 16a^2m\,. \qquad n - 8h = b^2m$$

e sommando

$$n = m(16a^2 + b^2)\,, \qquad \varrho = 4abm\,,$$

b è dispari ed m è il massimo comun divisore di n e ϱ.

Nel secondo caso avremo

$$\varrho^2 = (n - 2h)(8h - 3n)$$

e quindi

$$n - 2h = a^2m\,, \qquad 8h - 3n = b^2m$$

onde

$$n = m(4a^2 + b^2)\,, \qquad \varrho = abm\,;$$

a e b sono dispari, ed m è il massimo comun divisore di n e ϱ.

Nel secondo caso una equazione che appartiene a una radice del discriminante è data dalla classe derivata $\varrho(1, -1, 2)$, ed è

$$\varrho\varpi^2 - 2\varrho\varpi + 2\varrho = 0\,,$$

ed essendo ϱ dispari, la classe è della prima specie: ma, essendo

$$\varpi = \frac{2 - \varpi}{1 - \varpi}$$

abbiamo

$$\varphi^4(\varpi) = -\frac{1}{\varphi^4(\varpi)}\,,$$

e quindi i 16 valori di u si riducono ad 8 soltanto, e sono dati dall'equazione

$$u^8 + 1 = 0\,,$$

che sarà un fattore del discriminante.

Avremo lo stesso fattore nel primo caso, se $\varrho \equiv 4 \pmod{8}$. Se poi nel primo caso $\varrho \equiv 0 \pmod{8}$ la classe derivata $\varrho(1, -1, 2)$ apparterrà alla seconda specie: ma i 48 valori di u si riducono a 24 soltanto, perchè i valori di u^8 distinti sono tre soli, corrispondenti alle tre equazioni

$$\varpi^2 + 1 = 0\,, \qquad \varpi^2 - 2\varpi + 2 = 0\,, \qquad 2\varpi^2 - 2\varpi + 1 = 0\,,$$

le quali danno

$$\varphi^8(\varpi) = 1 - \varphi^8(\varpi) = \frac{1}{2}\,, \quad \varphi^8(\varpi) = \frac{1}{\varphi^8(\varpi)} = -1\,, \text{ e } \varphi^8(\varpi) = \frac{\varphi^8(\varpi)}{\varphi^8(\varpi) - 1} = 2\,,$$

e si hanno i fattori del discriminante

$$2u^8 - 1\,, \qquad u^8 + 1\,, \qquad u^8 - 2\,.$$

Le classi derivate di $(2,1,2)$ hanno il determinante della forma $-3\varrho^2$ e s'incontrano soltanto allorchè, essendo m il massimo comun divisore tra n e ϱ, si ha $\frac{n}{m}=3a^2+b^2$. L'equazioni che danno queste classi, appartengono alla seconda specie, ma danno soltanto 16 valori distinti per u, perchè abbiamo

$$\varphi^8(\varpi)=\frac{\varphi^8(\varpi)-1}{\varphi^8(\varpi)}$$

quindi per il discriminante abbiamo il fattore

$$u^{16}-u^8+1=0\,.$$

Teorema 4. *Il sistema dei valori delle radici eguali della equazione modulare è eguale al sistema dei valori di u per i quali essa acquista radici eguali.*

Infatti sia ϖ un valore per cui l'equazione modulare acquista radici eguali; avremo

$$A\varpi^2+2B\varpi+C=0\,, \tag{30}$$

e questa equazione apparterrà a una radice del discriminante. Siano le radici che divengono eguali

$$\varepsilon_{g'}\varphi\left(\frac{g'\varpi-\sigma}{g''}\right)=\varepsilon_{g'_1}\varphi\left(\frac{g'_1\varpi-\sigma'}{g''_1}\right).$$

Poniamo

$$\frac{g'\varpi-\sigma}{g''}=\varpi_1\,,\qquad \frac{g'_1\varpi-\sigma'}{g''_1}=\varpi_2\,,$$

onde

$$\varpi=\frac{g''\varpi_1+\sigma}{g'}=\frac{g''_1\varpi_2+\sigma'}{g'_1}\,.$$

Sostituendo nell'equazione (30) avremo

$$\frac{Ag''}{g'}\varpi_1^2+2\left(\frac{A\sigma}{g'}+B\right)\varpi_1+\frac{A\sigma^2+2B\sigma g'+Cg'^2}{n}=0\,, \tag{31}$$

$$\frac{Ag''_1}{g'_1}\varpi_2^2+2\left(\frac{A\sigma'}{g'_1}+B\right)\varpi_2+\frac{A\sigma'^2+2B\sigma' g'_1+Cg_1'^2}{n}=0\,. \tag{32}$$

Tanto nel caso dell'espressioni (15) quanto nel caso dell'espressioni (16) per A, B, C si rileva essere:

$$A\sigma^2+2B\sigma g'+Cg'^2\equiv 0 \pmod{n}\,,$$
$$A\sigma'^2+2B\sigma' g'_1+Cg_1'^2\equiv 0 \pmod{n}\,,$$

ed essendo A multiplo di $g'_1 g'$, è chiaro che le due equazioni (31) e (32) avranno coefficienti interi. Hanno il determinante eguale al determinante

della equazione (30) come è facile a verificarsi, e, poichè σ e σ' sono multipli di 16,

$$A\sigma^2 + 2B\sigma g' + Cg'^2 \equiv C \pmod{8},$$

$$\frac{A\sigma}{g'} + B \equiv B \pmod{4}.$$

Dunque appartengono ambedue a una radice del discriminante, e quindi $\varphi(\varpi_1)$ e $\varphi(\varpi_2)$ sono radici del discriminante.

Poichè $\varphi^8(\varpi_1) = \varphi^8(\varpi_2)$ le radici del discriminante saranno tutte multiple e dello stesso ordine pari di multiplicità delle radici dell'equazione modulare, quindi abbiamo il seguente

Teorema 5. *Il discriminante della equazione modulare di ordine dispari n è il quadrato di una funzione razionale e intera di u^8 moltiplicata per una potenza intera e positiva di u.*

Quando n è un numero primo, l'equazione modulare non può avere radici multiple che non siano soltanto doppie altro che quando $u = 0$, oppure $u = 1$. Infatti affinchè sia

$$\varphi\left(\frac{\varpi - \sigma}{n}\right) = \varphi\left(\frac{\varpi - \sigma'}{n}\right),$$

deve aversi

$$A\varpi^2 + 2B\varpi + C = 0,$$

e σ, σ' debbono essere radici della congruenza

$$A\sigma^2 + 2B\sigma + C \equiv 0 \pmod{n},$$

la quale non ha più di due radici, e affinchè sia

$$\varphi(n\varpi) = \varepsilon_n \varphi\left(\frac{\varpi - \sigma}{n}\right),$$

deve aversi

$$A \equiv 0 \pmod{n},$$

$$2B\sigma + C \equiv 0 \pmod{n},$$

ed è chiaro che σ ha un sol valore, e quindi abbiamo il seguente

Teorema 6. *Il discriminante delle equazioni modulari di ordine primo è il quadrato di una funzione razionale e intera di u^8 che ha tutti i fattori disuguali moltiplicata per potenze intere e positive di u e di $1 - u^8$.*

Costruiamo alcuni discriminanti più semplici.

1°. $n = 3$; avremo $\varepsilon_3 = (-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = -1$; $\varrho = 2 - 2 = 0$,

$$D = u^4(1 - u^8)^2.$$

2°. $n=5$; $\varepsilon_5=-1$, $\varrho=6-4=2$; onde

$$D=u^6(1-u^8)^4(1+au^8+u^{16}).$$

In questo caso le classi di determinante

$$\Delta=-8h(5-8h)$$

non esistono; quelle di determinante

$$\Delta'=-(5-2h)(8h-15)$$

danno soltanto il determinante

$$\Delta'=-1;$$

quindi si ha la sola classe $(1,0,1)$ che dà il solo fattore $1+u^8$, e dovendo D essere un quadrato perfetto, abbiamo

$$D=u^6(1-u^8)^4(1+u^8)^2.$$

3°. $n=7$; $\varepsilon_7=1$, $\varrho=12-8=4$; onde

$$D_7=u^8(1-u^8)^8 f_7(u^8).$$

In questo caso le classi di determinante

$$\Delta=-8h(7-8h)$$

non esistono. Quelle di determinante

$$\Delta'=-(7-2h)(8h-21)$$

si riducono alla sola $(2,1,2)$ che dà il fattore $u^{16}-u^8+1$; perchè l'altra classe $(1,0,3)$ non appartiene ad alcuna radice del discriminante. Quindi

$$D_7=u^8(1-u^8)^8(1-u^8+u^{16})^2.$$

4°. $n=9$; $\varepsilon_9=-1$, $N=12$, $\nu=20$, $\nu_1=12$,

$$\varrho=33-5-12=16,$$
$$D_9=u^{20}(1-u^8)^{12} f_{11}(u^8).$$

In questo caso le classi di determinante

$$\Delta=-8h(9-8h)$$

corrispondono soltanto a $\Delta=-8$. Le classi di determinante -8 sono tre, ma una di queste è derivata di $(1,0,2)$ e in tutte le forme che le appartengono abbiamo $A\equiv 2 \pmod{8}$; e $B\equiv 0 \pmod{4}$ e non dà equazioni che appartengono a radici del discriminante. Ne rimangono due le quali sono rappresentate dalle forme

$$(1,0,8), \qquad (3,4,8)$$

le quali appartengono alla prima specie, e danno due fattori di secondo grado rispetto ad u^8.

Le classi di determinante

$$\Delta' = -(9-2h)(8h-27)$$

corrispondono soltanto ad $h=4$, $\Delta' = -5$. Ma queste sono due sole rappresentate dalle forme

$$(5,5,6), \qquad (3,1,2),$$

le quali sono di prima specie; quindi altri due fattori di secondo grado in u^8. Quindi $f(u^8)$ sarà eguale a un polinomio reciproco di ottavo grado inalzato a quadrato [1].

---

[1] Il lavoro, che nella mente dell'A. doveva essere continuato, rimase interrotto a questo punto. V. C.

INDICE ALFABETICO
DEI NOMI RICORDATI IN QUESTO VOLUME

Il numero indica la pagina, e l'esponente quante volte il nome è ripetuto nella stessa pagina.

ABEL, 17, 18^{2}, 22, 28, 30, 31^{4}, 32, 70, 72, 84^{2}, 96, 124, 126^{2}, 150^{3}.

BERNOULLI, 144.
BEZOUT, 173.
BORCHARDT, 148.
BOUQUET, 239.
BRIOSCHI, 145, 157, 163, 166.
BRIOT, 239.

CAUCHY, 20, 34, 90, 97^{2}, 113^{2}, 123, 229.
CAYLEY, 158, 174, 176.
CHEVALIER, 95.
CHRISTMANN, 99^{2}.
CRELLE, 5, 13, 18, 29, 30^{2}, 31, 34, 69, 77, 96, 126, 141, 143, 151, 166, 296, 328, 346, 351.

DIRICHLET, 124, 126.

EISENSTEIN, 30.
EULERO, 173, 190, 256.

FAÀ DI BRUNO, 138.
FÉRUSSAC, 34.
FOURIER, 145^{2}.

GALOIS, 18^{2}, 22, 30, 31^{2}, 32^{3}, 44, 59^{3}, 60, 62, 70^{2}, 95, 123^{3}, 133, 134.
GAUSS, 24, 68, 123, 193, 227, 256.
GERGONNE, 150.
GIANNI, 3.

HERMITE, 30, 66, 389.
HOLMBOE, 31, 84, 126.

JACOBI, 5, 30, 84, 96^{2}, 141, 143, 149, 151, 163, 276, 286, 346, 351.

KRONECKER, 124, 126, 135, 185, 188.
KUMMER, 13, 80.

LACROIX, 31.
LAGRANGE, 17^{2}, 72, 74, 80, 332, 347.
LAMÈ, 4.
LEGENDRE, 86, 256, 336.
LIE, 84, 126.
LIOUVILLE, 18^{3}, 30, 32, 34, 66, 133, 150, 250.
LUTHER, 29, 31, 77.

MALMSTÉN, 18^{3}, 22, 31^{2}, 69^{2}.
MOSSOTTI, 5.

PACINOTTI, 3, 10.
PLANA, 80.
POISSON, 31, 163.

RAABE, 166^{2}.
RIEMANN, 190, 229.
RUFFINI, 25, 31, 96.

SCHLAEFLI, 171^{2}.
SCHOENEMANN, 34.
SCHUMACHER, 193.
SERRET, 18, 19, 24, 35, 59, 60, 65, 68^{2}, 76, 90, 107, 128, 150.
STURM, 161.
SYLOW, 84, 126.
SYLVESTER, 124, 136, 161.

TARDY, 145.
TORRICELLI, 3.
TORTOLINI, 30, 74, 83, 99, 103, 124, 183, 188.

WALLIS, 259.
WARING, 144, 163^{2}, 169.
WEIERSTRASS, 296^{2}, 328.

FINE DEL TOMO PRIMO